Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

La función de entropía de Rényi en sistemas dinámicos débilmente ψ-mezclantes y grandes desviaciones para tiempos de retorno cortos

Tesina

Presentado por:

Gerardo Barrera Vargas

en opción al Grado de:

Maestro en Ciencias con Orientación en Probabilidad y Estadística

Director de tesis:

Dr. José Alfredo López Mimbela

Guanajuato, Guanajuato, México

13 Julio de 2011

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

La función de entropía de Rényi en sistemas dinámicos débilmente ψ-mezclantes y grandes desviaciones para tiempos de retorno cortos

Tesina

Presentado por:

Gerardo Barrera Vargas

en opción al Grado de:

Maestro en Ciencias con Orientación en Probabilidad y Estadística

Director de tesis:

Dr. José Alfredo López Mimbela

Sinodales:

Presidente: Dr. Víctor Manuel Pérez Abreu Carrión
Secretario: Dr. Peter Kevei
Vocal: Dr. José Alfredo López Mimbela

Guanajuato, Guanajuato, México

13 Julio de 2011

Dedicatoria

A mis padres, Fermin y Miriam,

a mi hijo, Mateo,

a mi esposa, Yauri,

y a mis hermanos, Abraham (†), Arturo y Waldemar.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. José Alfredo López Mimbela a quien le reconozco su tiempo, paciencia y dedicación, así como por todas las discusiones, ideas y sugerencias para realizar esta tesina.

Agradezco a mis sinodales Dr. Peter Kevei y Dr. Víctor Manuel Pérez Abreu Carrión por sus observaciones y sugerencias.

Agradezco al CONACYT por la beca de maestría.

Este trabajo forma parte del proyecto CONACYT número 157772 *"Sistemas estocásticos no lineales", dirigido por el Dr. José Alfredo López Mimbela.*

Índice general

Introducción

En la Teoría Ergódica se pretende describir las características de una transformación sobre un espacio. Dado un espacio de puntos y una transformación del espacio en sí mismo, describir el comportamiento de los puntos del espacio a través de la acción de la transformación, y hacia dónde tienden estos puntos al aplicarle sucesivamente la transformación, frecuentemente resulta muy difícil. Por lo anterior, se prefiere estudiar propiedades cualitativas en vez de propiedades cuantitativas. Por ejemplo, en la Teoría de Ecuaciones Diferenciales, muchas veces el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales se enfoca en el estudio del plano fase, debido a la complejidad de resolver analíticamente el sistema. Uno de los conceptos utilizados para estudiar los sistemas dinámicos desde el punto de vista cualitativo es la entropía.

El concepto de entropía fue introducido por R. Clausius en la Física en 1854, L. Boltzmann lo retoma en la Termodinámica en 1872, C. Shannon lo introduce en la Teoría de la Información en 1948 y A. Kolmogorov en la Teoría Ergódica en 1958. Hoy en día, el concepto de entropía existe en varios otros contextos: Teoría de Grupos, Teoría de Gráficas y muchas otras áreas.

Gracias al desarrollo de la Teoría de Probabilidad y la Teoría de la Información, el concepto de entropía poco a poco fue adentrándose en diversas áreas de las matemáticas, al punto de que hoy en día se puede afirmar que, de entre los conceptos relativamente modernos de la Física, uno de los que ha sido mejor asimilado por las matemáticas es precisamente la entropía.

Alfréd Rényi definió otro concepto de entropía, actualmente denominada la entropía de Rényi. La función de entropía de Rényi aparece en múltiples contextos: en la Teoría de la Información es utilizada para cuantificar la información y evitar pérdida de la misma; en la Teoría Estadística aparece en índices de biodiversidad ya que la entropía puede ser interpretada como una medida del desorden del sistema; en la Matemática Pura puede ser empleada para definir la dimensión fractal, estudiar tiempos de retornos y calcular la energía libre de Gibbs.

En este trabajo se estudia la función de entropía de Rényi para los sistemas dinámicos medibles débilmente ψ-mezclantes. El objetivo es proporcionar las definiciones y herramientas necesarias para entender la función de entropía de Rényi, así como sus propiedades analíticas: existencia, continuidad, monotonía, comportamiento asintótico en el cero y comportamiento asintótico en el infinito.

La exposición se basa en el artículo de Haydn y Vaienti [HV], de donde se tomó el hilo principal de las demostraciones y conclusiones. No obstante, algunas demostraciones de resultados principales (o parte de ellas) fueron levemente mejoradas por el sustentante, haciéndolas más transparentes y comprensibles.

Debido que hasta la fecha son pocos los casos en los cuales se ha podido demostrar la existencia de la función de entropía de Rényi, el estudio de los métodos de demostración empleadas en [HV] es importante ya que a partir de estas técnicas se pudieran encontrar demostraciones para la existencia de la función de entropía de Rényi para medidas más generales. La existencia de la función de entropía de Rényi ha sido probada solamente para las medidas de Bernoulli, medidas de Markov y medidas de Gibbs con potenciales Hölder continuos. En 1997, Luczak y Szpankowski [LS] demuestran la existencia de la función de entropía de Rényi para medidas ψ-mezclantes y en 2010, Haydn y Vaienti [HV] demuestran la existencia de la función de entropía de Rényi para medidas débilmente ψ-mezclantes.

En el primer capítulo, se hace un breve introducción a los sistemas dinámicos medibles y *grosso modo* se estudia la construcción de dos ejemplos clásicos: desplazamientos de Bernoulli y desplazamientos de Markov, los cuales son de interés en Teoría de Probabilidad y Teoría Ergódica. Luego se introducen las particiones medibles y se enuncian las definiciones elementales para entender el concepto de entropía, y se definen la entropía métrica y la función de entropía de Rényi. A través de este primer capítulo se enuncian tres teoremas célebres de Teoría de Entropías: Teorema de Kolmogorov-Ornstein, el cual nos dice que la entropía métrica resulta un invariante fino en desplazamientos de Bernoulli; Teorema de Kolmogorov-Sinai, el cual nos proporciona una herramienta para realizar demostraciones de existencia y cálculos de entropías métricas, y por último el Teorema de Shannon-McMillan-Breiman, el cual nos dice cómo emerge la entropía métrica en grandes desviaciones.

En el segundo capítulo, primeramente se enuncia el Teorema de existencia y propiedades de la función de entropía de Rényi. Básicamente, este teorema nos dice que en los sistemas dinámicos medibles débilmente ψ-mezclantes es posible demostrar la existencia, continuidad y monotonía de la función de entropía de Rényi, así como investigar el comportamiento en el cero y en el infinito. Así mismo, nos dice que el comportamiento en el cero de la función de entropía de Rényi coincide con la entropía métrica, y el comportamiento en el infinito coincide con la tasa de decaimiento subexponencial del máximo de la medida de los n-cilindros. Además, se realizan cálculos de la función de entropía de Rényi para desplazamientos de Bernoulli y desplazamientos de Markov. Por último, se realiza la demostración del Teorema de existencia y propiedades de la función de entropía de Rényi siguiendo los métodos de demostración empleados en [HV].

Finalmente, en el tercer y último capítulo se emplean dos teoremas célebres de la Teoría Ergódica: el Teorema de recurrencia de Poincaré y el Teorema de Kac, como base para investigar el comportamiento asintótico de los tiempos de retorno corto en sistemas dinámicos medibles. A partir de estos dos resultados pilares se ve la necesidad de estudiar grandes desviaciones para la función de retorno corto a los n-cilindros en los sistemas dinámicos medibles ψ-mezclantes. El trabajo culmina mostrando cómo la función de entropía de Rényi emerge en la tasa de decaimiento subexponencial de la medida de los retornos cortos.

Capítulo 1

Nociones preliminares

1.1. Sistemas dinámicos medibles

En este primer capítulo introduciremos los sistemas dinámicos medibles. Estudiaremos en general la construcción de los desplazamientos de Bernoulli y desplazamientos de Markov, por ser ejemplos importantes en la Teoría de Probabilidad. Luego, se introducirán la particiones medibles y medidas débilmente ψ-mezclantes, las cuáles serán conceptos fundamentales este trabajo. Finalmente, se estudiará el concepto de entropía métrica y algunos teoremas célebres pertenecientes a la Teoría de Entropías. Dichos teoremas nos darán la noción de cómo emerge la entropía métrica en grandes desviaciones.

Definición 1 Sean $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ dos espacios de probabilidad.

a) Decimos que una transformación $T : X_1 \to X_2$ es medible si $T^{-1}(\mathcal{B}_2) \subset \mathcal{B}_1$.

b) Una transformación $T : X_1 \to X_2$ preserva la medida μ_2 cuando T es medible y satisface

$$\mu_1\big(T^{-1}(B_2)\big) \;=\; \mu_2(B_2),$$

para toda $B_2 \in \mathcal{B}_2$.

c) Decimos que $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ es un sistema dinámico medible si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de probabilidad y $T : X \to X$ es una transformación que preserva la medida μ.

d) Decimos que dos espacios de probabilidad $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ y $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ son isomorfos si:

   i) Existen $\tilde{X}_1 \in \mathcal{B}_1$ y $\tilde{X}_2 \in \mathcal{B}_2$ tales que $\mu_1(\tilde{X}_1) = \mu_2(\tilde{X}_2) = 1$.

   ii) Existe una transformación invertible $\pi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ tal que $\pi^{-1}(\tilde{\mathcal{B}}_2) \subset \tilde{\mathcal{B}}_1$ y $\pi(\tilde{\mathcal{B}}_1) \subset \tilde{\mathcal{B}}_2$, donde $\tilde{\mathcal{B}}_i = X_i \cap \mathcal{B}_i := \{X_i \cap B | B \in \mathcal{B}_i\}$ para $i = 1, 2$. Además, π preserva la medida $\tilde{\mu}_2$ y π^{-1} preserva la medida $\tilde{\mu}_1$, donde $\tilde{\mu}_i$ es la restricción de la medida μ_i a la σ-álgebra $\tilde{\mathcal{B}}_i$, $i = 1, 2$.

A continuación presentaremos dos ejemplos básicos de sistemas dinámicos medibles: el desplazamiento de Bernoulli y el desplazamiento de Markov.

Desplazamientos de Bernoulli. Sea $k \geq 2$ un entero fijo y considérese un vector de probabilidad $p = (p_0, p_1 \ldots, p_{k-1})$ con entradas no nulas. Sea $Y = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ y consideremos en Y la σ-álgebra potencia 2^Y, equipándola con la medida de probabilidad dada por $\mathbb{P}(\{y\}) = p_y$ para cada $y \in Y$. Considérese el espacio producto directo $(X, \mathcal{B}, \mu) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} (X_n, \mathcal{B}_n, \mu_n)$, donde $(X_n, \mathcal{B}_n, \mu_n) = (Y, 2^Y, \mathbb{P})$, $n \in \mathbb{Z}$. Defínase $T : X \to X$ como $T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, donde $y_n = x_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Entonces T satisface

$$\mu(T^{-1}(A)) \quad = \quad \mu(A)$$

para todo cilindro $A \in \mathcal{B}$. Un argumento de clases monótonas nos permite demostrar que T preserva medida. Al sistema dinámico medible $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ se le denomina desplazamiento de Bernoulli bilateral con distribución de probabilidad $p = (p_0, p_1 \ldots, p_{k-1})$. Cuando se considera $(X, \mathcal{B}, \mu) = \prod_{n=0}^{\infty} (X_n, \mathcal{B}_n, \mu_n)$ y se define $T : X \to X$ como $T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}) = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, donde $y_n = x_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$ [1], obtenemos el sistema dinámico medible $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, al que se le denomina desplazamiento de Bernoulli unilateral con distribución de probabilidad $p = (p_0, p_1 \ldots, p_{k-1})$.

Definición 2 (Isomorfismo de desplazamientos de Bernoulli) Sean $k, k' \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ y considérense dos desplazamientos de Bernoulli $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ y $(X', \mathcal{B}', \mu', T')$ con distribuciones de probabilidad $(p_0, \ldots, p_{k-1})$ y $(p'_0, \ldots, p'_{k'-1})$, respectivamente. Decimos que $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ es isomorfo a $(X', \mathcal{B}', \mu', T')$ si y sólo si los espacios de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ y $(X', \mathcal{B}', \mu')$ son isormorfos.

[1] $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sea $k \geq 2$ un entero fijo y consideremos el desplazamiento de Bernoulli $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ dado por la distribución de probabilidad $p = (p_0, \ldots, p_{k-1})$. La entropía métrica de dicho desplazamiento está dada por

$$h_T(p) \quad = \quad -\sum_{j=0}^{k-1} p_i \ln(p_i). \tag{1.1}$$

La demostración de la identidad (1.1) puede encontrarse en detalle en la monografía [WA].

En Teoría de Probabilidad, los desplazamientos de Bernoulli corresponden a las sucesiones de variables aleatorias independientes con espacio de estados finito. En Teoría Ergódica, los desplazamientos de Bernoulli son ejemplos importantes de sistemas dinámicos medibles ya que la entropía métrica los caracteriza salvo isomorfismo; es decir, dos desplazamientos de Bernoulli son isormorfos si y sólo si poseen la misma entropía métrica. La afirmación anterior es consecuencia del siguiente célebre teorema de Teoría Ergódica.

Teorema 1 (Kolmogorov-Ornstein) *Sean $k, k' \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ dos enteros fijos y considérense los desplazamientos de Bernoulli $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ y $(X', \mathcal{B}', \mu', T')$ dados por las leyes de probabilidad $p = (p_0, \ldots, p_{k-1})$ y $p' = (p'_0, \ldots, p'_{k'-1})$, respectivamente. Entonces $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ y $(X', \mathcal{B}', \mu', T')$ son isomorfos si y sólo si $h_T(p) = h_{T'}(p')$.*

La condición necesaria del Teorema de Kolmogorov-Ornstein fue demostrada por Kolmogorov en [KO], mientras que la condición de suficiencia fue demostrada por Ornstein en [OR]. La demostración del Teorema de Kolmogorov-Ornstein puede encontrarse en [SH].

Desplazamientos de Markov. Sea $k \geq 2$ un entero fijo y considérese el espacio medible $(Y, 2^Y)$, donde $Y = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Consideremos el espacio producto directo $(X, \mathcal{B}) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} (X_n, \mathcal{B}_n)$, donde $(X_n, \mathcal{B}_n) = (Y, 2^Y)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Sea $T : X \to X$ el desplazamiento definido como $T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, donde $y_n = x_{n+1}$, para toda $n \in \mathbb{Z}$. Enseguida construiremos medidas de probabilidad en $(X, \mathcal{B})$ de tal manera que T preserve dichas medidas. Para cada entero $n \geq 0$ y $(a_0, \ldots, a_n) \in Y^{n+1}$ supongamos que existen números reales $p_n(a_0, \ldots, a_n)$ que satisfacen:

i) $p_n(a_0, \ldots, a_n) \geq 0$.

ii) $\sum_{a_0 \in Y} p_0(a_0) = 1.$

iii) $p_n(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{a_{n+1} \in Y} p_{n+1}(a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}).$

Si definimos una aplicación μ en la semiálgebra de rectángulos como

$$\mu(\{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in X : x_q = a_0, \ldots, x_{q+n} = a_n\}) := p_n(a_0, \ldots, a_n),$$

entonces μ puede ser extendida a una única medida de probabilidad en $(X, \mathcal{B})$. Más aún, T preserva la medida μ ya que por definición la preserva en la semiálgebra de rectángulos, y un argumento de clases monótonas nos permite asegurar que la preserva en la σ-álgebra generada por los rectángulos.

En el caso en que $p_n(a_0, \ldots, a_n) = p_{a_0} \cdots p_{a_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, obtenemos el desplazamiento de Bernoulli bilateral. Sean $k \geq 2$ un entero fijo, $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1})$ una distribución de probabilidad tal que $\lambda_i > 0$ para $i = 0, \ldots, k-1$, y $P = (p_{i,j})_{i,j \in Y}$ una matriz estocástica tal que $\lambda P = P$. Si establecemos

$$p_n(a_0, \ldots, a_n) = \lambda_{a_0} p_{a_0, a_1} \cdots p_{a_{n-1}, a_n},$$

entonces al sistema dinámico medible $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ se le llama desplazamiento bilateral de Markov inducido por (λ, P).

1.2. Particiones medibles y medidas débilmente ψ-mezclantes

Definición 3 (Partición medible) Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio de medida. Decimos que $\mathcal{A} \subset 2^X$ es partición medible de $(X, \mathcal{B})$ si y sólo si satisface lo siguiente:

i) $A \in \mathcal{B}$ para toda $A \in \mathcal{A}$.

ii) $\mathcal{A}$ es partición de X.

Si $|\mathcal{A}| < \infty$, entonces decimos que $\mathcal{A}$ es partición medible finita de $(X, \mathcal{B})$, donde $|\cdot|$ denota la función cardinalidad.

Definición 4 (Partición conjunta) Sean $\mathcal{A}_i = \{A_{i,1}, \ldots, A_{i,k_i}\}$, $i = 1, \ldots, n$, particiones medibles finitas de $(X, \mathcal{B})$. Denotaremos la partición medible finita conjunta de $(X, \mathcal{B})$ como

$$\mathcal{A}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{A}_n = \{A_{1,i_1} \cap \cdots \cap A_{n,i_n} | i_j \in \{1, \ldots, k_j\}, j = 1, \ldots, n\}.$$

En el caso de un espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, \mu)$, decimos que una partición medible finita $\mathcal{A}$ es fina si ningún elemento de $\mathcal{A}$ tiene medida uno.

Definición 5 Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio medible y $T : X \to X$ una transformación medible. Sea $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ una partición medible finita de $(X, \mathcal{B})$. Para cada entero $k \geq 0$ definimos

$$T^{-k}(\mathcal{A}) = \{T^{-k}(A_1), \ldots, T^{-k}(A_n)\},$$

donde T^{-k} representa la función de conjuntos imagen inversa de la función $T^k = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{k\text{–veces}}$ y $T^0 = \mathrm{Id}_X$.

Definición 6 (n-cilindros) Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio de medida, $T : X \to X$ una transformación medible y $\mathcal{A}$ una partición medible finita de $(X, \mathcal{B})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos $\mathcal{A}^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{A}^\infty = \bigvee_{j=0}^{\infty} T^{-j}(\mathcal{A})$, las cuales son particiones medibles de $(X, \mathcal{B})$. A los elementos de $\mathcal{A}^n$ los llamaremos n-cilindros.

Definición 7 (Generador) Sea $\mathcal{A}$ una partición medible finita de $(X, \mathcal{B})$. Decimos que $\mathcal{A}$ es generadora cuando los elementos de $\mathcal{A}^\infty$ son conjuntos constituidos por un sólo elemento de X.

Para una revisión profunda sobre generadores consultar [RO].

Definición 8 (Función de entropía de Rényi) Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible. Para cada $t > 0$ y para cada partición medible finita $\mathcal{A}$ de $(X, \mathcal{B})$, definimos la función de entropía de Rényi como

$$R_{\mathcal{A}}(t) := \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{tn} |\ln (Z_n(t))|,$$

donde $Z_n(t) = \sum\limits_{A_n \in \mathcal{A}^n} (\mu(A_n))^{1+t}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Hasta ahora sólo en unos pocos casos se ha podido demostrar la existencia de la función entropía de Rényi, tales como medidas de Bernoulli, medidas de Markov, medidas de Gibbs con potenciales Hölder continuos. Luczak y Szpankowsky [LS] demostraron la existencia de la función entropía de Rényi para una clase de medidas llamadas ψ-mezclantes. Haydn y Vaienti [LS] demostraron la existencia de la función de entropía de Rényi para una clase más amplia de medidas llamadas débilmente ψ-mezclantes, las cuales definimos a continuación.

