CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

NUEVAS MEDIDAS DE RIESGO PARA ALGUNOS PROCESOS DE LÉVY ESPECTRALMENTE NEGATIVOS

Tesis

Que para obtener el Grado de:

Maestro en Ciencias con Orientación en Probabilidad y Estadística

P R E S E N T A:

Israel Martínez Hernández

Director:

Dr. Juan Carlos Pardo Millán

Guanajuato, Guanajuato, México

19 de agosto de 2013

Integrantes del Jurado.

Presidente: Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska
Secretario: Dr. Víctor Manuel Rivero Mercado
Vocal y director de tesis: Dr. Juan Carlos Pardo Millán
Lector Especial: Dr. Víctor Manuel Pérez Abreu Carrión

Asesor:

Dr. Juan Carlos Pardo Millán.

Sustentante:

LM. Israel Martínez Hernández.

A mis padres,
Andres Martínez
y Magdalena Hernández.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia por su apoyo incondicional, en particular a mis padres por el apoyo que me brindaron durante mi preparación profesional y por sus consejos.

Agradezco al Dr. Juan Carlos Pardo Millán por haber fungido como asesor de este trabajo, así mismo, por haberme guiado en el desarrollo y así como la confianza que tuvo en mi.

De igual modo, agradezco a cada uno de los sinodales por la inversión de su valioso tiempo en la revisión y correción de esta tesis y al Dr. Victor Perez Abreu al fungir como lector especial.

A todos mis profesores que fueron pieza fundamental en mi formación académica.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca de maestría que me fue otorgada.

Índice general

Introducción

El presente trabajo concierne al área de la teoría de riesgo. Dicha teoría es tradicionalmente considerada como parte de la matemática actuarial y ha sido un área de investigación desde 1903, año en que Filip Lundberg publicó su trabajo sobre la Teoría Colectiva de Riesgo (Collective Risk Theory). Cabe mencionar que la teoría de riesgo fue estudiada muchos años atrás con un enfoque conocido actualmente como el Modelo Individual de Riesgo [Leer [12] e introducción de [11]].

Para la formulación de la Teoría Colectiva de Riesgo, Lundberg empleó procesos estocásticos a tiempo continuo, donde la compañía aseguradora se considera como una "presa", hacia la cual fluyen constantemente las primas, mientras que de ésta se extrae una serie de pagos por reclamaciones.

El modelo colectivo busca representar en términos probabilísticos el comportamiento de la reserva por riesgo de una compañía de seguros, manteniendo un equilibrio entre simplicidad y explicabilidad de los factores que interactúan con este fondo. Al mismo tiempo es un punto de partida para el desarrollo de modelos más completos y orientados a un mayor conocimiento del negocio asegurador, que giran en torno al concepto de solvencia, más amplio que el de reserva en riesgo.

El Problema de Ruina cobra significado en un entorno bien definido "La Teoría de Riesgo". Sobre el modelo de Lundberg, la probabilidad de ruina se considera como una medida sobre el grado de fluctuación de la solvencia de una aseguradora: indica la factibilidad de que las reservas que posee una compañía sean insuficientes para afrontar las obligaciones derivadas de sus contratos.

Mas tarde, Cramér en 1930, formaliza los conceptos matemáticos presentados por Lundberg [[15]]. Posteriormente, aparecen los trabajos de De Finetti, Borch, Beard, Pentikäinen, entre otros, empezando así una nueva fase, la teoría moderna de riesgo, dirigidos a resolver los problemas prácticos enfrentados por las compañías aseguradoras, tales como la determinación de tarifas, el cálculo de las reservas, la evaluación de la solidez financiera del asegurador, la caracterización del contrato de reaseguro más adecuado, entre otros. Se inicia con un artículo de De Finetti presentado en el Congreso Internacional de Actuarios en 1957, [10], donde se evalúa la validez de los supuestos del modelo colectivo y se establecen las bases para una Teoría de Riesgo que efectivamente logre modelar a una aseguradora.