Definición 9 (Medidas débilmente ψ-mezclantes) Sean $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible y $\mathcal{A}$ una partición medible finita de $(X, \mathcal{B})$. Decimos que μ es débilmente ψ-mezclante respecto a $\mathcal{A}$ si existe $\Delta \in \mathbb{N}$ y funciones $\psi^-, \psi^+ : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ tales que:

a) $\psi^-(r) < 1$ para toda $r \geq \Delta$.

b) Para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$1 - \psi^-(k) \leq \frac{\mu\left(U \cap T^{-n-k}(V)\right)}{\mu(U)\mu(V)} \leq 1 + \psi^+(k),$$

para toda $U \in \sigma(\mathcal{A}^n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$, y para toda $V \in \sigma(\mathcal{A}^*)$, donde $\mathcal{A}^* = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}^j$ y $\sigma(\mathcal{A}^n)$ denota la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 10 (Ergodicidad) Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible. Decimos que la medida μ es ergódica con respecto a la transformación T si todos los elementos $B \in \mathcal{B}$ tales que $T^{-1}(B) = B$ satisfacen $\mu(B) \in \{0, 1\}$.

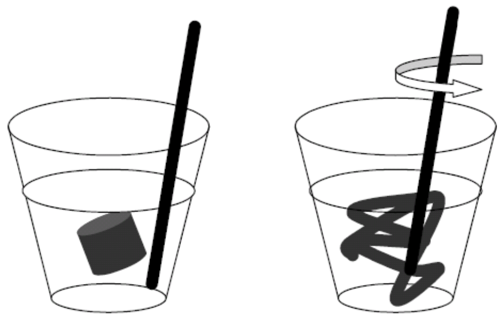
Interpretación 1 Ergodicidad: La propiedad de que un sistema dinámico físico sea ergódico o no es muy importante desde el punto de vista de la Física. Consideremos el movimiento de un gas ideal en un región cerrada [SZ]; por ejemplo, en el cubo C. Sea T el flujo que describe el movimiento de un gas en C. Sea $x \in C \times \cdots \times C$ una posición de todas las moléculas en C, y $v \in \mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3$ la velocidad del sistema. Medimos la presión P en los tiempos $n = 0, 1, \ldots$ y obtenemos la sucesión de presiones $\{P(T^n(x, v))\}_{n \geq 0}$. Consideramos la media aritmética

$$S_n(P, x) \;:=\; \frac{1}{n}\left(P(T^0(x, v)) + \cdots + P(T^{n-1}(x, v))\right).$$

Decimos que $S_n(P, x)$ es la presión del gas en C, o que se aproxima a la presión si n en grande. Si el sistema no es ergódico, la presión P sería dependiente de x y v; es decir, el resultado de la medida sería dependiente de las condiciones iniciales. Lo cual nos diría que dos copias de C en las misma condiciones físicas podrían darnos dos resultados diferentes, lo cual sería un absurdo físico. Esta es la razón por la que es importante saber si un sistema dinámico medible es ergódico o no. Boltzman al ir creando la Teoría Molecular de los Gases encontró este problema en el caso del movimiento de un gas en una región cerrada. No pudo resolver el problema. Incluso supuso que cada trayectoria pasaba por todo punto del espacio fase, lo cual es absurdo. El problema de decidir si el sistema de un gas en un región cerrada es ergódico estuvo abierto hasta 1963 que G. Sinai mostró que dicho sistema es ergódico.

Mezcla: El siguiente ejemplo fue usado por Gibbs para introducir el concepto de mezcla en la Teoría Ergódica. Supongamos que tenemos un vaso con agua. Luego, le añadimos una dosis de Whisky. Sean C la región total que ocupa el cocktail (agua y Whisky) y S el región que ocupa la dosis de Whisky. Entonces la concentración de Whisky en el vaso es $vol(S)/vol(C)$. Luego, se procede a revolver el Whisky con el agua. Matemáticamente, revolver es representado por una transformación T que se interpreta como el tiempo de evolución y significa que $T(S)$ es la región ocupada por el Whisky después de mezclar (revolver) una unidad de tiempo y así sucesivamente.

Intuitivamente decimos que el cocktail está bien mezclado, si la concentración de Whisky es igual a $vol(S)/vol(C)$ no solo con respecto a todo el volumen



del fluido, sino también respecto a cualquier región V del fluido con volumen positivo. Consecuentemente, el cocktail esta bien mezclado al tiempo $n \in \mathbb{N}$ si

$$\frac{vol(T^n(V) \cap S)}{vol(V)} = \frac{vol(S)}{vol(C)},$$

para cualquier región de V de volumen positivo. Sin pérdida de generalidad supongamos que $vol(C) = 1$. Si suponemos que se revuelve el cocktail mucho tiempo, una definición natural de mezcla sería

$$\lim_{n\to\infty} \frac{vol(T^n(V) \cap S)}{vol(V)} = vol(S),$$

para toda región V de volumen positivo. La definición 9 nos indica la velocidad a la cual se mezcla el sistema y esta determinada por las funciones $1 - \psi^-$ y $1 + \psi^+$.

Definición 11 (Medidas no atómicas) Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Decimos que $B \in \mathcal{B}$ es un átomo de μ cuando $0 < \mu(B) < \infty$ y para cada $A \subset B$ con $A \in \mathcal{B}$ se satisface que $\mu(A) \in \{0, \mu(B)\}$. Una medida que no posee átomos se llama no atómica.

Definición 12 (Función subexponencial) Una función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ se dice subexponencial si satisface

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \left|\ln\left(f(k)\right)\right| = 0.$$

Las medidas ψ-mezclantes se obtienen como un caso especial de las medidas débilmente ψ-mezclantes, tomando $\psi^-(k) = \psi^+(k) = \psi(k)$ para toda $k \in \mathbb{N}$, y pidiendo que $\psi(k) \downarrow 0$ cuando $k \to \infty$. Además, en las medidas ψ-mezclantes se satisface que μ es no atómica.

Definición 13 (Tasa de decaimiento subexponencial del máximo de la medida de los n-cilindros) Sean $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible y $\mathcal{A}$ una partición medible finita de $(X, \mathcal{B})$. Definimos la tasa de decaimiento subexponencial del máximo de las medidas de los n-cilindros como

$$\gamma_\mu = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\ln(b_n)|,$$

donde $b_n = \max_{A_n \in \mathcal{A}^n} \mu(A_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

1.3. Entropía métrica

Definición 14 Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio de medida. Decimos que $\mathcal{C}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{B}$ si satisface que

i) $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X.

ii) $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$.

Si $|\mathcal{C}| < \infty$, decimos que $\mathcal{C}$ es una sub-σ-álgebra finita de $\mathcal{B}$, donde como antes, $|\cdot|$ denota la función cardinalidad.

Observación 1 Si $(X, \mathcal{B})$ es un espacio medible y $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ una partición medible finita de $(X, \mathcal{B})$, entonces $\sigma(\mathcal{A})$ es la colección de todos los elementos de $\mathcal{B}$ que son unión finita de elementos de $\mathcal{A}$. Luego $\sigma(\mathcal{A})$ es una sub-σ-álgebra finita de $\mathcal{B}$. Recíprocamente, si $\mathcal{C}$ es una sub-σ-álgebra finita de $\mathcal{B}$, digamos $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$, entonces los conjuntos no vacíos de la forma $B_1 \cap \cdots \cap B_n$, donde $B_i \in \{C_i, X \setminus C_i\}$, para $i = 1, \ldots, n$, forman una partición medible finita de $(X, \mathcal{B})$, la cual denotaremos por $\wp(\mathcal{C})$. Consecuentemente, tenemos una correspondencia entre particiones medibles finitas y sub-σ-álgebras finitas.

Definición 15 Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos sub-σ-álgebras de $\mathcal{B}$. Decimos que $\mathcal{D}$ refina a $\mathcal{C}$, lo cual denotamos por $\mathcal{C} \prec \mathcal{D}$, si para cada $C \in \mathcal{C}$ existe $D \in \mathcal{D}$ tal que

$$\mu(C \triangle D) = 0,$$

donde $\triangle$ representa la diferencia simétrica de conjuntos. Si $\mathcal{C} \prec \mathcal{D}$ y $\mathcal{D} \prec \mathcal{C}$, entonces escribimos $\mathcal{C} \doteq \mathcal{D}$.

Definición 16 (Entropía de una sub-σ-álgebra finita) Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{A}$ una sub-σ-álgebra finita de $\mathcal{B}$. Sea $\wp(\mathcal{A}) = \{A_1, \ldots, A_n\}$ la partición medible finita asociada a $\mathcal{A}$. Definimos la entropía de la partición finita $\wp(A)$ como

$$H(\mathcal{A}) := -\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \ln(\mu(A_i)),$$

tomando como convención $0 \ln(0) = 0$. La entropía $H(\mathcal{A})$ de la partición finita $\wp(A)$ comúnmente en la literatura se le llama entropía de la sub-σ-álgebra finita $\mathcal{A}$.

Definición 17 (Entropía de una transformación respecto a una sub-σ-álgebra finita) Sean $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible y $\mathcal{A}$ una sub-σ-álgebra finita de $\mathcal{B}$. Definimos la entropía de la transformación T con respecto a $\mathcal{A}$ como

$$h(T, \mathcal{A}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{A})\right).$$

Bajo las hipótesis de la Definición 17, se puede demostrar que $h(T, \mathcal{A})$ siempre existe. Para detalles de la demostración consultar la monografía [WA].

Definición 18 (Entropía métrica de una transformación)
Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible. Definimos la entropía métrica de la transformación T como

$$h_T(\mu) \ := \ \sup\{h(T, \mathcal{A}) | \mathcal{A} \text{ es sub-}\sigma\text{-álgebra finita de } \mathcal{B}\}.$$

Interpretación 2 La cantidad $H(\mathcal{A})$ puede ser interpretada como una medida de incertidumbre de un experimento con posibles resultados $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Si T representa la evolución de un día de tiempo, entonces $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{A})$ representa el experimento de combinar el experimento original $\mathcal{A}$ y de los siguientes $n-1$ días. Por consiguiente, $h(T, \mathcal{A})$ puede ser interpretado como la información promedio por día que uno obtiene al evolucionar el experimento original. Consecuentemente, $h_T(\mu)$ puede ser interpretado como la información promedio máxima por día que se puede obtener al repetir el experimento diariamente.

El cálculo de entropías suele ser un problema muy complicado. En el 2002, John Milnor plantea la siguiente pregunta en [MI]. ¿Es la entropía realmente calculable? Dicho problema aún continua abierto. Enseguida enunciaremos algunos teoremas célebres pertenecientes a la Teoría de Entropías que nos permiten realizar cálculos de entropías métricas bajo ciertas condiciones.

Teorema 2 (Kolmogorov-Sinai) *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible. Si $\mathcal{A}$ es un sub-σ-álgebra finita de $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{A}^\infty \doteq \mathcal{B}$, entonces*

$$h_T(\mu) \ = \ h(T, \mathcal{A}).$$

La demostración del Teorema de Kolmogorov-Sinai se encuentra realizada en detalle en las monografías [PE] y [WA].

Teorema 3 (Shannon-McMillan-Breiman) *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible. Supongamos que la medida μ es ergódica respecto a la transformación T. Sean $\mathcal{A}$ una partición finita generadora de $\mathcal{B}$ y $A_n(x)$ el único n-cilindro de $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{A})$ que contiene al punto $x \in X$. Entonces μ-casi donde quiera y en $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$,*

$$-\frac{1}{n} \ln(\mu(A_n(x))) \to h_T(\mu)$$

cuando $n \to \infty$.

La demostración del Teorema de Shannon-McMillan-Breiman se encuentra realizada en la monografía de [PA].

Observación 2 Suponiendo las hipótesis del Teorema de Shannon-McMillan-Breiman, se cumple que μ-casi donde quiera, $-\frac{1}{n}\ln(\mu(A_n(x))) \to h_T(\mu)$ cuando $n \to \infty$. Consecuentemente, del Teorema de Egorov se sigue que para cada $\epsilon \in]0,1[$ existe $X_\epsilon \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(X_\epsilon) \in [1-\epsilon, 1]$ y $-\frac{1}{n}\ln(\mu(A_n(x))) \to h_T(\mu)$ cuando $n \to \infty$, uniformemente para $x \in X_\epsilon$.

Capítulo 2

La función de entropía de Rényi

2.1. Teorema de existencia y propiedades analíticas

En este capítulo, primero se enunciará el Teorema de existencia y propiedades analíticas de la función de entropía de Rényi, el cual nos garantiza bajo ciertas hipótesis la existencia de la función de entropía de Rényi para sistemas dinámicos medibles ψ-mezclantes. Más aún, dicho teorema nos asegura la continuidad de la función de entropía de Rényi, el comportamiento de dicha función en el cero y en el infinito. Luego, se realizan cálculos de entropías de Rényi para desplazamientos de Bernoulli y desplazamientos de Markov verificando algunas propiedades que se afirman en el Teorema de existencia y propiedades analíticas. Finalmente, se procede a la demostración del Teorema de existencia y propiedades analíticas. Para demostrar dicho teorema se demuestran tres lemas, mismos que serán de gran utilidad para establecer un relación de subaditividad, la cual nos permitirá demostrar la existencia de la función de entropía de Rényi, y también que el límite que define a la función de entropía de Rényi converge uniforme en compactos de $\mathbb{R}^+$.

Teorema principal 1 (Existencia y propiedades analíticas de la función de entropía de Rényi para medidas débilmente ψ-mezclantes) *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible con μ no atómica. Sean $\mathcal{A}$ una partición medible, finita, fina y generadora de $(X, \mathcal{B})$, y μ una medida débilmente ψ-mezclante con respecto a $\mathcal{A}$ tal que $1 - \psi^-$ y $1 + \psi^+$ son funciones subexponenciales. Entonces se verifica lo siguiente:*

i) *Para toda* $t > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{tn} |\ln(Z_n(t))|$, *donde* $Z_n(t) = \sum\limits_{A_n \in \mathcal{A}^n} (\mu(A_n))^{1+t}$, *existe y converge uniformemente en compactos de* $\mathbb{R}^+$. *Consecuentemente la función de entropía de Rényi respecto a la partición medible* $\mathcal{A}$, $R_{\mathcal{A}}(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{tn} |\ln(Z_n(t))|$, *existe para toda* $t > 0$.

ii) *La función* $W :]0,\infty[\to]0,\infty[$, *definida por*

$$t \longmapsto tR_{\mathcal{A}}(t),$$

es localmente Lipschitz continua.

iii) *Se cumple*

$$R_{\mathcal{A}}(0) := \lim_{t\to 0^+} R_{\mathcal{A}}(t) = h_T(\mu),$$

donde $h_T(\mu)$ *representa la entropía métrica de la transformación* T.

iv) *La función* $R_{\mathcal{A}}$ *es monótona decreciente en* $]0,\infty[$ *y satisface*

$$\lim_{t\to\infty} R_{\mathcal{A}}(t) = \gamma_\mu,$$

donde $\gamma_\mu > 0$ *representa la tasa de decaimiento subexponencial del máximo de las medidas de los* n*-cilindros.*

2.2. Cálculo de la función de entropía de Rényi

2.2.1. Desplazamientos de Bernoulli

Sea $k \geq 2$ un entero fijo y considérese el desplazamiento de Bernoulli $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ dado por la distribución de probabilidad $(p_0, \ldots, p_{k-1})$, donde $p_i > 0$, para $i = 0, \ldots, k-1$. Entonces $\mathcal{A} = \{C_0^j : j \in \{0, \ldots, k-1\}\}$ es una partición medible, finita y fina de 1-cilindros de $(X, \mathcal{B})$, donde

$$C_0^j = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X : x_0 = j\}, \ j = 0, \ldots, k-1. \tag{2.1}$$

Obsérvese que para cada $n \in \mathbb{N}$, $T^{-n}(\mathcal{A}) = \{C_{-n}^j | j \in \{0, \ldots, k-1\}\}$, donde $C_{-n}^j = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X : x_{-n} = j\}$ para $j = 0, \ldots, k-1$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\begin{aligned} Z_n(t) &= \sum_{A_n \in \mathcal{A}^n} (\mu(A_n))^{1+t} \\ &= \sum_{i_0=0}^{k-1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{k-1} (p_{i_0} \cdots p_{i_{n-1}})^{1+t} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{k-1} p_i^{1+t} \right)^n . \end{aligned}$$

Por consiguiente, para cada $t > 0$,

$$R_{\mathcal{A}}(t) = -\frac{1}{t} \ln \left(\sum_{i=0}^{k-1} p_i^{1+t} \right)$$

y $\lim\limits_{t\to 0^+} R_{\mathcal{A}}(t) = -\sum\limits_{i=0}^{k-1} p_i \ln(p_i) = h_T(\mu)$. Nótese que $\lim\limits_{t\to\infty} R_{\mathcal{A}}(t) = \gamma_p$, donde $\gamma_p = -\ln \left(\max\limits_{0\leq j\leq k-1} p_j \right)$.

2.2.2. Desplazamientos de Markov

Sea $k \geq 2$ un entero y $Y = \{0, \ldots, k-1\}$. Sea $P = (p_{i,j})_{i,j\in Y}$ una matriz estocástisca con entradas positivas e irreducible, y sea $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1})$ una distribución de probabilidad tal que $\lambda_i > 0$ para toda $i \in Y$, y cumple $\lambda P = \lambda$. Considérese el desplazamiento de Markov $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ inducido por (λ, P).

Sea $\mathcal{A} = \{C_0^j | j \in Y\}$ la partición medible, finita y fina de 1-cilindros de $(X, \mathcal{B})$ dada por (2.1). De nuevo, observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $T^{-n}(\mathcal{A}) = \{C_{-n}^j | j \in Y\}$. Consecuentemente, los elementos de $\mathcal{A}^n$ son los cilindros

$$\{C_{-(n-1),\ldots,0}^{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1}} | \alpha_j \in Y, \ \forall j \in \{0, \ldots, n-1\}\},$$

donde

$$C_{-(n-1),\ldots,0}^{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1}} = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : x_{-(n-1)} = \alpha_0, \ldots, x_0 = \alpha_{n-1}\},$$

y poseen medida μ dada por

$$\mu(C_{-(n-1),\ldots,0}^{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1}}) = \lambda_{\alpha_0} p_{\alpha_0,\alpha_1} \cdots p_{\alpha_{n-2},\alpha_{n-1}}.$$

Por lo cual, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} Z_n(t) &= \sum_{\alpha_0 \in Y} \cdots \sum_{\alpha_{n-1} \in Y} \lambda_{\alpha_0}^{1+t} p_{\alpha_0,\alpha_1}^{1+t} \cdots p_{\alpha_{n-2},\alpha_{n-1}}^{1+t} \\ &= \sum_{\alpha_0 \in Y} \lambda_{\alpha_0}^{1+t} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1} \in Y} p_{\alpha_0,\alpha_1}^{1+t} \cdots p_{\alpha_{n-2},\alpha_{n-1}}^{1+t}. \end{aligned}$$

Para cada $t \geq 0$ defínase la matriz $P(t) = (P_{i,j}(t))_{i,j\in Y}$ como $P_{i,j}(t) = p_{i,j}^{1+t}$ para toda $i, j \in Y$. Dado que todas las entradas de la matriz $P(t)$ son positivas, debido al Teorema de Perron-Frobenius se tiene que existe un valor propio simple positivo λ_t, el cual es mayor que el módulo de cualquier otro valor propio de $P(t)$ y tiene asociados sendos vectores propios izquierdo l_t y derecho d_t, con normas euclidianas unitarias, cuyas componentes son positivas y satisfacen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P^n(t)}{\lambda_t^n} = \frac{r_t l_t}{l_t r_t}, \tag{2.2}$$

donde $P^n(t) = \underbrace{P(t) \cdots P(t)}_{n \text{ veces}}$. Además, λ_t cumple

$$\min_{i\in Y} \sum_{j\in Y} P_{i,j}(t) \leq \lambda_t \leq \max_{i\in Y} \sum_{j\in Y} P_{i,j}(t). \tag{2.3}$$

Una demostración del Teorema de Perron-Frobenius puede encontrarse en la monografía [SE]. Otra demostración basada en la Teoría de Sistemas Dinámicos se encuentra en la monografía [KH].

Consideremos los vectores de dimensión k dados por

$$\begin{aligned} p(t) &= (\lambda_0^{1+t}, \ldots, \lambda_{k-1}^{1+t}), \\ \vec{1}_k &= (1, \ldots, 1)^T. \end{aligned}$$

Obsérvese que para todo entero $n \geq 3$ y $t > 0$ se satisface

$$Z_n(t) = p(t) P^{n-2}(t) \vec{1}_k.$$

Luego,

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{A}}(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nt} |\ln(Z_n(t))| \\ &= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nt} \ln\left(p(t) P^{n-2}(t) \vec{1}_k\right) \\ &= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nt} \ln\left(p(t) \lambda_t^{n-2} P^{n-2}(t) \vec{1}_k\right) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nt} \ln(\lambda_t^{n-2}) \\ &= -\frac{1}{t} \ln(\lambda_t), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene por (2.2) y λ_t satisface $0 < \lambda_t < 1$ debido a (2.3). Por lo tanto, $R_{\mathcal{A}}(t) = -\frac{1}{t}\ln(\lambda_t)$ para toda $t > 0$. También, se obtiene

$$\lim_{t\to 0^+} R_{\mathcal{A}}(t) = -\sum_{i,j\in Y} \lambda_i p_{i,j} \ln(p_{i,j}) = h_T(\mu).$$

2.3. Demostración del Teorema de existencia y propiedades analíticas

Para demostrar el inciso *i*) del Teorema 1 demostraremos primero dos lemas acerca de medidas débilmente ψ-mezclantes que nos serán de gran utilidad.

Lema 1 *Sean $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible, $\mathcal{A}$ una partición medible finita de $(X, \mathcal{B})$ y $k \in \mathbb{N}$. Sean $n_j \in \mathbb{N}$ y $B_j \in \sigma(\mathcal{A}^{n_j})$ para $j = 1, \ldots, k$. Si μ es una medida débilmente ψ-mezclante con respecto a $\mathcal{A}$, entonces para $\Delta \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se satisface*

$$(1 - \psi^-(\Delta))^{k-1} \prod_{j=1}^{k} \mu(B_j) \leq \mu(D_1) \leq (1 + \psi^+(\Delta))^{k-1} \prod_{j=1}^{k} \mu(B_j), \qquad (2.4)$$

donde $D_1 = \bigcap_{j=1}^{k} T^{-N_j}(B_j)$, $N_j = n_1 + \cdots + n_{j-1} + (j-1)\Delta$ para $j \in \mathbb{N}$, con $N_0 = n_0 = 0$.

Demostración 1 Sea $k \in \mathbb{N}$. Para $l \in \{1, \ldots, k\}$ definamos

$$D_l = \bigcap_{j=l}^{k} T^{-(N_j - N_l)}(B_j).$$

Obsérvese que $D_1 = \bigcap_{j=1}^{k} T^{-N_j}(B_j)$ y $D_k = B_k$. Enseguida probaremos que para toda $\Delta \in \mathbb{N}$ se cumple

$$D_l = B_l \cap T^{-n_l - \Delta}(D_{l+1}), \text{ para } l = 1, \ldots, k-1. \qquad (2.5)$$

En efecto, fijemos $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ y nótese que

$$\begin{aligned} T^{-(n_l+\Delta)}(D_{l+1}) &= T^{-(n_l+\Delta)} \left(\bigcap_{j=l+1}^{k} T^{-(N_j - N_{l+1})}(B_j) \right) \\ &= \bigcap_{j=l+1}^{k} T^{-(N_j - N_{l+1} + n_l + \Delta)}(B_j) \\ &= \bigcap_{j=l+1}^{k} T^{-(N_j - N_l)}(B_j), \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$B_l \cap T^{-n_l-\Delta}(D_{l+1}) = \bigcap_{j=l}^{k} T^{-(N_j-N_l)}(B_j) = D_l.$$

Tomemos $U = B_l \in \sigma(\mathcal{A}^{n_l})$ y $V = D_{l+1} \in \sigma\left(\bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{A}^{n_j}\right) \subset \sigma(\mathcal{A}^*)$. Utilizando la identidad de conjuntos (2.5), y la hipótesis de que la medida μ es débilmente ψ-mezclante, se sigue que para Δ suficientemente grande, tal que $1 - \psi^-(\Delta) > 0$, se satisface

$$(1-\psi^-(\Delta))\mu(B_l)\mu(D_{l+1}) \leq \mu(D_l) \leq (1+\psi^+(\Delta))\mu(B_l)\mu(D_{l+1}),$$

para $l = 1, \ldots, k-1$. Consecuentemente, de las $k-1$ desigualdades anteriores, del hecho de que $D_1 = \bigcap_{j=1}^{k} T^{-N_j}(B_j)$ y $D_l = B_k$, se obtiene

$$(1-\psi^-(\Delta))^{k-1}\prod_{j=1}^{k}\mu(B_j) \leq \mu(D_1) \leq (1+\psi^+(\Delta))^{k-1}\prod_{j=1}^{k}\mu(B_j),$$

con lo cual concluimos el la demostración del lema.

Lema 2 *Sean $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible con μ no atómica, y $\mathcal{A}$ una partición medible finita, fina y generadora de $(X, \mathcal{B})$. Si μ es débilmente ψ-mezclante con respecto a $\mathcal{A}$, entonces existe una constante $\eta \in]0,1[$ tal que $\mu(A_n) \leq \eta^n$ para toda $A_n \in \mathcal{A}^n$ y para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración 2 Sean $\Delta \in \mathbb{N}$ fijo. Dado que $\mathcal{A}$ es generadora y μ es no atómica, entonces podemos escoger $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $b_m = \max_{A_m \in \mathcal{A}^m} \mu(A_m) < \frac{1}{2}\left(1+\psi^+(\Delta)\right)^{-1}$; esto es posible debido a que $b_m \downarrow 0$ cuando $m \to \infty$. Escogemos n suficientemente grande y $A_n \in \mathcal{A}^n$ de tal manera que

$$T^{-(k-1)m'}(A_n) \subset \bigcap_{j=0}^{k-1} T^{-(k-1)m'}\left(A_m T^{jm'} A_n\right), \tag{2.6}$$

donde $k = \lceil {}^{n}/_{m'} \rceil$, $m' = m + \Delta$ y $A_m T^{jm'} A_n$ es el m-cilindro que contiene a $T^{jm'} A_n$ para $j = 0, \dots, k-1$. Usando (2.6), la hipótesis de que la medida μ es T invariante y el Lema 1, obtenemos que para n suficientemente grande

$$\begin{aligned}
\mu(A_n) &= \mu\left(T^{-(k-1)m'}(A_n)\right) \\
&\leq \mu\left(\bigcap_{j=0}^{k-1} T^{-(k-1)m'}\left(A_m T^{jm'} A_n\right)\right) \\
&\leq \left(1 + \psi^+(\Delta)\right)^{k-1} \prod_{j=0}^{k-1} \mu\left(A_m T^{jm'} A_n\right) \\
&\leq \left(1 + \psi^+(\Delta)\right)^{k} b_m^k \\
&\leq 2^{-k}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, tomando $0 < \max\{2^{-1/m'}, b_1^{1/n}, \dots, b_{n-1}^{1/n}\} \leq \eta < 1$ obtenemos el resultado.

Observación 3 Bajo las hipótesis del Lema 2 se tiene que $h_T(\mu) > 0$. En efecto, obsérvese

$$\begin{aligned}
h(T, \mathcal{A}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\mathcal{A})\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{A_n \in \mathcal{A}^n} \mu(A_n) |\ln(\mu(A_n))| \\
&\geq |\ln(\eta)| > 0,
\end{aligned}$$

donde la η es la constante obtenida en el Lema 2. Dado que $\mathcal{A}$ es generadora, entonces por el Teorema de Kolmogorov-Sinai se tiene que

$$h_T(\mu) = h(T, \mathcal{A}), \tag{2.7}$$

y por consiguiente $h_T(\mu) > 0$.

Lema 3 *Sean $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible y $\mathcal{A}$ una partición medible finita y fina de $(X, \mathcal{B})$. Si μ es débilmente ψ-mezclante con respecto a $\mathcal{A}$, entonces existe una constante $\lambda \in]0, 1[$ tal que para $\Delta \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se verifica $\mu(A_n) \geq (1 - \psi^-(\Delta))^{n-1} \lambda^n$ para toda $A_n \in \mathcal{A}^n$ y para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración 3 Denotemos $\mathcal{A} = \{A^1, \ldots, A^m\}$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \in \mathcal{A}^n$. Obsérvese que podemos escribir

$$A_n = A^{j_0} \cap T^{-1}(A^{j_1}) \cap \ldots \cap T^{-(n-1)}(A^{j_{n-1}}),$$

donde $A^{j_l} \in \mathcal{A}$ para toda $l \in \{0, \ldots, n-1\}$. Luego, escribiendo $A_n = A^{j_0} \cap T^{-1}(A^{j_1} \cap \ldots \cap T^{-(n-2)}(A^{j_{n-1}}))$ y usando el Lema 1, obtenemos que para $\Delta \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \mu(A_n) &\geq (1 - \psi^-(\Delta))\mu(A^{j^0})\mu(T^{-1}(A^{j_1} \cap \ldots \cap T^{-(n-2)}(A^{j_{n-1}}))) \\ &= (1 - \psi^-(\Delta))\mu(A^{j_0})\mu(A^{j_1} \cap \ldots \cap T^{-(n-2)}(A^{j_{n-1}})), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene del hecho de que μ es T invariante. Un argumento inductivo nos muestra que

$$\mu(A_n) \geq (1 - \psi^-(\Delta))^{n-1}\mu(A^{j_0})\mu(A^{j_1}) \cdots \mu(A^{j_{n-1}})$$

para Δ suficientemente grande. Tomando $\lambda = \min_{A \in \mathcal{A}} \mu(A)$, y usando la hipótesis de que $\mathcal{A}$ es partición medible, finita y fina se tiene que $\lambda \in]0, 1[$ y consecuentemente obtenemos el resultado.

Observación 4 Como consecuencia del Lema 3, se obtiene que todo n-cilindro, A_n, posee medida μ positiva para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración 4 (Demostración del Teorema principal 1)
En los incisos $i)$ y $ii)$ de la siguiente demostración definiremos la clase $\mathcal{G}_n^\beta$ para algún $\beta > 1$, la cual nos será suficiente para estimar la medida μ de los n-cilindros y obtener cotas muy finas de esta medida μ. A partir de esta estimación y con ayuda del Lema 1 obtendremos un comportamiento subaditivo para la sucesión que define al límite inferior de la función de entropía de Rényi y usando un argumento usual de Teoría de Entropías obtendremos la existencia de la función de entropía de Rényi. Nuevamente, esta clase con ayuda del Lema 1 nos será suficiente para demostrar que la función $t \mapsto tR_{\mathcal{A}}(t)$ es localmente Lipschitz continua.

i) Para demostrar que el límite $R_{\mathcal{A}}(t)$ existe para cada $t > 0$, demostraremos que para cada $t > 0$ fijo, la sucesión definida por $a_n(t) = |\ln(Z_n(t))|$ cumple una propiedad de subaditividad expresada en las desigualdades (2.9) y (2.12) de abajo. A partir de esto un argumento usual de Teoría de Entropías nos asegurará que dicho límite existe y que la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{R}^+$.

Sean $m, n, \Delta \in \mathbb{N}$. Considérense $m' = m + \Delta$ y $k \in \mathbb{N}$ de tal modo que $n = km' - \Delta$. No siempre es posible escoger $k \in \mathbb{N}$ de modo que $n = km' - \Delta$, pero por el algoritmo de la división de Euclides se tiene que $n = km' - \Delta + r$, donde $r \in \{\Delta, \ldots, m + 2\Delta - 1\}$, el cual contribuye con un término $|\ln(Z_r(t))|$ al lado derecho de la desigualdad (2.9) y al lado izquierdo de la desigualdad (2.12). Debido a que dicho término satisface $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\ln(Z_r(t))|}{n} = 0$, es suficiente considerar únicamente el caso cuando $n = km' - \Delta$.

Definimos $\tilde{\mathcal{A}}^n = \bigvee\limits_{j=0}^{k-1} T^{-jm'}(\mathcal{A}^m)$. Obsérvese que todo elemento $\tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{A}}^n$ se representa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n \quad = \quad & \left(T^{-0}\left(A^{i_0^0}\right) \cap \cdots \cap T^{-(m-1)}\left(A^{i_{m-1}^0}\right)\right) \cap \\ & \left(T^{-(m+\Delta)}\left(A^{i_0^1}\right) \cap \cdots \cap T^{-(m+\Delta+m-1)}\left(A^{i_{m-1}^1}\right)\right) \cap \\ & \vdots \\ & \left(T^{-((k-1)(m+\Delta))}\left(A^{i_0^{k-1}}\right) \cap \cdots \cap T^{-((k-1)(m+\Delta)+m-1)}\left(A^{i_{m-1}^{k-1}}\right)\right), \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde $A^{i_s^r} \in \mathcal{A}$ para toda $r \in \{0, 1, \ldots k-1\}$ y $s \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. La clase $\tilde{\mathcal{A}}^n$ la podemos describir de la siguiente manera:

i) Se consideran primero la preimágenes de elementos de $\mathcal{A}$ bajo las transformaciones

$$T^0 = Id_X, T^1, \ldots, T^{m-1}.$$

ii) Luego, se omiten las preimágenes de elementos de $\mathcal{A}$ bajo las transformaciones

$$T^m, T^{m+1}, \ldots, T^{m+\Delta-1}.$$

iii) Después se consideran las preimágenes de elementos de $\mathcal{A}$ bajo la transformaciones

$$T^{m+\Delta}, T^{m+\Delta+1}, \ldots, T^{m+\Delta+m-1}.$$

iv) Nuevamente, se omiten las preimágenes de $\mathcal{A}$ bajo las transformaciones
$$T^{m+\Delta+m}, T^{m+\Delta+m+1}, \ldots, T^{m+\Delta+m+\Delta-1}.$$

El algoritmo anterior continúa hasta llegar a las preimágenes de $\mathcal{A}$ bajo las transformaciones

$$T^{(k-1)(m+\Delta)}, T^{(k-1)(m+\Delta)+1}, \ldots, T^{(k-1)(m+\Delta)+m-1}.$$

Notemos que del hecho de que $\mathcal{A}$ es partición y debido a la representación de $\tilde{A}_n$ discutida arriba, se obtiene

$$\tilde{A}_n = \bigcup_{A'_n \subset \tilde{A}_n,\ A'_n \in \mathcal{A}^n} A'_n.$$

Obsérvese que no es posible tomar directamente $A'_n = \tilde{A}_n$, salvo en casos muy particulares de la transformación T. Nuevamente, debido a la representación de $\tilde{A}_n$ se obtiene

$$|\{A'_n \in \mathcal{A}^n : A'_n \subset \tilde{A}_n\}| \leq |\mathcal{A}|^{k\Delta}.$$

Consideremos $\beta > 1$ y defínase,

$$\mathcal{G}_n^\beta = \left\{ A_n \in \mathcal{A}^n : \mu(A_n) \geq e^{-k\Delta^\beta} \mu(\tilde{A}_n) \right\}.$$

Luego, para toda $\tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{A}}^n$ se tiene

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{A'_n \subset \tilde{A}_n,\ A'_n \in \mathcal{G}_n^\beta} A'_n \right) &= \mu\left(\tilde{A}_n\right) - \mu\left(\bigcup_{A'_n \subset \tilde{A}_n,\ A'_n \notin \mathcal{G}_n^\beta} A'_n \right) \\
&\geq \mu\left(\tilde{A}_n\right) - \sum_{A'_n \subset \tilde{A}_n,\ A'_n \notin \mathcal{G}_n^\beta} \mu(A'_n) \\
&> \mu\left(\tilde{A}_n\right) - e^{-k\Delta^\beta} \mu(\tilde{A}_n) |\mathcal{G}_n^*| \\
&\geq \left(1 - |\mathcal{A}|^{k\Delta} e^{-k\Delta^\beta}\right) \mu(\tilde{A}_n),
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{G}_n^* = \{A_n \in \mathcal{A}^n : A'_n \subset \tilde{A}_n,\ A'_n \notin \mathcal{G}_n^\beta\}$. Escogiendo β suficientemente grande tal que $|\mathcal{A}|^\Delta e^{-\Delta^\beta} < 1$, se tiene que para cada $\tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{A}}^n$

existe $A'_n \subset \tilde{A}_n$ con $A'_n \in \mathcal{G}_n^\beta$. Además, se satisface que si $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n \in \tilde{\mathcal{A}}^n$ y $\tilde{A}_n \neq \tilde{B}_n$, entonces existen $A'_n \subset \tilde{A}_n$ y $B'_n \subset \tilde{B}_n$ con $A'_n, B'_n \in \mathcal{G}_n^\beta$ los cuales satisfacen $A'_n \neq B'_n$. Luego, se cumple

$$\begin{aligned} Z_n(t) &= \sum_{A_n \in \mathcal{A}^n} (\mu(A_n))^{1+t} \\ &\geq \sum_{A_n \in \mathcal{G}_n^\beta} (\mu(A_n))^{1+t} \\ &\geq e^{-k\Delta^\beta(1+t)} \sum_{\tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{A}}^n} \left(\mu(\tilde{A}_n)\right)^{1+t} \\ &\geq e^{-k\Delta^\beta(1+t)} (Z_m(t))^k \left(1 - (\psi^-(\Delta))\right)^{(k-1)(1+t)}, \end{aligned}$$

para Δ suficientemente grande, donde en la última igualdad utilizamos el hecho que para Δ suficientemente grande se verifica

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{A}_n) \;\geq\; & \left(1 - \psi^-(\Delta)\right)^{k-1} \times \\ & \mu\left(T^{-0}\left(A^{i_0^0}\right) \cap \cdots \cap T^{-(m-1)}\left(A^{i_{m-1}^0}\right)\right) \times \\ & \mu\left(T^{-m'}\left(A^{i_0^1}\right) \cap \cdots \cap T^{-(m'+m-1)}\left(A^{i_{m-1}^1}\right)\right) \times \\ & \vdots \\ & \mu\left(T^{-((k-1)m')}\left(A^{i_0^{k-1}}\right) \cap \cdots \cap T^{-((k-1)m'+m-1)}\left(A^{i_{m-1}^{k-1}}\right)\right) \\ =\; & \left(1 - \psi^-(\Delta)\right)^{k-1} \times \\ & \mu\left(A^{i_0^0} \cap \cdots \cap T^{-(m-1)}\left(A^{i_{m-1}^0}\right)\right) \times \\ & \mu\left(A^{i_0^1} \cap \cdots \cap T^{-(m-1)}\left(A^{i_{m-1}^1}\right)\right) \times \\ & \vdots \\ & \mu\left(A^{i_0^{k-1}} \cap \cdots \cap T^{-(m-1)}\left(A^{i_{m-1}^{k-1}}\right)\right), \end{aligned}$$

lo cual se sigue de la representación (2.8) de $\tilde{A}_n$, del Lema 1 y de que la medida μ es T invariante. Consecuentemente, para Δ suficientemente grande obtenemos

$$|\ln(Z_n(t))| \;\leq\; k|\ln(Z_m(t))| + k\Delta^\beta(1+t) +$$

$$\begin{aligned}
& (1+t)|\ln\big((1-\psi^{-}(\Delta))^{k-1}\big)| \\
\leq\ & k|\ln(Z_m(t))| + k(1+t)\mathcal{O}\big(\Delta^{\beta}\big),
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene de la hipótesis de que la función $1-\psi^{-}$ es subexponencial. Sea $a_n(t) = |\ln(Z_n(t))|$. Entonces para Δ suficientemente grande se cumple

$$a_n(t) \leq ka_m(t) + ck\Delta^{\beta}, \tag{2.9}$$

donde $c = (1+t)c_1$ y $c_1 > 0$ no depende de Δ, k y t . De este modo, para Δ suficientemente grande se cumple que

$$\begin{aligned}
\frac{a_n(t)}{n} &\leq \frac{ka_m(t)}{k(m+\Delta)-\Delta} + \frac{ck\Delta^{\beta}}{k(m+\Delta)-\Delta} \\
&\leq \frac{a_m(t)}{m} + \frac{c\Delta^{\beta}}{m}
\end{aligned}$$

para toda $k \in \mathbb{N}$. De lo anterior se sigue que para cada $m \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n(t)}{n} \leq \frac{a_m(t)}{m} + \frac{c\Delta^{\beta}}{m} \tag{2.10}$$

para Δ suficientemente grande. Como consecuencia, obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n(t)}{n} \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{a_m(t)}{m}. \tag{2.11}$$

Por lo tanto, se deduce de (2.10) y (2.11) que el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n(t)}{n}$ existe y es finito para toda $t > 0$. Hemos demostrado que la función de entropía de Rényi $R_{\mathcal{A}}(t)$ existe para toda $t > 0$.