Desde un punto de vista optimista, una aseguradora no deja de funcionar inmediatamente después de que está por primera vez en ruina. En dirección a la búsqueda de modelos más completos, se han desarrollado estudios sobre los tiempos de ocupación para el caso particular de un proceso de renovación, esto se puede leer en [[14]]. Adicionalmente, es de interés introducir y estudiar otros tipos de conceptos del evento de ruina, como la probabilidad de ruina tipo parisino, motivados por [17]. Esto es, cada vez que el excedente o capital esté por debajo del nivel cero se empieza a contabilizar un tiempo aleatorio (en la literatura se conoce con el nombre de reloj aleatorio), si el capital de la compañía alcanza un nivel positivo antes de que suene el reloj, entonces decimos que no ha ocurrido ruina y el modelo sigue evolucionando. Sin embargo, si el reloj suena antes de que el capital de la compañía aseguradora se haga positivo, entonces decimos que ha ocurrido ruina.

Los procesos de Lévy espectralmente negativos, son modelos que se apegan cada vez más a la realidad y a las necesidades de la compañía. Esto se debe a que muchas veces los reclamos son pequeños y llegan a gran intensidad, comportamiento que este modelo captura a diferencia del modelo clásico de Cramer-Lundberg.

El objetivo de este trabajo es estudiar nuevas medidas de riesgo que nos permitan calcular la probabilidad de ruina, a saber tipo parisino. Consideramos el modelo que representará el capital de una compañía aseguradora que percibe ingresos y reconocen un gasto, es un proceso de Lévy espectralmente negativo con trayectorias de variación acotada. Esto incluye al modelo clásico de Cramér-Lundberg [leer [9]]. Para esto se estudia una generalización de la formula de salida con una y dos barreras usando funciones escala, tomando como base el artículo [13]. La herramienta principal para lograr dicho objetivo serán las funciones de escala, [6].

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se introducen conceptos básicos de medidas aleatorias de Poisson y se mencionan algunas propiedades de éstas. También se presenta la construcción de subordinadores finalizando con el estudio del exponente de Laplace de un proceso de Lévy de variación acotada. El Capítulo 2 es de vital importancia, ya que en éste se definen las herramientas principales para el entendimiento y desarrollo del objetivo, a saber las funciones q-escala.

Se presenta la fórmula de salida con dos barreras como una aplicación de la teoría de funciones escala. El Capítulo 3 es la parte central de este trabajo. Presentamos la definición del evento de ruina tipo parisino y posteriormente una generalización del teorema de salida con dos barreras estudiado en el Capítulo 2, lo anterior tomando como base el artículo [13]. Finalmente, en el Capítulo 4 se presentan ejemplos de transformadas de Laplace del tiempo de ruina tipo parisino para los casos Exponencial y Earlang mixto, así como métodos numéricos para obtener aproximaciones de las funciones q-escala y la probabilidad de ruina en estos casos.

Capítulo 1

Construcción de Medidas Aleatorias de Poisson y Subordinadores.

En este capítulo introducimos el concepto de medida aleatoria de Poisson y subordinadores. Analizaremos varias propiedades de medidas aleatorias de Poisson las cuales permitirán introducir a los subordinadores.

1.1. Proceso de Poisson.

Definición 1.1.1 Un proceso de Poisson con parámetro $c > 0$, es un proceso de renovación $(N_t, t \geq 0)$ cuyos tiempos interarribos se distribuyen como una variable aleatoria exponencial de parámetro $c > 0$, es decir

$$dF(x) = ce^{-cx}\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}dx.$$

A continuación enunciamos una propiedad importante de este proceso, la cual es conocida como la propiedad de Markov.

Proposición 1.1.2 *Sea $(N_t, t \geq 0)$ un proceso Poisson. Entonces el proceso N_t tiene incrementos independientes y estacionarios, esto es*

- *Para $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$, las variables aleatorias*

  $$N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \cdots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}},$$

  son independientes.

- *Para toda $s, t \geq 0$*

$$N_{t+s} - N_t \stackrel{L}{=} N_s,$$

donde $\stackrel{L}{=}$ significa igualdad en ley.

Además, es un proceso de Markov homogéneo, es decir, si $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s\,;\, s \leq t)$, entonces para toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $\Lambda \in \mathcal{F}_t$ tenemos que

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Lambda f(N_{t+s}) \middle| N_t = k\right] = \mathbb{P}(\Lambda \,|\, N_t = k)\mathbb{E}\left[f(N_s + k)\right].$$

Demostración. Primero mostraremos la segunda parte del enunciado. Sea $\Lambda \in \mathcal{F}_t$ y consideremos a

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Lambda f(N_{t+s})\mathbb{1}_{\{N_t=k\}}\right].$$