Enseguida demostraremos que la convergencia del límite que define a la función $R_{\mathcal{A}}$ es uniforme en compactos del dominio de $R_{\mathcal{A}}$; es decir, en compactos de $\mathbb{R}^{+}$.

Sea $C \subset \mathbb{R}^{+}$ un compacto. Nótese que para cada $\tilde{A}_n$ existen $|\mathcal{A}|^{k\Delta}$ n-cilindros $A_n \in \mathcal{A}^n$ tales que $A_n \subset \tilde{A}_n$. Luego, como la medida μ es débilmente ψ-mezclante por hipótesis, tenemos que

$$
\begin{aligned}
Z_n(t) &= \sum_{A_n \in \mathcal{A}^n} (\mu(A_n))^{1+t} \\
&\leq |\mathcal{A}|^{k\Delta} \sum_{\tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{A}}^n} (\mu(\tilde{A}_n))^{1+t} \\
&\leq |\mathcal{A}|^{k\Delta} (Z_m(t))^k \left(1 + \psi^+(\Delta)\right)^{(k-1)(1+t)} .
\end{aligned}
$$

De la desigualdad anterior y de la hipótesis de que $1 + \psi^+$ es subexponencial, se sigue la desigualdad

$$
|\ln(Z_n(t))| \geq k|\ln(Z_m(t))| + (k-1)(1+t)\mathcal{O}(\Delta) .
$$

Luego,

$$
a_n(t) \geq k a_m(t) + \tilde{c}(k-1)\Delta, \tag{2.12}
$$

donde $\tilde{c} = (1+t)\tilde{c}_1$ y $\tilde{c}_1$ no depende de Δ, k y t. De las desigualdades (2.9) y (2.12) se obtiene que para Δ suficientemente grande, para $n = km' - \Delta$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$
\frac{\tilde{c}'\Delta(k-1)}{km' - \Delta} - \frac{\Delta}{m+\Delta} \frac{a_m(t)}{mt} \leq \frac{a_n(t)}{nt} - \frac{a_m(t)}{mt} \leq \frac{c'\Delta^\beta}{m},
$$

donde c' y $\tilde{c}'$ dependen sólamente del compacto C. De la desigualdad (2.24) se obtiene que, si Δ es grande, $n = km' - \Delta$ y $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$
\frac{\tilde{c}'\Delta(k-1)}{km' - \Delta} - \frac{\Delta}{m+\Delta} \frac{a_m(T_C)}{mT_C} \leq \frac{a_n(t)}{nt} - \frac{a_m(t)}{mt} \leq \frac{c'\Delta^\beta}{m},
$$

donde $T_C = \min C$. Haciendo $n \to \infty$ se sigue que para Δ suficientemente grande y para toda $m \in \mathbb{N}$,

$$
\frac{\tilde{c}'\Delta}{m+\Delta} - \frac{\Delta}{m+\Delta} \frac{a_m(T_C)}{mT_C} \leq R_{\mathcal{A}}(t) - \frac{a_m(t)}{mt} \leq \frac{c'\Delta^\beta}{m}. \tag{2.13}
$$

De la desigualdad (2.13) se sigue que la convergencia es uniforme en el compacto C de $\mathbb{R}^+$.

ii) Veamos primero que W está bien definida. Dado que $R_{\mathcal{A}}$ está bien definida en $]0,\infty[$, basta probar que W nunca se anula en $]0,\infty[$. Procedamos por contradicción. Supongamos que existe $t_0 \in]0,\infty[$ tal que $W(t_0)=0$. Entonces $R_{\mathcal{A}}(t_0)=0$. Sin embargo, del inciso *iv*) del Teorema 1 resulta una contradicción ya que $0<\gamma_\mu = \lim_{t\to\infty} R_{\mathcal{A}}(t)=0$, donde la última igualdad se obtiene debido a que $R_{\mathcal{A}}$ es monótona decreciente. Por lo anterior, W nunca se anula, y consecuentemente, está bien definida.

Para cada $t>0$ y $n\in\mathbb{N}$, definamos $H_n(t)=\sum_{A_n\in\mathcal{A}^n}(\mu(A_n))^{1+t}|\ln(\mu(A_n))|$. Un cálculo directo muestra que

$$h_T(\mu) = \lim_{n\to\infty}\frac{H_n(0)}{n}, \tag{2.14}$$

y que

$$\frac{d}{dt}Z_n(t) = -H_n(t) \tag{2.15}$$

para toda $t>0$. Se demostrará que para cada $t>0$ fijo, la sucesión $H_n(t)$ posee un comportamiento casi-aditivo en el sentido de que $H_{km}(t)=\mathcal{O}(km)$. Sean $m,n,\Delta\in\mathbb{N}$ tales que $m'=m+\Delta$ y $n=km'-\Delta$, con $k\in\mathbb{N}$. Nuevamente definamos $\tilde{\mathcal{A}}^n=\bigvee_{j=0}^{k-1}T^{-jm'}(\mathcal{A}^m)$. Para algún $\beta>1$, considérese

$$\mathcal{G}_n^\beta=\left\{A_n\in\mathcal{A}^n|\mu(A_n)\geq e^{-k\Delta^\beta}\mu(\tilde{A}_n)\right\},$$

donde $\tilde{A}_n\in\tilde{\mathcal{A}}^n$ es tal que $A_n\subset\tilde{A}_n$. Con estas notaciones la suma sobre los conjuntos de $\mathcal{A}^n$ que define a $H_n(t)$ se puede dividir en dos sumandos: sobre los elementos de $\mathcal{G}_n^\beta$ y sobre los de $\mathcal{A}^n\setminus\mathcal{G}_n^\beta$.

Acotaremos la medida de los elementos de $\mathcal{A}^n\setminus\mathcal{G}_n^\beta$. Si $A_n\in\mathcal{A}^n\setminus\mathcal{G}_n^\beta$, entonces se cumple

$$\mu(A_n)<e^{-k\Delta^\beta}\mu(\tilde{A}_n),$$

con $A_n\subset\tilde{A}_n\in\tilde{\mathcal{A}}^n$. Tomemos $\gamma\in]0,\beta[$ y denotemos

$$\mathcal{G'}_n^\gamma=\left\{A'_n\in\mathcal{A}^n|\mu(A'_n)\geq e^{-k\Delta^\gamma}\mu(\tilde{A}_n)\right\}.$$

Luego, para $A_n \notin \mathcal{G}_n^\beta$ se satisface

$$\begin{aligned} \mu(A_n) &< e^{-k\Delta^\beta}\mu(\tilde{A}_n) \\ &\leq e^{-k\Delta^\beta}e^{k\Delta^\gamma}\mu(A'_n), \end{aligned}$$

donde $A'_n \in {\mathcal{G}'_n}^\gamma$ y $A'_n \subset \tilde{A}_n$. La existencia de tal A'_n se sigue del hecho de que $|\mathcal{A}|^\Delta e^{-\Delta^\gamma} < 1$ para Δ suficientemente grande y siguiendo un argumento idéntico al del inciso i). Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{A_n \notin \mathcal{G}_n^\beta} |\ln(\mu(A_n))|(\mu(A_n))^{1+t} &< e^{-k(1+t)\Delta^\beta} \times \\ & \qquad \sum_{A_n \notin \mathcal{G}_n^\beta} |\ln(\mu(A_n))|(\mu(\tilde{A}_n))^{1+t} \\ &\leq e^{-k(1+t)(\Delta^\beta - \Delta^\gamma)} \times \\ & \qquad \sum_{A'_n \in {\mathcal{G}'_n}^\gamma} |\ln(\mu(A'_n))|(\mu(A'_n))^{1+t} \\ &\leq e^{-k(1+t)(\Delta^\beta - \Delta^\gamma)} H_n(t). \end{aligned}$$

Enseguida estudiaremos el caso de $A_n \in \mathcal{G}_n^\beta$, en el que se cumple que $\ln(\mu(A_n)) = \ln(\mu(\tilde{A}_n)) + k\mathcal{O}(\Delta^\beta)$. Por lo anterior

$$\begin{aligned} H_n(t) &= \sum_{A_n \in \mathcal{A}^n} |\ln(\mu(A_n))|(\mu(A_n))^{1+t} \\ &= \sum_{A_n \in \mathcal{G}_n^\beta} \left(|\ln(\mu(\tilde{A}_n))| + k\mathcal{O}\left(\Delta^\beta\right)\right)(\mu(A_n))^{1+t} + \\ & \quad \sum_{A_n \notin \mathcal{G}_n^\beta} |\ln(\mu(A_n))|(\mu(A_n))^{1+t} \\ &= \sum_{A_n \in \mathcal{G}_n^\beta} |\ln(\mu(\tilde{A}_n))|(\mu(A_n))^{1+t} + k\mathcal{O}\left(\Delta^\beta\right) Z_n(t) + \\ & \quad \mathcal{O}(e^{-k(1+t)(\Delta^\beta - \Delta^\gamma)}) H_n(t), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene de la estimación hecha arriba cuando $A_n \notin \mathcal{G}_n^\beta$. Usando el Lema 1, un argumento análogo al inciso i) nos implica

$$\mu(\tilde{A}_n) = (1 + \mathcal{O}(\psi^\pm(\Delta)))^{k-1} \prod_{j=0}^{k-1} \mu(A_m T^{jm'} A_n),$$

donde para cada $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, $A_m T^{jm'} A_n$ es el m-cilindro que contiene a $T^{jm'} A_n$. Luego, del hecho de que las funciones $1 + \psi^+$ y $1 - \psi^-$ son subexponenciales, se sigue que

$$\sum_{A_n \in \mathcal{G}_n^\beta} |\ln(\mu(\tilde{A}_n))|(\mu(A_n))^{1+t} \;\; = \;\; \sum_{j=0}^{k-1} X^j + k\mathcal{O}\left(\psi^-(\Delta) + \psi^+(\Delta)\right),$$

donde

$$X^j = \sum_{A_n \in \mathcal{G}_n^\beta} \left| \ln \left(\mu(A_m T^{jm'} A_n) \right) \right| (\mu(A_n))^{1+t}, \; j \in \{0, \ldots, k-1\}.$$

Enseguida estimaremos X^j para cada $j \in \{0, \ldots, k-1\}$. Sean $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ y $\beta > 1$, y definamos

$$\tilde{\mathcal{A}}_j^n \;\; = \;\; \mathcal{A}^{jm'-\Delta} \vee T^{-jm'}(\mathcal{A}^m) \vee T^{-(j+1)m'-\Delta}(\mathcal{A}^{n-(j+1)m'-\Delta}).$$

Sea $A_n^j \in \tilde{\mathcal{A}}_j^n$. Entonces

$$\begin{aligned} A_n^j \;\; = \;\; & \left(A^{i_0} \cap \cdots \cap T^{jm'-\Delta-1}\left(A^{i_{jm'-\Delta-1}} \right) \right) \cap \\ & \left(T^{-jm'}\left(A^{i'_0} \right) \cap \cdots \cap T^{-jm'-(m-1)}\left(A^{i'_{m-1}} \right) \right) \cap \\ & \left(T^{-j^*}\left(A^{i''_0} \right) \cap \cdots \cap T^{-j*-(n-(j+1)m'-\Delta)-1}\left(A^{i''_{n-(j+1)m'-\Delta-1}} \right) \right), \end{aligned}$$

donde $j^* = (j+1)m' + \Delta$; $A^{i_p} \in \mathcal{A}$ para $p = 0, \ldots, jm' - \Delta - 1$; $A^{i'_q} \in \mathcal{A}$ para $q = 0, \ldots, m-1$ y $A^{i_r} \in \mathcal{A}$ para $r = 0, \ldots, n - (j+1)m' - \Delta - 1$. Nótese que la clase $\tilde{\mathcal{A}}_n^j$ se describe de la siguiente manera: se consideran las primeras $jm' - \Delta$ preimagenes bajo T de elementos de la partición $\mathcal{A}$, tomando en cuenta la imagen inversa de T^0; luego se omiten las Δ preimágenes bajo T subsecuentes de la partición $\mathcal{A}$; posteriormente, se consideran las siguientes m preimágenes bajo T de la partición $\mathcal{A}$; nuevamente, se omiten las 2Δ preimágenes bajo T subsecuentes de la partición $\mathcal{A}$, y por último se consideran las $n-(j+1)m'-\Delta$ preimagenes bajo T subsecuentes de la partición $\mathcal{A}$. Para $\beta > 1$, definimos

$$\mathcal{G}_{n,j}^\beta = \left\{ A_n \in \mathcal{G}_n^\beta : \mu(A_n) \geq e^{-\Delta^\beta} \mu(\tilde{A}_n^j) \right\},$$

donde $\tilde{A}_n^j \in \tilde{\mathcal{A}}_j^n$ es tal que $A_n \subset \tilde{A}_n^j$. De modo análogo al análisis realizado en i), dividiremos la suma que define a X^j sobre $\mathcal{G}_n^\beta$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X^j &= \sum_{A_n \in \mathcal{G}_{n,j}^\beta} \left| \ln\left(\mu(A_m T^{jm'} A_n)\right)\right| (\mu(A_n))^{1+t} + \\ & \sum_{A_n \in \mathcal{G}_n^\beta \setminus \mathcal{G}_{n,j}^\beta} \left| \ln\left(\mu(A_m T^{jm'} A_n)\right)\right| (\mu(A_n))^{1+t}. \end{aligned}$$

Analizaremos el término $\sum\limits_{A_n \in \mathcal{G}_{n,j}^\beta} |\ln\left(\mu(A_m T^{jm'} A_n)\right)|(\mu(A_n))^{1+t}$. Antes de analizar dicho término estableceremos la siguiente notación.

Notación 1 Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ y $c > 0$, denotaremos por $[a, b]c$ al intervalo $[ac, bc]$. También denotaremos por $[a, b]+c$ al intervalo $[a + c, b + c]$.

Obsérvese que del Lema 1 y de un argumento análogo al del inciso i), obtenemos que para cada $\tilde{A}_n^j \in \tilde{\mathcal{A}}_n^j$,

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{A}_n^j) &= \left(1 + \mathcal{O}(\psi^\pm(\Delta))\right)^2 \times \\ & \quad \mu(A_{jm'-\Delta})\mu(T^{-jm'}(A_m))\mu(T^{-(j+1)m'-\Delta}(A_{n-(j+1)m'-\Delta})) \\ &= \left(1 + \mathcal{O}(\psi^\pm(\Delta))\right)^2 \mu(A_{jm'-\Delta})\mu(A_m)\mu(A_{n-(j+1)m'-\Delta}), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene del hecho que μ es T invariante. Un argumento análogo al empleado en la prueba del inciso i) y la igualdad anterior nos da

$$\begin{aligned} \sum_{A_n \in \mathcal{G}_{n,j}^\beta} \left| \ln\left(\mu(A_m T^{jm'} A_n)\right)\right| (\mu(A_n))^{1+t} &\in [e^{-(1+t)\Delta^\beta}, |\mathcal{A}|^{3\Delta}]C \\ &= [e^{-(1+t)\Delta^\beta}, |\mathcal{A}|^{3\Delta}]D, \\ \sum_{A_n \in \mathcal{G}_n^\beta \setminus \mathcal{G}_{n,j}^\beta} \left| \ln\left(\mu(A_m T^{jm'} A_n)\right)\right| (\mu(A_n))^{1+t} &< |\mathcal{A}|^{3\Delta} e^{-(1+t)\Delta^\beta} C \\ &< |\mathcal{A}|^{3\Delta} e^{-(1+t)\Delta^\beta} D, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} C &= \sum_{\tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{A}}_j^n} \left| \ln\left(\mu(A_m T^{jm'} A_n)\right)\right| (\mu(\tilde{A}_n^j))^{1+t}, \\ D &= (1+\mathcal{O}(\psi^{\pm}(\Delta)))^{2(1+t)} Z_{jm'-\Delta}(t) H_m(t) Z_{n-(j+1)m'-\Delta}(t). \end{aligned}$$

Procediendo como antes se tiene que

$$Z_n(t) \in [e^{-(1+t)\Delta^\beta}, |\mathcal{A}|^{3\Delta}]D.$$

Obsérvese que para toda $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ se verifica

$$\frac{e^{-(1+t)\Delta^\beta}}{2|\mathcal{A}|^{3\Delta}} \frac{H_m(t)}{Z_m(t)} \leq \frac{X^j}{Z_n(t)} \leq \frac{2|\mathcal{A}|^{3\Delta}}{e^{-(1+t)\Delta^\beta}} \frac{H_m(t)}{Z_m(t)}$$

para toda $m \in \mathbb{N}$. Consecuentemente, se satisface que para toda $t > 0$ y $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{H_n(t)}{Z_n(t)} \in \left[\frac{1}{c(t)}, c(t)\right] k \frac{H_m(t)}{Z_m(t)} + k\mathcal{O}(\Delta^\beta),$$

donde $c(t) = \frac{2|\mathcal{A}|^{3\Delta}}{e^{-(1+t)\Delta^\beta}}$. Así, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\frac{H_n(t)}{Z_n(t)} &\leq \frac{c(t)k}{km'-\Delta}\frac{H_m(t)}{Z_m(t)} + \frac{k}{km'-\Delta}\mathcal{O}(\Delta^\beta) \\ &\leq \frac{c(t)k}{km+(k-1)\Delta}\frac{H_m(t)}{Z_m(t)} + \frac{k}{km+(k-1)\Delta}\mathcal{O}(\Delta^\beta) \\ &\leq \frac{c(t)}{m}\frac{H_m(t)}{Z_m(t)} + \frac{C_1\Delta^\beta}{m} \end{aligned}$$

para Δ suficientemente grande, donde $C_1 > 0$ es un constante que no depende de Δ, m ni de t. Se sigue que para cualesquiera $b \geq a \geq 0$ y $m \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_a^b \frac{H_n(r)}{Z_n(r)}dr \leq \frac{1}{m}\int_a^b c(r)\frac{H_m(r)}{Z_m(r)}dr + \frac{C_1\Delta^\beta}{m}(b-a).$$

De manera análoga obtenemos que para toda $b \geq a \geq 0$ y $m \in \mathbb{N}$, se satisface

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_a^b \frac{H_n(r)}{Z_n(r)}dr \quad \geq \quad \frac{1}{m+\Delta}\int_a^b c(r)\frac{H_m(r)}{Z_m(r)}dr + \frac{C_2\Delta^\beta}{m+\Delta}(b-a)$$

para Δ suficientemente grande, donde $C_2 > 0$ es un constante que no depende de Δ, m ni de t.

Para cada $t > 0$, sea $0 < r(t) < t$, y consideremos el intervalo $I(t) = [t - r(t), t + r(t)]$. Demostraremos que $W|_{I(t)}$ es Lipschitz. Nótese que por definición se tiene que para toda $t \geq 0$,

$$W(t) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln(Z_n(t))}{n}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \geq 0$, definimos $g_n(t) = \frac{-\ln(Z_n(t))}{n}$. Luego, $g_n'(t) = \frac{1}{n}\frac{H_n(t)}{Z_n(t)} > 0$, $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que la función W es creciente en $[0, \infty[$. Sean $r, s \in I(t)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $r < s$. Luego, debido a que la función W es creciente, tenemos que para Δ suficientemente grande y $m \in \mathbb{N}$ se satisface

$$\begin{aligned}
|W(r) - W(s)| &= W(s) - W(r) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_r^s \frac{H_n(l)}{Z_n(l)}dl \\
&\leq \frac{1}{m}\int_r^s c(l)\frac{H_m(l)}{Z_m(l)}dl + \frac{C_1\Delta^\beta}{m}(s-r) \\
&\leq \frac{1}{m}\sup_{l\in I(t)}\left(c(l)\frac{H_m(l)}{Z_m(l)}\right)|s-r| + \frac{C_1\Delta^\beta}{m}|s-r| \\
&= \left(\frac{1}{m}\sup_{l\in I(t)}\left(c(l)\frac{H_m(l)}{Z_m(l)}\right) + \frac{C_1\Delta^\beta}{m}\right)|s-r| \\
&= \left(\frac{1}{m}c(l^*_{t,m})\frac{H_m(l^*_{t,m})}{Z_m(l^*_{t,m})} + \frac{C_1\Delta^\beta}{m}\right)|s-r|,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene del hecho de que la función $r \mapsto c(r)\frac{H_m(r)}{Z_m(r)}$ es continua, y alcanza su máximo en el compacto $I(t)$. Así concluimos que W es localmente Lipschitz continua.

iii) Sea $t > 0$ fija y $n \in \mathbb{N}$. Considérese $H_n(t) = \sum_{A_n \in \mathcal{A}^n} |\ln(\mu(A_n))|(\mu(A_n))^{1+t}$. Nótese que para toda $n, m \in \mathbb{N}$ se satisface que $\mathcal{A}^{n+m} = \mathcal{A}^m \cap T^{-m}(\mathcal{A}^n)$. Luego,

$$
\begin{aligned}
H_{n+m}(t) &= \sum_{A_{n+m} \in \mathcal{A}^{n+m}} (\mu(A_{n+m}))^{1+t} \left| \ln\left(\frac{\mu(A_{n+m})}{\mu(A_m)}\right) + \ln(\mu(A_m)) \right| \\
&= \sum_{A_{n+m} \in \mathcal{A}^{n+m}} (\mu(A_{n+m}))^{1+t} |\ln(\mu(A_m))| \\
&\quad + \frac{1}{1+t} \sum_{A_{n+m} \in \mathcal{A}^{n+m}} (\mu(A_{n+m}))^{1+t} \left| \ln\left[\left(\frac{\mu(A_{n+m})}{\mu(A_m)}\right)^{1+t}\right] \right| \\
&= \sum_{A_m \in \mathcal{A}^m} \sum_{A_n \in \mathcal{A}^n} (\mu(A_m \cap T^{-m}(A_n)))^{1+t} |\ln(\mu(A_m))| \\
&\quad + \frac{1}{1+t} \sum_{A_n \in \mathcal{A}^n} Z_m(t) \sum_{A_m \in \mathcal{A}^m} \frac{(\mu(A_m))^{1+t}}{Z_m(t)} \phi\left(\left(\frac{\mu(A_{n+m})}{\mu(A_m)}\right)^{1+t}\right) \\
&\leq \sum_{A_m \in \mathcal{A}^m} (\mu(A_m))^{1+t} |\ln(\mu(A_m))| \\
&\quad + \frac{Z_m(t)}{1+t} \sum_{A_n \in \mathcal{A}^n} \sum_{A_m \in \mathcal{A}^m} \frac{(\mu(A_m))^{1+t}}{Z_m(t)} \phi\left(\left(\frac{\mu(A_{n+m})}{\mu(A_m)}\right)^{1+t}\right),
\end{aligned}
$$

donde $\phi(s) = -s\ln(s)$, y la última desigualdad se sigue del hecho de que para cada $m, n \in \mathbb{N}$ y $t \geq 0$,

$$
\sum_{A_n \in \mathcal{A}^n} (\mu(A_m \cap T^{-m}(A_n)))^{1+t} \leq (\mu(A_m))^{1+t}. \tag{2.16}
$$

Obsérvese que ϕ es cóncava en $]0,1[$ y creciente en $]0, 1/e[$. Consecuentemente, usando primero que ϕ es cóncava y luego que ϕ es creciente en $]0, 1/e[$, así como la desigualdad (2.16), se obtiene

$$
\begin{aligned}
H_{n+m}(t) &\leq H_m(t) + \frac{Z_m(t)}{1+t} \sum_{A_n \in \mathcal{A}^n} \phi\left(\sum_{A_m \in \mathcal{A}^m} \frac{(\mu(A_{n+m}))^{1+t}}{Z_m(t)}\right) \\
&\leq H_m(t) + \frac{Z_m(t)}{1+t} \sum_{A_n \in \mathcal{A}^n} \phi\left(\frac{(\mu(A_n))^{1+t}}{Z_m(t)}\right),
\end{aligned}
$$

siempre que para cada $A_n \in \mathcal{A}^n$ se cumpla $\frac{(\mu(A_n))^{1+t}}{Z_m(t)} \leq 1/e$. Luego, de la definición de ϕ y de las propiedades de los logaritmos se obtiene que para toda $n, m \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$,

$$H_{n+m}(t) \leq H_m(t) + \frac{1}{1+t} \sum_{A_n \in \mathcal{A}^n} (\mu(A_n))^{1+t} \left| \ln \left(\frac{(\mu(A_n))^{1+t}}{Z_m(t)} \right) \right|,$$

y

$$H_{n+m}(t) \leq H_m(t) + H_n(t) + \frac{1}{1+t} Z_n(t) |\ln(Z_m(t))|, \quad (2.17)$$

siempre que para cada $A_n \in \mathcal{A}^n$ se cumpla $\frac{(\mu(A_n))^{1+t}}{Z_m(t)} \leq 1/e$. Veamos ahora cómo satisfacer esta última condición.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Entonces por el Lema 2 existe $J = J(t, m) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{(\mu(A_{jm}))^{1+t}}{Z_m(t)} < \frac{1}{e}$$

para toda $j \in \mathbb{N}$ tal que $j > J$. Dado que para toda $t \geq 0$, $W(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\ln(Z_n(t))|$, se obtiene que $W(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\ln(Z_n(0))| = 0$ debido a que $Z_n(0) = 1$. Nótese que la función $a_n(t) = |\ln(Z_n(t))|$ es una función decreciente en $t \in [0, \infty[$. Además, del inciso *i*) del Teorema 1 obtenemos que $\frac{a_n(t)}{nt}$ converge uniformemente en compactos de $]0, \infty[$ a $R_{\mathcal{A}}(t)$ cuando $n \to \infty$. Esto implica que $\frac{a_n(t)}{n}$ converge uniformemente en compactos de $[0, \infty[$ a $W(t)$ cuando $n \to \infty$. Más aún, del inciso *ii*) se obtiene que $W(t)$ es localmente Lipschitz continua. Luego, existe $\delta > 0$ tal que $W|_{[0,\delta[}$ es Lipschitz continua, es decir, para toda $t \in [0, \delta[$ existe $M_\delta > 0$ tal que $|W(t) - W(0)| \leq M_\delta |t - 0|$. Para $\epsilon > 0$ sea $\delta' = \min\left\{\frac{\epsilon}{2M_\delta}, \delta\right\}$, de modo que si $t \in [0, \delta'[$, entonces $|W(t)| < \frac{\epsilon}{2}$. Debido a que $\frac{a_n(t)}{n}$ converge uniformemente en compactos de $[0, \infty[$ a $W(t)$ cuando $n \to \infty$, tomando $\delta'' = \frac{\delta}{2}$ se obtiene que existe $N = N(\delta'', \epsilon)$ tal que $|\frac{|\ln(Z_n(t))|}{n} - W(t)| < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$, y para toda $t \in [0, \delta'']$. Tomando $\epsilon' = \frac{Z_m(\delta'')}{e}$, del Lema 2 se sigue que existe $J' = J'(m, \delta)$ tal que

$$\mu(A_{jm}) < \frac{Z_m(\delta'')}{e}$$

para toda $j \in \mathbb{N}$ con $j > J'$. Así pues, para cualesquiera $n \geq N$ y $t \in [0, \delta'']$ se satisface que $Z_n(t) > e^{-n\epsilon}$, y para $j > J'$,

$$\frac{(\mu(A_{jm}))^{1+t}}{Z_m(t)} < \frac{1}{e}.$$

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Por el algoritmo de la división de Euclides existen $j_n, r_n \in \mathbb{N}$ tal que $n = j_n m + r_n$, con $r_n \in \{0, \ldots, m-1\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $j_n > J'$. Supongamos además, que $m > N$ y $t \in [0, \delta'']$. Aplicando $J' - j_n + 1$ veces la desigualdad (2.17) obtenemos que

$$\begin{aligned}
H_n(t) &= H_{j_n m + r_n}(t) \\
&\leq H_{r_n}(t) + H_{j_n m}(t) + \frac{1}{1+t} Z_n(t) |\ln(Z_m(t))| \\
&\leq H_{r_n}(t) + H_{j_n m}(t) + \epsilon m \\
&\leq H_{r_n}(t) + (j_n - J') H_m(t) + H_{J'm}(t) + (j_n - J')\epsilon m.
\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{H_n(t)}{n} \leq \frac{H_{r_n}(t)}{n} + \frac{(j_n - J')H_m(t)}{j_n m + r_n} + \frac{H_{J'm}(t)}{n} + \frac{(j_n - J')\epsilon m}{j_n m + r_n},$$

y por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{H_n(t)}{n} &= \frac{H_m(t)}{m} + \mathcal{O}(\epsilon), \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^t H_n(s) ds &= \frac{1}{m} \int_0^t H_m(s) ds + \mathcal{O}(\epsilon) t,
\end{aligned}$$

para toda $m > M$ y $t \in [0, \delta'']$. Obsérvese que

$$R_{\mathcal{A}}(0) = \lim_{t\to 0^+} R_{\mathcal{A}}(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{W(t) - W(0)}{t} = W'(0),$$

donde $W'(0)$ denota la derivada por la izquierda de la función W en cero. Además, de la igualdad (2.15) y de lo anterior se sigue que para toda $m > N$ y $t \in [0, \delta'']$ se cumple

$$\begin{aligned} W(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{|\ln(Z_n(t))|}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^t \frac{H_n(s)}{Z_n(s)} ds \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^t H_n(s) ds \\ &= \frac{1}{m}\int_0^t H_m(s) ds + \mathcal{O}(\epsilon)t, \end{aligned}$$

donde la desigualdad se obtiene del hecho de que $Z_n(s) \in]0,1]$ para toda $s \in [0, \infty[$. Consecuentemente,

$$R_{\mathcal{A}}(0) \geq \frac{1}{m} H_m(0) + \mathcal{O}(\epsilon). \tag{2.18}$$

Para cada $\epsilon = \frac{1}{z}$, con $z \in \mathbb{N}$, existe $m = m_z \in \mathbb{N}$ que satisface (2.18). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{m_z\}_{z\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente, de modo que $m_z \to \infty$ cuando $z \to \infty$. Por lo tanto, de las igualdades (2.14) y (2.18) se sigue que

$$R_{\mathcal{A}}(0) \geq \lim_{z\to\infty} \frac{1}{m_z} H_{m_z}(0) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} H_m(0) = h_T(\mu). \tag{2.19}$$

Para demostrar la desigualdad faltante, nótese que debido a la desigualdad (2.10), para cada $t > 0$ la sucesión $\left\{\frac{a_n(t)}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n(t)}{n} \leq \frac{a_m(t)}{m} + \frac{c\Delta^\beta}{m}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{2.20}$$

para Δ suficientemente grande. En el inciso i) del Teorema 1 demostramos que, para cada $t > 0$, la sucesión $\left\{\frac{a_n(t)}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee límite cuando $n \to \infty$. Luego, para Δ suficientemente grande y para cada $t > 0$, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n(t)}{n} \leq \inf_{m\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{a_m(t)}{m} + \frac{c\Delta^\beta}{m} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \inf_{m\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{a_m(t)}{m} \right\} + \inf_{m\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{c\Delta^\beta}{m} \right\} \\ &\leq \inf_{m\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{a_m(t)}{m} \right\} \\ &\leq \frac{a_m(t)}{m} \end{aligned}$$

para toda $m \in \mathbb{N}$. De lo anterior obtenemos que para toda $t > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ se cumple

$$R_{\mathcal{A}}(t) \quad \leq \quad \frac{a_m(t)}{mt}.$$

Haciendo $t \to 0^+$ obtenemos que para toda $m \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{A}}(0) \quad &\leq \lim_{t\to 0^+} \frac{a_m(t)}{mt} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{-\ln(Z_m(t))}{mt} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{Z'_m(t)}{Z_m(t)}}{m} \\ &= \frac{1}{m}\frac{Z'_m(0)}{Z_m(0)} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{A_m\in\mathcal{A}^m} \mu(A_m)|\ln(\mu(A_m))|. \end{aligned}$$

Ahora, haciendo $m \to \infty$ y utilizando el Teorema de Kolmogorov-Sinai concluimos que

$$R_{\mathcal{A}}(0) \quad \leq \quad h_T(\mu). \tag{2.21}$$

Finalmente, de las desigualdades (2.19) y (2.21) obtenemos que

$$R_{\mathcal{A}}(0) \quad = \quad h_T(\mu).$$

iv) Nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumplen las desigualdades

$$b_n^{1+t} \leq Z_n(t) \leq b_n^t$$

para toda $t > 0$, donde

$$b_n = \max_{A_n \in \mathcal{A}^n} \mu(A_n). \tag{2.22}$$

Se verifica

$$\gamma_\mu \leq R_{\mathcal{A}}(t) \leq \frac{1+t}{t}\gamma_\mu, \tag{2.23}$$

para cada $t > 0$, donde $\gamma_\mu = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\ln(b_n)|$. Haciendo $t \to \infty$ obtenemos que

$$\lim_{t\to\infty} R_{\mathcal{A}}(t) = \gamma_\mu.$$

Usando el Lema 2 y la Observación 3 se tiene que existe $\eta \in]0,1[$ tal que

$$\gamma_\mu \geq |\ln(\eta)| > 0.$$

Enseguida probaremos que $R_{\mathcal{A}}$ es monótona decreciente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considérese

$$f_n(x) \;=\; \frac{1}{nx}|\ln(Z_n(x))|,$$

donde $x > 0$ y $Z_n(x) = \sum_{A_n \in \mathcal{A}^n} (\mu(A_n))^{1+x}$. Debido a que $0 < Z_n(x) < 1$ para toda $x > 0$, se tiene

$$f_n(x) \;=\; -\frac{1}{nx}\ln(Z_n(x)),\; x > 0.$$

La derivada de la función f_n está dada por

$$\frac{df_n(x)}{dx} = -\frac{1}{nx^2}\left(x\frac{\frac{dZ_n(x)}{dx}}{Z_n(x)} - \ln\left(Z_n(x)\right)\right) < 0$$

para toda $x > 0$. Se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $0 < s < t$,

$$\frac{1}{nt}|\ln(Z_n(t))| \;<\; \frac{1}{ns}|\ln(Z_n(s))|. \tag{2.24}$$

Haciendo $n \to \infty$ obtenemos

$$R_{\mathcal{A}}(t) \;\leq\; R_{\mathcal{A}}(s).$$

Por lo tanto, la función de entropía de Rényi $R_{\mathcal{A}}$ es decreciente.

Observación 5 Obsérvese que debido al Lema 2, la medida de los cilindros decae exponencialmente para dinámicas débilmente ψ-mezclantes. Nótese que si la función $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ dada por (2.22) es subexponencial, entonces $\gamma_\mu = 0$ y consecuentemente, por la relación (2.23), se concluye que $R_{\mathcal{A}}(t) = 0$ para toda $t \in]0, \infty[$.

Observación 6 La función de entropía de Rényi $R_{\mathcal{A}}$ depende de la partición $\mathcal{A}$, lo cual puede reflejar algunas propiedades dinámicas del sistema dinámico medible asociadas a la partición $\mathcal{A}$. Takens y Verbitsky [TV] sugieren definir la función de entropía de Rényi de orden $t > 0$ para una transformación T que preserva la medida como

$$\hat{R}(t) = \sup \{ R_{\mathcal{A}}(t) | \mathcal{A} \text{ es partición finita de } X \} . \tag{2.25}$$

La función de entropía de Rényi $\hat{R}$ definida por (2.25) resulta ser invariante bajo isomorfismo de medida. Sin embargo, si la medida μ es ergódica respecto a la transformación T, entonces $\hat{R}(t) = h_T(\mu)$ para toda $t > 0$, lo cual nos dice que esta definición no extrae más información relevante cuando el sistema dinámico medible es ergódico que la que nos proporciona la entropía métrica.

Capítulo 3

Grandes desviaciones y la función de entropía de Rényi

3.1. Teorema de recurrencia de Poincaré y Teorema de Kac

El estudio de grandes desviaciones se remonta a Laplace y Cramér; sin embargo, fue hasta 1966 que se obtuvo una definición formal debida a Varadhan [VA]. En [HV] se usa la función entropía de Rényi para calcular grandes desviaciones para el retorno corto a los n-cilindros. El estudio de grandes desviaciones del retorno corto aparece en diferentes contextos. En la teoría ha sido utilizado para definir la dimensión de recurrencia, y en las aplicaciones existen grandes vínculos con los algoritmos de información. Al estudiar grandes desviaciones resulta necesario recordar dos teoremas muy célebres.

Teorema 4 (Recurrencia de Poincaré) *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible y $B \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(B) > 0$. Entonces existe $A \in B \cap \mathcal{B}$ con $\mu(A) = \mu(B)$ tal que para cada $x \in A$ existen una subsucesión de los naturales $n_1(x) < n_2(x) < \cdots$, tal que $T^{n_i(x)}(x) \in A$ para toda $i \in \mathbb{N}$.*

Interpretación 3 Enseguida proporcionaremos una interpretación física al Teorema de recurrencia de Poincaré. Sea X el espacio de todos los posibles estados de un sistema físico, dotado de la σ-álgebra $\mathcal{B}$, la cual consiste de todos los estados observables del sistema físico y una medida de probabilidad μ definida para cada estado observable del sistema. El sistema físico evoluciona con un tiempo discreto $T : X \to X$, el cual es una transformación medible que a cada estado del sistema le asocia su evolución bajo T. Suponiendo que el sistema se encuentra en equilibrio, la probabilidad de un observable del sistema no cambia en el tiempo, lo cual significa que T preserva la medida de probabilidad μ. El Teorema de recurrencia de Poincaré nos dice que si el sistema al tiempo cero se encuentra en un estado observable B, entonces casi seguramente el sistema regresará a este estado observable bajo la evolución del tiempo. Aunque el Teorema de recurrencia de Poincaré asegura que el sistema regresará al estado observable B casi seguramente, este no dice nada acerca del tiempo que tardará el sistema en regresar a dicho estado observable.

El Teorema de recurrencia de Poincaré tiene mucha relevancia debido a sus implicaciones en la Física, así como implicaciones filosóficas. Es uno de los resultados básicos en Teoría Ergódica. Una demostración en detalle del Teorema de recurrencia de Poincaré se encuentra en la monografía [WA].

Teorema 5 (Kac) *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible y $B \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(B) > 0$. Si μ es ergódica con respecto a T entonces*

$$\int_B \tau_B(x) d\mu(x) = 1,$$

donde $\tau_B(x) = \text{ínf}\{k \in \mathbb{N} | T^k(x) \in B\}$.

Una demostración en detalle del Teorema de Kac se encuentra en la monografía [PE]. Enseguida definiremos los ingredientes para definir los retornos cortos.

Definición 19 (Función de retorno) Sean $T : X \to X$ una transformación y $\emptyset \neq B \subset X$. Definimos la función de retorno a B como

$$\begin{aligned} \tau_B : B &\to \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ x &\mapsto \text{ínf}\{k \in \mathbb{N} | T^k(x) \in B\}, \end{aligned}$$

tomando como convención $\text{ínf}\, \emptyset = \infty$.

Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible y $B \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(B) > 0$. Por el Teorema de recurrencia de Poincaré se tiene que la función de retorno a B, τ_B, es finita salvo en un conjunto de medida cero en $B \cap \mathcal{B}$. Además, cuando la medida μ es ergódica respecto a T, el Teorema de Kac nos asegura que

$$\int_B \tau_B(x) d\mu(x) \;=\; 1.$$

El siguiente ejemplo ilustra la necesidad de estudiar grandes desviaciones, a pesar de que el Teorema de recurrencia de Poincaré y el Teorema de Kac se pueden aplicar.

Ejemplo 1 (Ehrenfests, 1957**)** Supongamos que se tienen dos urnas, una de ellas contiene 100 bolas, las cuales están numeradas del 1 al 100; y la otra urna se encuentra vacía. Supongamos también que hay un sombrero, el cual contiene 100 tiras de papel numeradas del 1 al 100. Cada segundo, se saca de manera aleatoria con distribución uniforme discreta soportada en $\{1, \ldots, 100\}$ una tira de papel del sombrero, se lee el número que trae impreso, se cambia de urna la bola que trae impresa el mismo número que la tira de papel, y se coloca de nuevo la tira de papel en el sombrero. El experimento se repite de la misma manera. De acuerdo a la Segunda Ley de la Termodinámica (equilibrio termodinámico), y también de acuerdo a nuestra intuición, el sistema dinámico descrito alcanzará el estado de equilibrio cuando haya 50 bolas en cada urna. Por supuesto, existirán fluctuaciones aleatorias cuando haya alrededor de 50 bolas en cada urna, sin embargo, nos parecería improbable que las 100 bolas regresarán todas a la urna que las tenía las 100 bolas al principio aunque se repita el experimento un número grande de veces. El Teorema de recurrencia de Poincaré, o bien la Teoría Clásica de Cadenas de Markov Ergódicas, nos dicen que aunque parece improbable que las 100 bolas regresan a la urna que las tenía al principio, este evento ocurrirá casi seguramente.

El Teorema de recurrencia de Poincaré se puede aplicar a la situación descrita ya que la sucesión de experimentos puede ser modelada a través de un desplazamiento de Markov. Para describir los estados del sistema físico al tiempo $k \in \mathbb{N}_0$ bastará con especificar el número de bolas $y_k \in Y$ en la primera urna, donde $Y = \{0, 1, \ldots, 100\}$. Supongamos que al tiempo $k = 0$, hay y_0 bolas en la primera urna. Luego sacamos una tira de papel del sombrero, leemos el número que trae impreso, cambiamos de urna la bola que trae impresa el mismo número que la tira de papel y colocamos de nuevo la tira de papel en el sombrero. Al repetir el experimento una infinidad de veces obtenemos un sucesión de estados del sistema $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la cual satisface

i) $y_k \in Y$, para toda $k \in \mathbb{N}_0$.

ii) $|y_k - y_{k-1}| = 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Para simplificar consideraremos que el experimento ha durado tiempo infinito en el pasado y continuará un tiempo infinito en el futuro. Sea $X = \prod_{n=-\infty}^{\infty} X_n$, donde $X_n = Y$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Consideremos la transformación $T : X \to X$ definida por $T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{x'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ donde $x'_n = x_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{B}$ la σ-álgebra generada por las historias finitas del experimento

$$C_k(i_1, \ldots, i_n) \quad = \quad \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X : x_{j+k} = i_j,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Enseguida construiremos una medida μ en $(X, \mathcal{B})$ de tal manera que $\mu(C_k(i_1, \ldots, i_n))$ modele la probabilidad de observar la secuencia $(i_1, \ldots, i_n)$ de estados sucesivos del sistema, empezando al tiempo $k \in \mathbb{N}_0$. La probabilidad *a priori* p_i de observar el estado $i \in Y$ al tiempo k no depende de k y está dada por

$$\lambda_i \quad = \quad \frac{1}{2^{100}}\binom{100}{i}.$$

Denotemos por $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{100})$ a la distribución de probabilidad. Para cada $i, j \in Y$ denotaremos por $p_{i,j}$ a la medida condicional de estar en el estado j dado que partimos del estado i. Luego se tiene

$$\begin{aligned} p_{i,i-1} &= \frac{i}{100} && \text{si } i \in \{1, \ldots, 100\}, \\ p_{i,i+1} &= \frac{100-i}{100} && \text{si } i \in \{0, \ldots, 99\}, \\ p_{i,j} &= 0 && \text{si } j \notin \{i+1, i-1\}. \end{aligned}$$

La matriz $P = (p_{i,j})_{i,j\in Y}$ es una matriz estocástica y dado que $\lambda P = \lambda$, entonces podemos definir la medida μ en las historias finitas del experimento como

$$\mu(C_k(i_1, \ldots, i_n)) \quad = \quad \lambda_{i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n}.$$

Luego, la medida μ se extiende de manera única a la σ-álgebra $\mathcal{B}$ por el Teorema de Kolmogorov, cuya demostración se encuentra en la monografía [PE]. Además la transformación T preserva la medida μ.

Sea $B = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X : x_0 = 0\}$, es decir, B consiste de todos los resultados del experimento en el cual la primera urna posee cero bolas. Dado que $\mu(B) = \lambda_0 > 0$, por el Teorema de recurrencia de Poincaré se tiene que con $\mu|_B$ casi todo elemento de B regresará a B, sin embargo, por el Teorema de Kac, el tiempo esperado de recurrencia es

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B \tau_B(x) d\mu(x) = \frac{1}{\lambda_0} = 2^{100}.$$

Para sistemas físicos más reales con millones de partículas, el tiempo esperado de recurrencia es astronómico. Lo anterior sugiere estudiar grandes desviaciones para la función de retorno en vez de estudiar el tiempo medio de recurrencia.

Definición 20 (Función de retorno corto a los n-cilindros)
Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible y $\mathcal{A}$ un partición medible finita de $(X, \mathcal{B})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función de retorno corto al n-cilindro como

$$\begin{aligned} \tau_n : X &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto \min_{y \in A_n(x)} \tau_{A_n(x)}(y), \end{aligned}$$

donde $A_n(x)$ denota al único n-cilindro que contiene a x y $\tau_{A_n(x)}$ es la función de retorno a $A_n(x)$.

La función de retorno corto a los cilindros es usada en diferentes contextos, por ejemplo:

- Dado que τ_n controla los retornos cortos a los n-cilindros, esta función juega un papel fundamental al calcular la distribución asintótica de retorno τ_A cuando la medida de A tiende a cero. Consultar [HL] y [HS].
- La función de retornos cortos es usada para definir la dimensión de recurrencia. Consultar [AF], [AU] y [PS].
- También es utilizada en los algoritmos de información. Consultar [BG].

El primer resultado del comportamiento asintótico de τ_n es el siguiente.

Teorema 6 *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible, con μ ergódica respecto a T. Supongamos que la entropía métrica $h_T(\mu) > 0$. Entonces*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\tau_n(x)}{n} \geq 1, \tag{3.1}$$

para μ casi toda $x \in X$.

La demostración del resultado anterior se encuentra en [ST] y [AC]. Si suponemos que el sistema dinámico medible $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ es débilmente ψ-mezclante, entonces el límite (3.1) es igual a 1, para μ casi toda $x \in X$.

La situación cambia drásticamente en sistemas dinámicos medibles con entropía métrica cero. En general, el límite (3.1) no existe y los valores del límite inferior y límite superior dependen de las propiedades dinámicas de la transformación T. Para una investigación más profunda, consultar [CD], [KU] y [KR].

Teorema 7 *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible y μ una medida no atómica. Sea $\mathcal{A}$ una partición medible finita fina generadora de $(X, \mathcal{B})$. Si μ es débilmente ψ-mezclante con respecto a $\mathcal{A}$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n(x)}{n} \quad = \quad 1$$

para μ casi toda $x \in X$.

Demostración 5 Bajo las hipótesis del Teorema 7, nótese que por (2.7) la medida μ posee entropía métrica positiva. Además, por la hipótesis de que μ es débilmente ψ-mezclante se verifica directamente que μ es ergódica respecto a T. Luego, por el Teorema 6 se obtiene

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\tau_n(x)}{n} \geq 1$$

para μ casi toda $x \in X$. Enseguida demostraremos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\tau_n(x)}{n} \leq 1$$

para toda $x \in X$. En efecto, tomemos $x \in X$ y sea $A_n(x)$ el n-cilindro que contiene a x. Dado que μ es débilmente ψ-mezclante con respecto a $\mathcal{A}$, se tiene que

$$\frac{\mu\left(A_n(x) \cap T^{-n-r}(A_n(x))\right)}{(\mu(A_n(x)))^2} \geq 1 - \psi^-(r) > 0 \tag{3.2}$$

para $r \geq \Delta$. Usando la desigualdad (3.2) obtenemos

$$\tau_n(x) \leq n + r \tag{3.3}$$

para toda $x \in X$. Dado que r no depende de $x \in X$ se sigue que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\tau_n(x)}{n} \leq 1$$

para toda $x \in X$. Consecuentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n(x)}{n} \quad = \quad 1$$

para μ casi toda $x \in X$.

3.2. La función de entropía de Rényi en grandes desviaciones

En está sección se estudiarán grandes desviaciones para el proceso $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Particularmente, nos enfocaremos en el comportamiento asintótico de

$$\mathbb{P}(\tau_n \leq \lfloor \delta n \rfloor) \quad := \quad \mu(\{x \in X : \tau_n(x) \leq \lfloor \delta n \rfloor\}) \tag{3.4}$$

para $\delta > 0$, donde, como es usual, $\lfloor x \rfloor = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$. Obsérvese que cuando $\delta \geq 1$ se satisface

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(\tau_n \leq \lfloor \delta n \rfloor)) \quad = \quad 0,$$

lo cual se sigue de (3.3). Por lo cual, de aquí en adelante supondremos que $\delta \in]0,1[$. Nótese que para toda $x \in X$, se cumple la igualdad

$$\tau_n(x) = \tau_n(y) \tag{3.5}$$

para toda $y \in A_n(x)$. Como consecuencia de (3.5), es posible reemplazar los conjuntos $\{x \in X : \tau_n(x) \leq \lfloor \delta n \rfloor\}$ por

$$\mathcal{C}_n(\delta) = \{A_n \in \mathcal{A}^n : \tau_n(A_n) \leq \lfloor \delta n \rfloor\}, \tag{3.6}$$

donde

$$\tau_n(A_n) = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : A_n \cap T^{-k}(A_n) \neq \emptyset\} = \tau_n(x)$$

para toda $x \in A_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defínanse las familias de conjuntos

$$B_n(j) := \left\{ A_n \in \mathcal{A}^n : \frac{j}{\tau_n(A_n)} \in \mathbb{N} \right\}, \tag{3.7}$$

para $j = 1, \ldots, n$. Nótese que $B_n(j) \subset \sigma(\mathcal{A}^n)$, para $j = 1, \ldots, n$. Enseguida estudiaremos una representación simbólica de los n-cilindros $A_n \in B_n(j)$, $j = 1, \ldots, n$. Denotemos por $\mathcal{A} = \{A^{j_0}, \ldots, A^{j_m}\}$ a la partición medible finita de $(X, \mathcal{B})$. Obsérvese que para cada $x \in X$ existe un único n-cilindro $A_n(x)$ que contiene a x. Además, este n-cilindro $A_n(x)$ nos describe en qué conjuntos de la partición $\mathcal{A}$ se encuentran x y sus primeros $(n-1)$ iterados. Del hecho anterior y de la definición de $B_n(j)$ se obtiene una manera de representar a cada elemento $A_n \in B_n(j)$:

i) Para $j \in \{1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ podemos escribir $n = \lfloor n/j \rfloor j + r$, donde $r \in \{0, \ldots, j-1\}$. Luego, cada $A_n \in B_n(j)$ es de la forma

$$\begin{aligned}
A^{x_0} \cap T^{-1}(A^{x_1}) \cap \ldots \cap T^{-(j-1)}(A^{x_{j-1}}) \cap \\
T^{-j}(A^{x_0}) \cap T^{-(j+1)}(A^{x_1}) \cap \ldots \cap T^{-(2j-1)}(A^{x_{j-1}}) \cap \\
\vdots \\
T^{-j(\lfloor n/j \rfloor -1)}(A^{x_0}) \cap T^{-(j(\lfloor n/j \rfloor -1)+1)}(A^{x_1}) \cap \ldots \cap T^{-(j(\lfloor n/j \rfloor -1)+j-1)}(A^{x_{j-1}}) \cap \\
T^{-(n-r)}(A^{x_0}) \cap T^{-(n-r+1)}(A^{x_1}) \cap \ldots \cap T^{-(n-1)}(A^{x_{r-1}}),
\end{aligned}$$

donde $x_0, \ldots, x_{j-1} \in \{j_0, \ldots, j_m\}$. Identificaremos A_n con

$$\underbrace{x_0, \ldots, x_{j-1}}_{1}, \underbrace{x_0, \ldots, x_{j-1}}_{2}, \ldots, \underbrace{x_0, \ldots, x_{j-1}}_{\lfloor n/j \rfloor}, \underbrace{x_0, \ldots, x_{r-1}}_{1},$$

es decir, con los índices de los conjuntos de la partición $\mathcal{A}$ donde se encuentran sus iterados. Por abuso de notación lo escribiremos como

$$(x_0, \ldots, x_{j-1},)^{\lfloor n/j \rfloor} x_0, \ldots, x_{r-1}. \tag{3.8}$$

ii) Para $j \in \{\lfloor n/2 \rfloor + 1, \ldots, n\}$, podemos escribir $n = j + r$, donde $r \in \{0, \ldots, j-1\}$. Luego, cada $A_n \in B_n(j)$ es de la forma

$$\begin{aligned}
A^{x_0} \cap T^{-1}(A^{x_1}) \cap \ldots \cap T^{-(r-1)}(A^{x_{r-1}}) \cap \\
T^{-r}(A^{x_0}) \cap T^{-(r+1)}(A^{x_1}) \cap \ldots \cap T^{-(r+(n-2r-1))}(A^{x_{n-2r-1}}) \cap \\
T^{-(n-r)}(A^{x_0}) \cap T^{-(r+1)}(A^{x_1}) \cap \ldots \cap T^{-(n-1)}(A^{x_{r-1}}),
\end{aligned}$$

ya que $n = r + (n-2r) + r$, e igual que en *i)* lo identificaremos con

$$\underbrace{x_0, \ldots, x_{r-1}}_{1}, \underbrace{x_0, \ldots, x_{n-2r-1}}_{1}, \underbrace{x_0, \ldots, x_{r-1}}_{1}. \tag{3.9}$$

Para estudiar los conjuntos (3.6) nos enfocaremos en los conjuntos

$$\mathcal{S}_n(\lambda) = \{A_n \in \mathcal{A}^n : \tau_n(A_n) = \lfloor \lambda n \rfloor\},$$

donde $\lambda \in]0, 1[$. Nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$ se satisface

$$\mathcal{C}_n(\delta) \;=\; \bigcup_{\lambda \in]0,\delta]} \mathcal{S}_n(\lambda). \tag{3.10}$$

Además, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\lfloor \delta n \rfloor} \in]0, \delta]$ tales que

$$\mathcal{C}_n(\delta) \;=\; \bigcup_{j=1}^{\lfloor \delta n \rfloor} \mathcal{S}_n(\lambda_j). \tag{3.11}$$

Definición 21 (Función de densidad de retornos cortos) Definimos la función de densidad de retornos cortos $M :]0,1] \to \mathbb{R}$ como

$$M(\lambda) \;=\; (1 - \lambda l)(W(l) - W(l-1)) + \lambda W(l-1),$$

donde $l = \lfloor 1/\lambda \rfloor$ y $W(t) = tR_{\mathcal{A}}(t)$, $t > 0$, es la función definida en el Teorema 1.

Observación 7 La función de densidad de retornos cortos no es una función de densidad en términos probabilistas.

Lema 4 *Bajo las hipótesis del Teorema 1, se cumple que la función de densidad de retornos cortos es monótona decreciente.*

Demostración 6 Del Teorema 1 se tiene que $\lim\limits_{t \to 0^+} R_{\mathcal{A}}(t) = h_T(\mu)$. Además, $W(0) = 0$ y $M(1) = 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, la función $h(\lambda) = 1 - \lambda l$ interpola linealmente entre los valores $\left\{0, \frac{1}{k+1}\right\}$ en el intervalo $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$; de hecho satisface $h\left(\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}$ y $h\left(\frac{1}{k}\right) = 0$. Por el inciso *ii*) del Teorema 1 se obtiene que W es localmente Lipschitz continua, y por lo tanto continua. De lo anterior se sigue que la función de densidad de retornos cortos M es continua en el intervalo $]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}[$ y toma los valores $M\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}W(k-1)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por el Lema del Empate, M es continua en $]0,1]$. De hecho, para cada $k \in \mathbb{N}$, M posee la siguiente representación lineal

$$M(\lambda) = \lambda((k+1)W(k-1) - kW(k)) + W(k) - W(k-1),$$

para toda $\lambda \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$. Para demostrar que M es monótona decreciente, bastará ver que $(k+1)W(k-1) - kW(k) \leq 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Consideremos la función $t \mapsto \frac{1}{t}W(t-1)$ donde $t \geq 1$. Enseguida probaremos que $\frac{1}{t}W(t-1)$ es monótona creciente. En efecto, nótese que

$$\frac{1}{t}W(t-1) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{nt} |\ln(Z_n(t-1))|. \tag{3.12}$$

Además,

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{nt}|\ln(Z_n(t-1))| = \frac{1}{t^2 Z_n(t-1)}\sum_{A_n\in\mathcal{A}^n}(\mu(A_n))^t\left|\ln\left(\frac{(\mu(A_n))^t}{Z_n(t-1)}\right)\right| > 0.$$

Luego, para toda $1 \leq s < t$ y cada $n \in \mathbb{N}$, se satisface

$$\frac{1}{ns}|\ln(Z_n(s-1))| \quad < \quad \frac{1}{nt}|\ln(Z_n(t-1))|,$$

lo cual implica que $\frac{1}{s}W(s-1) \leq \frac{1}{t}W(t-1)$. Se sigue que la función $t \mapsto \frac{1}{t}W(t-1)$ es monótona creciente en $[1,\infty[$. Lo anterior implica que $(k+1)W(k-1)-kW(k) \leq 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y por lo tanto que M es monótona decreciente como función de λ.

Teorema 8 *Bajo las hipótesis del Teorema 1, se satisface*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\ln(\mu(\mathcal{C}_n(\delta)))| \quad = \quad M(\delta)$$

para $\delta \in]0,1[$, donde M es la función de densidad de retornos cortos.

Demostración 7 Usando (3.10), (3.11) y la hipótesis de que $\delta \in]0,1[$, se obtiene

$$\mu(\mathcal{C}_n(\delta)) \quad \leq \quad n\max_{\lambda\in]0,\delta]}\mu(\mathcal{S}_n(\lambda)) \leq n\mu(\mathcal{S}_n(\lambda^*))$$

para algún $\lambda^* \in]0,\delta]$. Lo anterior implica que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\ln(\mu(\mathcal{C}_n(\delta)))| \quad \geq \quad \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\ln(\mu(\mathcal{S}_n(\lambda^*)))|. \tag{3.13}$$

Usando la desigualdad (3.13), el Lema 4 y el Lema 6, se obtiene

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\ln(\mu(\mathcal{C}_n(\delta)))| \geq M(\lambda^*) \geq M(\delta). \tag{3.14}$$

Obsérvese que

$$B_n(\lfloor n\delta\rfloor) \subset \mathcal{C}_n(\delta),$$

y por consiguiente

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\ln(\mu(\mathcal{C}_n(\delta)))| \;\leq\; \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\ln(\mu(B_n(\lfloor n\delta\rfloor)))|. \tag{3.15}$$

De la desigualdad (3.15) y el Teorema 9 obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\ln(\mu(\mathcal{C}_n(\delta)))| \;\leq\; M(\delta). \tag{3.16}$$

Concatenando las desigualdades (3.14) y (3.16) se concluye la demostración del Teorema 8.

El siguiente lema nos será de gran utilidad para demostrar el Teorema 9.

Lema 5 *Supongamos las hipótesis del Teorema 1. Si* $\gamma \in]0,1[$, *entonces para toda* $\lambda \in]0,1[$ *y para* n *suficientemente grande se satisface*

$$\mu(B_n(j)) \;\geq\; e^{-\mathcal{O}(n^\gamma)} Z_r(w_n) Z_{j-r}(w_n - 1),$$

donde $B_n(j)$ *está dado por (3.7),* $j = \lfloor \lambda n \rfloor$ *y* $n = w_n j + r$, *con* $r \in \{0, 1, \dots, j-1\}$ *y* $w_n = \lfloor n/j \rfloor$.

Demostración 8 Consideraremos dos casos: $\lambda \in]0, 1/2]$ y $\lambda \in]1/2, 1[$.

i) Sean $\lambda \in]0, 1/2]$. Obsérvese que todo $n \in \mathbb{N}$ se puede escribir como $n = w_n j + r$, donde $j = \lfloor n\lambda \rfloor$ y $r \in \{0, \dots, j-1\}$. Sea $A_n \in B_n(j)$. De la representación simbólica de A_n dada en (3.8) se sigue que

$$A_n \;=\; \left(\bigcap_{k=0}^{w_n - 1} T^{-jk}(A_j(A_n))\right) \cap T^{-jw_n}(A_r(A_n)),$$

donde $A_j(A_n)$ es el j-cilindro que contiene al n-cilindro A_n y $A_r(A_n)$ es el r-cilindro que contiene a A_n. Tomemos $\Delta_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $\Delta_0 < r$ y $\Delta_0 < j - r$. Considérese

$$\tilde{A}_n \;=\; \left(\bigcap_{k=0}^{w_n} T^{-jk}(A_{r-\Delta_0}(A_n))\right) \cap \left(\bigcap_{k=0}^{w_n} T^{-jk-r}(A_{j-r-\Delta_0}(A_n))\right).$$

Nótese que $A_n \subset \tilde{A}_n$, y por lo tanto $\mu(A_n) \leq \mu(\tilde{A}_n)$. Para obtener una comparación opuesta de la medidas $\mu(A_n), \mu(\tilde{A}_n)$, utilizaremos una técnica análoga a la empleada en la demostración del inciso i) del Teorema 1. Sean $\beta > 1$ y Δ un entero mayor que 1. Denotemos por

$$\mathcal{G}_{n,j}^{\beta} = \left\{ A_n \in \mathcal{A}^n : A_n \in B_n(j),\ \mu(A_n) \geq e^{-2w_n(\Delta+\Delta_0)^{\beta}} \mu(\tilde{A}_n) \right\}.$$

Queremos comparar la medida μ de los n-cilindros de $\mathcal{G}_{n,j}^{\beta}$, con la medida $\mu(\tilde{A}_n)$. Sea $H_{n,j}^{\beta} = \bigcup_{A_n \in \mathcal{G}_{n,j}^{\beta}} A_n$. De manera análoga a la demostración del inciso i) del Teorema 1 obtenemos que

$$\tilde{A}_n = \bigcup_{A'_n \subset \tilde{A}_n,\ A'_n \in \mathcal{G}_{n,j}^{\beta}} A'_n$$

y

$$\left| \left\{ A'_n \in \mathcal{A}^n : A'_n \subset \tilde{A}_n \right\} \right| \leq |\mathcal{A}|^{2w_n \Delta_0}.$$

Consecuentemente,

$$\mu \left(\bigcup_{A'_n \subset \tilde{A}_n,\ A'_n \in \mathcal{G}_{n,j}^{\beta}} A'_n \right) \geq \left(1 - |\mathcal{A}|^{2w_n \Delta_0} e^{-2w_n(\Delta+\Delta_0)^{\beta}} \right) \mu(\tilde{A}_n).$$

Luego, tomamos β suficientemente grande de manera que

$$|\mathcal{A}|^{2w_n \Delta_0} e^{-2w_n(\Delta+\Delta_0)^{\beta}} < 1.$$

El mismo razonamiento de la prueba del inciso i) del Teorema 1 nos garantiza que existe $A'_n \subset \tilde{A}_n$ tal que $A'_n \in \mathcal{G}_{n,j}^{\beta}$. Por lo cual,

$$\mu\left(B_n(j)\right) \geq \mu(H_{n,j}) \geq e^{-2w_n(\Delta+\Delta_0)^{\beta}} \sum_{\tilde{A}_n} \mu(\tilde{A}_n),$$

donde la suma es sobre todos los $\tilde{A}_n$ para los cuales existe $A_n \in B_n(j)$. Dado que cada $A_n \in B_n(j)$ posee la representación simbólica $(x_0, \ldots, x_{j-1},)^{w_n} x_0, \ldots, x_{r-1}$, entonces la representación simbólica de $\tilde{A}_n$ es

$$(x_0, \ldots, x_{r-\Delta_0-1}, x_r, \ldots, x_{j-\Delta_0-1})^{w_n} x_0, \ldots, x_{r-\Delta_0-1}.$$

Luego, por el Lema 1 se tiene que para Δ suficientemente grande

$$\begin{aligned}\mu(\tilde{A}_n) \;\geq\; & (1-\psi^-(\Delta))^{2w_n+1}(\mu(A_{r-\Delta_0}(x_0,\ldots,x_{r-\Delta_0-1})))^{w_n+1}\times \\ & (\mu(A_{j-r-\Delta_0}(x_r,\ldots,x_{j-\Delta_0-1})))^{w_n},\end{aligned}$$

donde $A_{r-\Delta_0}(x_0,\ldots,x_{r-\Delta_0-1})$ es el $(r-\Delta_0)$-cilindro que posee la representación simbólica $x_0,\ldots,x_{r-\Delta_0-1}$ y $A_{j-r-\Delta_0}(x_r,\ldots,x_{j-\Delta_0-1})$ es el $(j-r-\Delta_0)$-cilindro que posee la representación simbólica $x_r,\ldots,x_{j-\Delta_0-1}$. Por consiguiente, para Δ suficientemente grande se satisface

$$\begin{aligned}\sum_{\tilde{A}_n}\mu(\tilde{A}_n) \;\geq\; & (1-\psi^-(\Delta))^{2w_n+1}\times \\ & \sum_{x_0,\ldots,x_{r-\Delta_0-1}}(\mu(A_{r-\Delta_0}(x_0,\ldots,x_{r-\Delta_0-1})))^{w_n+1}\times \\ & \sum_{x_r,\ldots,x_{j-\Delta_0-1}}(\mu(A_{j-r-\Delta_0}(x_r,\ldots,x_{j-\Delta_0-1})))^{w_n} \\ & =(1-\psi^-(\Delta))^{2w_n+1}Z_{r-\Delta_0}(w_n)Z_{j-r-\Delta_0}(w_n-1),\end{aligned}$$

donde Z_m es la función definida en la Definición 8. Consecuentemente,

$$\mu(B_n(j)) \;\geq\; (1-\psi^-(\Delta))^{2w_n+1}e^{-2w_n\Delta^\beta}Z_{r-\Delta_0}(w_n)Z_{j-r-\Delta_0}(w_n-1).$$

Obsérvese que se cumple las desigualdades

$$\begin{aligned}\mu(A_r(x_0,\ldots,x_{r-1})) \;&\leq\; \mu(A_{r-\Delta_0}(x_0,\ldots,x_{r-\Delta_0-1})), \\ |\{A_n\in\mathcal{A}^n : A_r\subset A_{r-\Delta_0}\}| \;&\leq\; |\mathcal{A}|^{\Delta_0}.\end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene que

$$\begin{aligned}Z_{r-\Delta_0}(w_n) \;&=\; \sum_{x_0,\ldots,x_{r-\Delta_0-1}}(\mu(A_{r-\Delta_0}(x_0,\ldots,x_{r-\Delta_0-1})))^{w_n+1} \\ &\geq\; \frac{1}{|\mathcal{A}|^{\Delta_0}}\sum_{x_0,\ldots,x_{r-1}}(\mu(A_{r-\Delta_0}(x_0,\ldots,x_r)))^{w_n+1},\end{aligned}$$

por lo cual $Z_{r-\Delta_0}(w_n)\geq|\mathcal{A}|^{-\Delta_0}Z_r(w_n)$. De manera análoga se verifica que $Z_{j-r-\Delta_0}(w_n-1)\geq|\mathcal{A}|^{-\Delta_0}Z_{j-r}(w_n-1)$. Luego,

$$\mu(B_n(j)) \;\geq\; (1-\psi^-(\Delta))^{2w_n+1}e^{-2w_n(\Delta+\Delta_0)^\beta}|\mathcal{A}|^{-2\Delta_0}Z_r(w_n)Z_{j-r}(w_n-1).$$

Tomando $\Delta = \lfloor j^\alpha \rfloor$, donde $\alpha \in]0,1[$ es tal que $\alpha\beta \leq \gamma$, se obtiene

$$\mu(B_n(j)) \geq e^{-\mathcal{O}(n^\gamma)} Z_r(w_n) Z_{j-r}(w_n - 1).$$

ii) Supongamos que $\lambda \in]1/2, 1[$. Sea $j = \lfloor \lambda n \rfloor$ y $n = j + r$, donde $r \in \{0, \ldots, j-1\}$. Si $A_n \in B_n(j)$, entonces de la representación simbólica dada en (3.9) se obtiene $A_n = A_r(A_n) \cap T^{-r}(A_{n-2r}(T^r(A_n))) \cap T^{-j}(A_r(A_n))$. Escogemos Δ suficientemente grande, pero que satisfaga $n - 2r - \Delta > 0$, y definimos

$$\tilde{A}_n = A_{r-\Delta} \cap T^{-j}(A_{r-\Delta}(A_n)) \cap T^{-r}(A_{n-2r-\Delta}(T^r(A_n))).$$

Nuevamente, para $\beta > 1$ definimos

$$\mathcal{G}^\beta_{n,j} = \left\{ A_n \in \mathcal{A}^n : A_n \in B_n(j),\ \mu(A_n) \geq e^{-\Delta^\beta} \mu(\tilde{A}_n) \right\}.$$

Escojamos $\beta > 1$ suficientemente grande de manera que $|\mathcal{A}|^{2\Delta} e^{-\Delta^\beta} < 1$. Un argumento análogo al empleado en la demostración del inciso *i)* nos garantiza que existe $A'_n \in \mathcal{G}^\beta_{n,j}$ tal que $A'_n \subset \tilde{A}_n$, y consecuentemente,

$$\mu(B_n(j)) \geq \mu(H_{n,j}) \geq e^{-\Delta^\beta} \sum_{\tilde{A}_n} \mu(\tilde{A}_n),$$

donde $H_{n,j} = \bigcup_{A_n \in \mathcal{G}^\beta_{n,j}} A_n$ y la suma es sobre todos los $\tilde{A}_n$ para los cuales existe $A_n \in B_n(j)$. Usando que cada $A_n \in B_n(j)$ es de la forma $x_0, \ldots, x_{r-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{n-2r-1}, x_0, \ldots, x_{r-1}$, obtenemos que la representación simbólica de $\tilde{A}_n$ es

$$x_0, \ldots, x_{r-\Delta-1}, x_r, \ldots, x_{j-\Delta-1}, x_0, \ldots, x_{r-\Delta-1}.$$

Luego, del Lema 1 se obtiene que para Δ suficientemente grande se cumple

$$\begin{aligned}\mu(\tilde{A}_n) \geq\ & (1 - \psi^-(\Delta))^2 (\mu(A_{r-\Delta}(x_0, \ldots, x_{r-\Delta-1})))^2 \times \\ & \mu(A_{j-r-\Delta}(x_r, \ldots, x_{j-\Delta-1})),\end{aligned}$$

donde $A_{r-\Delta}(x_0, \ldots, x_{r-\Delta-1})$ es el $(r-\Delta)$-cilindro que posee la representación simbólica $x_0, \ldots, x_{r-\Delta-1}$, y $A_{j-r-\Delta}(x_r, \ldots, x_{j-\Delta-1})$ es el

$(j-r-\Delta)$-cilindro que posee la representación simbólica $x_r, \ldots, x_{j-\Delta-1}$. Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\sum_{\tilde{A}_n} \mu(\tilde{A}_n) \quad &\geq \quad (1-\psi^-(\Delta))^2 \times \\
&\sum_{x_0,\ldots,x_{r-\Delta-1}} (\mu(A_{r-\Delta}(x_0,\ldots,x_{r-\Delta-1})))^2 \times \\
&\sum_{x_r,\ldots,x_{j-\Delta-1}} \mu(A_{j-r-\Delta}(x_r,\ldots,x_{j-\Delta-1})) \\
&= (1-\psi^-(\Delta))^2 Z_{r-\Delta}(1) Z_{j-r-\Delta}(0) \\
&= (1-\psi^-(\Delta))^2 Z_r(w_n) Z_{j-r-\Delta}(w_n-1),
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene de manera análoga a como se hizo para el inciso $i)$ y del hecho que $w_n = 1$. Nuevamente, un argumento similar al inciso $i)$ nos ayuda a concluir el resultado.

Teorema 9 *Bajo las hipótesis del Teorema 8, para toda $\lambda \in]0,1[$ se satisface*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\ln(\mu(B_n(\lfloor n\lambda \rfloor)))| \quad \leq \quad M(\lambda),$$

donde M es la función de densidad de retornos cortos.

Demostración 9 Obsérvese que para n suficientemente grande podemos escribir $n = w_n j + r$, con $j = \lfloor \lambda n \rfloor$, $w_n = \lfloor n/j \rfloor$ y $r \in \{0,1,\ldots,j-1\}$. Además, utilizando el Lema 5, se satisface que para $\gamma \in]0,1[$

$$\frac{|\ln(\mu(B_n(j)))|}{n} \quad \leq \quad \frac{\mathcal{O}(n^\gamma)}{n} + \frac{|\ln(Z_r(w_n))|}{n} + \frac{|\ln(Z_{j-r}(w_n-1))|}{n}.$$

De la desigualdad anterior y del hecho de que $\gamma \in]0,1[$ se sigue que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\ln(\mu(B_n(j)))|}{n} \quad \leq \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{|\ln(Z_r(w_n))|}{n} + \limsup_{n\to\infty} \frac{|\ln(Z_{j-r}(w_n-1))|}{n}.$$

Nótese que se tienen las siguientes igualdades

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \lfloor n/\lfloor \lambda n \rfloor \rfloor = \lfloor 1/\lambda \rfloor = l, \tag{3.17}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lfloor \lambda n \rfloor}{n} w_n\right) = 1 - \lambda l, \tag{3.18}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{j-r}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lfloor \lambda n \rfloor}{n}(1 + w_n) - 1\right) = \lambda(1 + l) - 1. \tag{3.19}$$

Obsérvese además, que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\ln(Z_r(w_n))|}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{r}{n} \frac{|\ln(Z_r(w_n))|}{r} = \limsup_{n\to\infty} \frac{r}{n} W(w_n), \tag{3.20}$$

donde $W(t) = tR_{\mathcal{A}}(t)$, $t > 0$. Como consecuencia del Teorema 1 se obtiene que W es una función continua pues de hecho es localmente Lipschitz continua. Por consiguiente, de las desigualdades (3.17), (3.18), la igualdad (3.21) y la continuidad de W, se obtiene

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\ln(Z_r(w_n))|}{n} = (1 - \lambda l)W(l). \tag{3.21}$$

Nuevamente, nótese que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\ln(Z_{j-r}(w_n - 1))|}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{j-r}{n} W(w_n - 1). \tag{3.22}$$

De las desigualdades (3.17), (3.19), la igualdad (3.22) y la continuidad de W se obtiene

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\ln(Z_{j-r}(w_n - 1))|}{n} = (\lambda(1 + l) - 1)W(l - 1). \tag{3.23}$$

Como consecuencia de las desigualdades (3.19) y (3.23) se obtiene

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\ln(\mu(B_n(\lfloor n\lambda \rfloor)))|}{n} \leq M(\lambda), \tag{3.24}$$

donde M es la función de densidad de retornos cortos.

Lema 6 *Bajo las hipótesis del Teorema 8, se cumple la desigualdad*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\ln(\mu(\mathcal{S}_n(\lambda)))|}{n} \quad \geq \quad M(\lambda)$$

para $\lambda \in]0,1[$*, donde* M *es la función de densidad de retornos cortos.*

Demostración 10 Nuevamente, utilizaremos la representación simbólica de los n-cilindros $A_n \in B_n(j)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, y estudiaremos por separado los casos $\lambda \in]0, 1/2]$ y $\lambda \in]1/2, 1[$.

i) Supongamos que $\lambda \in]0, 1/2]$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que $n = w_n j + r$, donde $j = \lfloor \lambda n \rfloor$, $w_n = \lfloor n/j \rfloor$ y $r \in \{0,\ldots,j-1\}$. En términos de la representación simbólica se tiene que todo $A_n \in B_n(j)$ es de la forma $(x_0,\ldots,x_{j-1},)^{w_n} x_0,\ldots,x_{r-1}$. Nótese que $\mathcal{S}_n(\lambda) \subset B_n(j)$. Luego, utilizando el Lema 1, para Δ suficientemente grande se satisface que

$$\begin{aligned}
\mu(\mathcal{S}_n(\lambda)) &\leq \mu(B_n(j)) \\
&= \sum_{A_n \in B_n(j)} \mu(A_n) \\
&\leq \left(1+\psi^+(\Delta)\right)^{2w_n+1} \sum_{x_0,\ldots,x_{r-1}} (\mu(A_r(x_0,\ldots,x_{r-1})))^{w_n+1} \times \\
&\quad \sum_{x_r,\ldots,x_{j-1}} (\mu(A_{j-r}(x_r,\ldots,x_{j-1}))^{w_n},
\end{aligned}$$

donde $A_r(x_0,\ldots,x_{r-1})$ es el r-cilindro que posee la representación simbólica $(x_0,\ldots,x_{r-1})$ y $A_{j-r}(x_r,\ldots,x_{j-1})$ es el $(j-r)$-cilindro que posee la representación simbólica $(x_r,\ldots,x_{j-1})$. Consecuentemente, para Δ suficientemente grande se satisface

$$\mu(\mathcal{S}_n(\lambda)) \leq \left(1+\psi^+(\Delta)\right)^{2w_n+1} Z_r(w_n) Z_{j-r}(w_n-1).$$

De manera análoga a la demostración de la Proposición 9 se obtiene

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\ln(\mu(\mathcal{S}_n(\lambda)))|}{n} \quad \geq \quad M(\lambda).$$

ii) Supongamos que $\lambda \in]1/2, 1[$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$, el cual podemos escribir como $n = j + r$, donde $j = \lfloor \lambda n \rfloor$ y $r \in \{0,\ldots,j-1\}$. Nuevamente, debido a la representación simbólica de los conjuntos $A_n \in B_n(j)$ y el Lema 1 se obtiene que para Δ suficientemente grande

$$\mu(\mathcal{S}_n(\lambda)) \le \left(1+\psi^+(\Delta)\right)^3 \sum_{x_0,\ldots,x_{r-1}} (\mu(A_r(x_0,\ldots,x_{r-1})))^2 \times \sum_{x_r,\ldots,x_{n-r-1}} \mu(A_{n-2r}(x_r,\ldots,x_{n-r-1}),$$

donde $A_r(x_0,\ldots,x_{r-1})$ es el r-cilindro que posee la representación simbólica $(x_0,\ldots,x_{r-1})$ y $A_{n-2r}(x_r,\ldots,x_{n-r-1})$ es el $(n-2r)$-cilindro que posee la representación simbólica $(x_r,\ldots,x_{n-r-1})$. Consecuentemente, para Δ suficientemente grande se satisface

$$\mu(\mathcal{S}_n(\lambda)) \le \left(1+\psi^+(\Delta)\right)^3 Z_r(1) Z_{n-2r}(0).$$

De manera análoga a la demostración de la Proposición 9 y usando el hecho de que $l=1$, pues $\lambda \in]1/2, 1[$, se obtiene

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\ln(\mu(\mathcal{S}_n(\lambda)))|}{n} \ge M(\lambda).$$

Lema 7 *Bajo las hipótesis del Teorema 1, se satisface*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\ln(\mu(\mathcal{C}_n(\lambda)))|}{n} \le h_T(\mu)(1-\lambda)$$

para toda $\lambda \in]0,1[$, donde $h_T(\mu)$ representa la entropía métrica de T.

Demostración 11 Sea $\delta \in]0,1[$. Nótese que $B_n(\lfloor \delta n \rfloor) \subset \mathcal{C}_n(\delta)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $A_n \in \mathcal{A}^n$. Dado que $\delta \in]0,1[$, se cumple $n - \lfloor \delta n \rfloor \ge 1$. Luego, podemos escribir A_n de la manera

$$A_n = A^{i_0} \cap \cdots \cap T^{-(\lfloor \delta n \rfloor -1)}(A^{i_{\lfloor \delta n \rfloor -1}}) \cap \cdots \cap T^{-(n-1)}(A^{i_{n-1}}),$$

donde $A^{i_j} \in \mathcal{A}$ para toda $j \in \{0,\ldots,n-1\}$. Defínanse

$$\begin{aligned} A^*_{\lfloor \delta n \rfloor} &= A^{i_0} \cap \cdots \cap T^{-(\lfloor \delta n \rfloor -1)}(A^{i_{\lfloor \delta n \rfloor -1}}), \\ A^*_{n-\lfloor \delta n \rfloor} &= A^{i_{\lfloor \delta n \rfloor}} \cap \cdots \cap T^{-(n-\lfloor \delta n \rfloor -1)}(A^{i_{n-1}}). \end{aligned}$$

Debido al Lema 1 se tiene que para Δ suficientemente grande se satisface

$$\mu(A_n) \ge (1-\psi^-(\Delta))\mu\left(A^*_{\lfloor \delta n \rfloor}\right)\mu\left(T^{-\lfloor \delta n \rfloor}\left(A^*_{n-\lfloor \delta n \rfloor}\right)\right)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que $A_n \subset A^*_{\lfloor \delta n \rfloor}$ y que $T^{\lfloor \delta n \rfloor}(A_n) \subset A^*_{n-\lfloor \delta n \rfloor}$. Usando el Teorema de Egorov y el Teorema de Shannon-McMillan-Breiman se obtiene que para cada $\epsilon \in]0,1[$ existe $\tilde{X}_\epsilon \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(\tilde{X}_\epsilon) > 1-\epsilon$, y que $\frac{|\ln(A_n(x))|}{n}$ converge uniformemente en $x \in \tilde{X}_\epsilon$ a $h_T(\mu)$ cuando $n \to \infty$. Consecuentemente, se obtiene que para Δ suficientemente grande y $n \geq N_\epsilon$ se satisface

$$\begin{aligned}
\mu(\mathcal{C}_n(\delta)) &\geq \mu(B_n(\lfloor \delta n \rfloor)) \\
&= \sum_{A_n \in B_n(\lfloor \delta n \rfloor)} \mu(A_n) \\
&\geq C(\Delta) \sum_{\substack{A_n \in B_n(\lfloor \delta n \rfloor),\\ A_n \cap \tilde{X}_\epsilon \neq \emptyset,\\ T^{\lfloor \delta n \rfloor}(A_n) \cap \tilde{X}_\epsilon \neq \emptyset}} \mu\left(A^*_{\lfloor \delta n \rfloor}\right) \mu\left(T^{-\lfloor \delta n \rfloor}\left(A^*_{n-\lfloor \delta n \rfloor}\right)\right),
\end{aligned}$$

donde $C(\Delta) = 1 - \psi^-(\Delta)$. Obsérvese que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\mu\left(\{A_n \in \mathcal{A}^n : A_n \subset X \setminus \tilde{X}_\epsilon \ \text{ ó } \ T^{\lfloor \delta n \rfloor}(A_n) \subset X \setminus \tilde{X}_\epsilon\}\right) \leq 2\epsilon.$$

Además, si $T^{\lfloor \delta n \rfloor}(A_n) \cap \tilde{X}_\epsilon \neq \emptyset$, entonces $A^*_{n-\lfloor \delta n \rfloor} \cap \tilde{X}_\epsilon \neq \emptyset$ puesto que $T^{\lfloor \delta n \rfloor}(A_n) \subset A^*_{n-\lfloor \delta n \rfloor}$. Nótese que $A_n \in B_n(\lfloor \delta n \rfloor)$, $A_n \cap \tilde{X}_\epsilon \neq \emptyset$ y $T^{\lfloor \delta n \rfloor}(A_n) \cap \tilde{X}_\epsilon \neq \emptyset$. Entonces $A^*_{\lfloor \delta n \rfloor} \in \mathcal{A}^{\lfloor \delta n \rfloor}$, $A^*_{\lfloor \delta n \rfloor} \cap \tilde{X}_\epsilon \neq \emptyset$ y $T^{\lfloor \delta n \rfloor}(A^*_{\lfloor \delta n \rfloor}) \cap \tilde{X}_\epsilon \neq \emptyset$. Además, si $A_n \neq A'_n$, entonces $A^*_{\lfloor \delta n \rfloor} \neq A'^*_{\lfloor \delta n \rfloor}$. Consecuentemente, dado que la medida μ es T invariante, para Δ suficientemente grande y $n \geq N_\epsilon$ se satisface

$$\begin{aligned}
\mu(\mathcal{C}_n(\delta)) &\geq C(\Delta) e^{-(n-\lfloor \delta n \rfloor)(h_T(\mu)+\epsilon)} \sum_{\substack{A_n \in B_n(\lfloor \delta n \rfloor),\\ A_n \cap \tilde{X}_\epsilon \neq \emptyset,\\ T^{\lfloor \delta n \rfloor}(A_n) \cap \tilde{X}_\epsilon \neq \emptyset}} \mu\left(A^*_{\lfloor \delta n \rfloor}\right) \\
&\geq C(\Delta) e^{-(n-\lfloor \delta n \rfloor)(h_T(\mu)+\epsilon)} \sum_{\substack{A_i \in \mathcal{A}^{\lfloor \delta n \rfloor},\\ A_i \cap \tilde{X}_\epsilon \neq \emptyset,\\ T^{\lfloor \delta n \rfloor}(A_i) \cap \tilde{X}_\epsilon \neq \emptyset}} \mu(A_i) \\
&\geq C(\Delta) e^{-(n-\lfloor \delta n \rfloor)(h_T(\mu)+\epsilon)}(1-2\epsilon).
\end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene que para $n \geq N_\epsilon$,

$$\frac{\ln(\mu(\mathcal{C}_n(\delta)))}{n} \geq \frac{\ln((C(\Delta)(1-2\epsilon))}{n} - \frac{(n-\lfloor \delta n \rfloor)(h_T(\mu)+\epsilon)}{n},$$

y por lo tanto,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\ln(\mu(\mathcal{C}_n(\delta)))}{n} \quad \geq \quad -(h_T(\mu)+\epsilon)(1-\delta).$$

Haciendo $\epsilon \to 0^+$ obtenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\ln(\mu(\mathcal{C}_n(\delta)))|}{n} \quad \leq \quad h_T(\mu)(1-\delta).$$

Lema 8 *Para cada $\delta \in]0,1[$, se satisface*

$$B_n(\lfloor \delta n \rfloor) \subset C_n(\delta) \subset \bigcup_{j=1}^{\lfloor \delta n \rfloor} [\tau_n(A_n)=j] = \bigcup_{j=1}^{\lfloor \delta n \rfloor} B_n(j) = \bigcup_{j=\lfloor \frac{\lfloor \delta n \rfloor}{2} \rfloor}^{\lfloor \delta n \rfloor} B_n(j),$$

donde $[\tau_n(A_n)=j] = \{A_n \in \mathcal{A}^n : \tau_n(A_n)=j\}$ para cada $j \in \{1,\ldots,\lfloor \delta n \rfloor\}$.

Demostración 12 Las primeras dos contenciones y la primera igualdad son inmediatas, por lo cual solamente demostraremos la última igualdad. Sea $x = \lfloor \delta n \rfloor$ y $j \in \{1,\ldots,\lfloor x/2 \rfloor\}$. Entonces $x = \lfloor x/j \rfloor j + r_j$ con $r_j \in \{0,\ldots,\lfloor x/2 \rfloor\}\}$. Nótese que $\lfloor x/j \rfloor j \in \{\lfloor x/2 \rfloor,\ldots,x\}$. Luego, para cada $j \in \{1,\ldots,\lfloor x/2 \rfloor\}$, $B_n(j) \subset B_n(i)$, donde $i = \lfloor x/j \rfloor j$. De esto último se concluye el resultado.

Lema 9 *Bajo las hipótesis del Teorema 1 se cumple que*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|\ln(\mu(\mathcal{C}_n(\lambda)))|}{n} \quad \geq \quad \gamma_\mu(1-\lambda)$$

para toda $\lambda \in]0,1[$, donde γ_μ esta dada en la Definición 13.

Demostración 13 Sea $\delta \in]0,1[$. Del Lema 8 se obtiene

$$C_n(\delta) \subset \bigcup_{j=\lfloor \frac{\lfloor \delta n \rfloor}{2} \rfloor}^{\lfloor \delta n \rfloor} B_n(j).$$

Luego,

$$\mu(\mathcal{C}_n(\delta)) \leq \sum_{\lfloor \frac{\lfloor \delta n \rfloor}{2} \rfloor \leq j \leq \lfloor \delta n \rfloor} \mu(B_n(j)) \leq n \max_{\lfloor \frac{\lfloor \delta n \rfloor}{2} \rfloor \leq j \leq \lfloor \delta n \rfloor} \mu(B_n(j)) \leq n\mu(B_n(j^*)),$$

donde $j^* \in \{\lfloor\frac{\lfloor\delta n\rfloor}{2}\rfloor, \ldots, \lfloor\delta n\rfloor\}$. Sea $A_n \in \mathcal{A}^n$. Entonces

$$A_n = A^{i_0} \cap \cdots \cap T^{-(n-1)}(A^{i_{n-1}}),$$

donde $A^{i_j} \in \mathcal{A}$ para toda $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Defínanse

$$\begin{aligned} A^*_{j^*} &= A^{i_0} \cap \cdots \cap T^{-(j^*-1)}(A^{i_{j^*-1}}), \\ A^*_{n-j^*} &= A^{i_{j^*}} \cap \cdots \cap T^{-(n-j^*-1)}(A^{i_{n-1}}). \end{aligned}$$

Debido al Lema 1 se tiene que para toda $\Delta \in \mathbb{N}$ se satisface

$$\mu(A_n) \;\leq\; (1+\psi^+(\Delta))\mu\left(A^*_{j^*}\right)\mu\left(T^{-j^*}\left(A^*_{n-j^*}\right)\right)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\sum_{A_n \in B_n(j^*)} \mu(A_n) \;\leq\; C^*(\Delta) \sum_{A_n \in B_n(j^*)} \mu\left(A^*_{j^*}\right)\mu\left(T^{-j^*}\left(A^*_{n-j^*}\right)\right),$$

donde $C^*(\Delta) = 1 + \psi^+(\Delta)$. Por definición de γ_μ, se satisface que para $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n - j^* \geq N_\epsilon(\delta)$,

$$\mu(A_{n-j^*}) \;\leq\; e^{-(n-j^*)(\gamma_\mu - \epsilon)}$$

para toda $A_{n-j^*} \in \mathcal{A}^{n-j^*}$. Obsérvese que $\frac{N_\epsilon + j^*}{n} \leq \delta + \frac{N_\epsilon(\delta)}{n}$, ya que $j^* \leq n\delta$. Dado que $\delta \in]0,1[$, existe $N'_\epsilon(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N'_\epsilon(\delta)$ se satisface $n - j^* \geq N_\epsilon(\delta)$. Por consiguiente, para toda $n \geq N'_\epsilon(\delta)$,

$$\begin{aligned} \sum_{A_n \in B_n(j^*)} \mu(A_n) &\leq C^*(\Delta) e^{-(n-j^*)(\gamma_\mu - \epsilon)} \sum_{A_{j^*} \in \mathcal{A}^{j^*}} \mu\left(A_{j^*}\right) \\ &= C^*(\Delta) e^{-(n-j^*)(\gamma_\mu - \epsilon)}. \end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene que para toda $n \geq N'_\epsilon(\delta)$ se verifica

$$\mu(\mathcal{C}_n(\delta)) \;\leq\; nC^*(\Delta) e^{-(n-j^*)(\gamma_\mu - \epsilon)}.$$

Luego, para toda $n \geq N'_\epsilon(\delta)$ se cumple

$$\frac{\ln(\mu(\mathcal{C}_n(\delta)))}{n} \;\leq\; \frac{\ln(nC^*(\Delta))}{n} - \frac{(n-j^*)(\gamma_\mu - \epsilon)}{n},$$

donde $j^* \in \{\lfloor\frac{\lfloor\delta n\rfloor}{2}\rfloor, \ldots, \lfloor\delta n\rfloor\}$. Haciendo $n \to \infty$ se obtiene

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln(\mu(\mathcal{C}_n(\delta)))}{n} \;\leq\; -(\gamma_\mu - \epsilon)(1-\delta).$$

Consecuentemente, haciendo $\epsilon \to 0^+$ resulta

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|\ln(\mu(\mathcal{C}_n(\delta)))|}{n} \;\geq\; \gamma_\mu(1-\delta).$$

Discusiones y conclusiones

En este trabajo se presentaron los conceptos y herramientas necesarias para entender la función de entropía de Rényi, así como la técnicas necesarias para demostrar la existencia, continuidad, comportamiento en el cero y en el infinito de dicha función. Las técnicas de demostración empleadas en [HV] resultan importantes ya que hasta la fecha eran pocos los casos en los cuales se había podido demostrar la existencia de la función de entropía de Rényi. A través de las técnicas de demostración empleadas en [HV] se podrían considerar medidas mezclantes más generales que las débilmente ψ-mezclantes y demostrar la existencia y propiedades analíticas de la función de entropía de Rényi.

Como consecuencia del Teorema de Shannon-McMillan-Breiman y el Teorema de Brin-Katok, la entropía métrica emerge en grandes desviaciones. Lo anterior sugiere que la función de entropía de Rényi también emergerá en grandes desviaciones. En este trabajo, siguiendo las ideas de los articulos [AV] y [HV], se demuestra que la función de entropía de Rényi emerge en la tasa de decaimiento subexponencial de la medida de los retornos cortos. A pesar de que el resultado anterior representa un estimación muy fina del decaimiento subexponencial de la distribución dada por (3.4), en la mayoría de los sistemas dinámicos medibles es muy difícil calcularla ya que son muy pocos los casos en los cuales es posible calcular la función de entropía de Rényi. Por lo anterior, al final de este trabajo se presentan dos lemas los cuales nos dan cotas para el decaimiento subexponencial de la distribución dada por (3.4) en función de la entropía métrica y de la tasa de decaímiento subexponencial del máximo de las medidas de los n-cilindros. Estos dos lemas nos permiten realizar estimaciones de dicho decaimiento subexponencial para una clase más amplia de sistemas dinámicos medibles. Sin embargo, recordemos que el cálculo de entropías métricas y de la tasa de decaímiento subexponencial del máximo de las medidas de los n-cilindros resultan ser un problema complejo.

Una posible extensión natural de estos lemas sería encontrar cotas en función de expresiones más fáciles de calcular. Sin embargo, dicha extensión posiblemente esta lejana ya que dado explícitamente un sistema dinámico y un ϵ positivo, en general no existe un algoritmo que aproxime la entropía métrica o la entropía topológica con error a lo sumo ϵ. En mapeos celulares autómatas del conjunto de Cantor en sí mismo, Hurd, Kari y Culik en [HK] demostraron que la entropía topológica no es algorítmicamente calculable en general. Consecuentemente, por el Principio Variacional la entropía métrica tampoco es algorítmicamente calculable. Lo anterior nos sugiere que los resultados presentados en [HV] son muy generales y representan estimaciones muy finas de la medida asintótica de los retornos cortos, y posiblemente sólamente se pueden encontrar expresiones más fáciles de calcular en casos muy particulares.

Bibliografía

[AC] **V. Afraimovich, J. Chazottes & B. Saussol.** *Pointwise dimensions for Poincaré recurrence associated with maps and special flows,* Discrete & Continuous Dynamical Systems, 9, 2003, 263-280.

[AF] **V. Afraimovich.** *Pesin's dimension for Poincaré recurrence,* Chaos, 7(1), 1997, 11-20.

[AU] **V. Afraimovich, E. Ugalde & J. Urias.** *Fractal dimensions for Poincaré recurrence,* Monograph Series on Nonlinear Sciences and Complexity, 2, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[AV] **M. Abadi & S. Vaienti.** *Large deviations for short recurrence,* Discrete & Continuous Dynamical Systems, 21, 2008, 729-747.

[BG] **C. Bonanno. S. Galatolo & S. Isola.** *Recurrence and algorithmic information,* Nonlinearity, 17, 2004, 1057-1074.

[CC] **P. Collet, M. Courbage, S. Métens, A. Neishtadt & G. Zaslavsky.** *Chaotic dynamics and transport in classical and quantum systems,* Kluwer Academic Publishers, 2005.

[CD] **J. Chazottes & F. Durand.** *Local rates of Poincaré recurrence for rotations and weak-mixing,* Discrete & Continuous Dynamical Systems, 12, 2005, 175-183.

[DU] **R. Dudley.** *Real analysis and probability,* Wadsworth & Brooks, 1989.

[FH] **P. Ferrero, N. Haydn & S. Vaienti.** *Pointwise dimensions for Poincaré recurrence associated with maps and special flows,* Nonlinearity, 16, 2003, 1203-1218.

[HK] **L. Hurd, J. Kari & K. Culik** *The topological entropy of cellular automata is uncomputable,* Ergodic Theory & Dynamical Systems, 12, 1992, 255-265.

[HL] **N. Haydn, Y. Lacroix & S. Vaienti.** *Hitting and return times in ergodic dynamical systems,* The Annals of Probability, 33, 2005, 2043-2050.

[HS] **M. Hirata, B. Saussol & S. Vaienti.** *Statistics of return times: a general framework and new applications,* Communications in Mathematical Physics , 206, 1999, 33-55.

[HV] **N. Haydn & S. Vaienti.** *The Rényi entropy function and the large deviation of short return times,* Ergodic Theory & Dynamical Systems, 30, 2010, 159-179.

[KH] **A. Katok & B. Hasselblatt.** *A modern theory of dynamical systems,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications vol. 54, 1995.

[KO] **A. Kolmogorov.** *A new invariant for transitive dynamical systems,* Doklady Akademii Nauk SSSR, 119, 1958, 861-864.

[KU] **M. Kupsa.** *Local return rates in Sturmian sub-shifts,* Acta Universitatis Carolinae, Mathematica et Physica, 44, 2003, 17- 28.

[KR] **P. Kurka.** *Local return rates in substitutive sub-shifts,* Acta Universitatis Carolinae, Mathematica et Physica, 44, 2003, 29-42.

[LS] **T. Luczak & W. Szpankowski.** *A suboptimal lossy data compression based on approximate pattern matching,* IEEE, Transactions on Information Theory, 43, 1997, 1439-1451.

[MI] **J. Milnor.** *Is entropy effectively computable?,* http://www.math.sunysb.edu/dynamics/open.html, 2002.

[NA] **A. Navas,** *Entropías,* Notas.

[OR] **D. Ornstein.** *Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic,* Advances in Mathematics, 4, 1970, 337-352.

[PA] **W. Parry.** *Entropy and generators in ergodic theory,* Benjamin, New, York, 1969.

[PE] **K. Petersen.** *Ergodic theory,* Cambrigde Studies in Advanced Mathematics, 1983.

[PS] **V. Penné, B. Saussol & S. Vaienti.** *Dimensions for recurrence times: topological and dynamical properties,* Discrete & Continuous Dynamical Systems, 5, 1999, 783-798.

[RO] **V. Rohlin.** *Lectures on ergodic theory,* Russian Mathematical Surveys, 22, 1967, 1-52.

[SE] **E. Seneta.** *Non-negative matrices and Markov chains,* Springer series in Statistics , 2006.

[SH] **P. Shields.** *The theory of Bernoulli shifts,* Chicago Lectures in Mathematics Series, 1973.

[ST] **B. Saussol, S. Troubetzkoy & S. Vaienti.** *Recurrence, dimensions and Lyapunov exponents,* Journal of Statistical Physics, 106, 2002, 623-634.

[SZ] **W. Szlenk.** *Teoría ergódica,* CINVESTAV, 1979.

[TV] **F. Takens & E. Verbitsky.** *Generalized entropies,* Nonlinearity, 11(4), 1998, 771-782.

[VA] **S. Varadhan.** *Special invited paper large deviations* The Annals of Probability , 36(2), 2008, 397-419.

[WA] **P. Walters.** *An introduction to ergodic theory,* Springer-Verlag, 1982.