Observemos que la función $\mathbb{1}_\Lambda$, bajo el evento $\{N_t = k\}$, se puede ver como una función de $(T(1), \cdots T(k))$, es decir

$$\mathbb{1}_\Lambda = \varphi\left(T(1), T(2), \cdots, T(k)\right).$$

Nuevamente, bajo el evento $\{N_t = k\}$,

$$N_{t+s} = k + \mathrm{card}\left\{p \in \mathbb{N} \,|\, T(k) + \xi_{k+1} + \xi_{k+2} + \cdots + \xi_{k+p} \leq t + s\right\}.$$

Ahora, verifiquemos que la variable aleatoria, $\xi_{k+1} - (t - T(k))$, condicionada al evento $\{\xi_{k+1} > t - T(k)\}$, se distribuye como una variable aleatoria exponencial de parámetro $c > 0$. De hecho,

$$\mathbb{P}\Big(\xi_{k+1} - (t - T(k)) > x \,\Big|\, \xi_{k+1} > t - T(k)\Big) = \frac{\mathbb{P}\Big(\xi_{k+1} - (t - T(k)) > x\Big)}{\mathbb{P}\Big(\xi_{k+1} > t - T(k)\Big)}.$$

De la independencia de $T(k)$ y ξ_{k+1}, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\xi_{k+1} - (t - T(k)) > x\Big) =& \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\xi_{k+1} - (t-T(k)) > x\}} \,\middle|\, T(k)\right]\Big] \\ =& \mathbb{E}\left[\int_{x+t-T(k)}^{\infty} ce^{-cy}\,dy\right] \\ =& \mathbb{E}\left[e^{-c(x+t-T(k))}\right].\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}\Big(\xi_{k+1} - (t - T(k)) > x \,\Big|\, \xi_{k+1} > t - T(k)\Big) = \frac{\mathbb{E}\left[e^{-c(x+t-T(k))}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{-c(t-T(k))}\right]} = e^{-cx}.$$

En consecuencia, al condicionar con respecto a $\{N_t = k\}$,

$$N_{t+s} \stackrel{L}{=} k + N_s^{'},$$

donde

$$N_s^{'} = \text{card}\left\{p \in \mathbb{N} \,\middle|\, \xi_1^{'} + \xi_2^{'} + \cdots + \xi_p^{'} \leq s\right\},$$

y $\xi_1^{'} = \xi_{k+1} - (t - T(k))$, $\xi_2^{'} = \xi_{k+2}, \cdots, \xi_p^{'} = \xi_{p+k}$. Observemos que $(\xi_i)_{1\leq i\leq k}$ y $(\xi_i^{'})_{1\leq i\leq p}$ son independientes. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_\Lambda f(N_{t+s})\mathbb{1}_{\{N_t=k\}}\Big] &= \mathbb{E}\left[\varphi\left(T(1), T(2), \cdots, T(k)\right) f(N_s^{'} + k)\mathbb{1}_{\{N_t=k\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\Big[\varphi\left(T(1), T(2), \cdots, T(k)\right) \mathbb{1}_{\{T(k)\leq t<T(k)+\xi_{k+1}\}}\Big]\mathbb{E}\left[f(N_s^{'} + k)\right],
\end{aligned}$$

lo cual prueba la propiedad de Markov.
Ahora probemos que los incrementos son independientes y estacionarios. Sea $\Lambda \in \mathcal{F}_t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_\Lambda f(N_{t+s} - N_t)\Big] &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(N_t = k)\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_\Lambda f(N_{t+s} - k) \,\Big|\, N_t = k\Big] \\
&= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(N_t = k)\mathbb{P}(\Lambda \mid N_t = k)\mathbb{E}\Big[f(N_s - k + k)\Big] \\
&= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(\Lambda,\, N_t = k)\mathbb{E}\Big[f(N_s)\Big] \\
&= \mathbb{P}(\Lambda)\mathbb{E}\Big[f(N_s)\Big],
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue de la propiedad de Markov. Procediendo de manera inductiva se obtiene que los incrementos son independientes y estacionarios.

□

Para $x \in \mathbb{R}$, denotamos por $\mathbb{P}_x$ a la ley del proceso $N_t + x$ bajo $\mathbb{P}$, esto es, $\mathbb{P}_x$ denota la ley del proceso N que parte de x al tiempo cero.

Existe un resultado mas fuerte que el anterior, en vez de considerar tiempos deterministas, se consideran ciertos tiempos aleatorios. Dicha propiedad se le conoce con el nombre de propiedad de Markov fuerte.

Proposición 1.1.3 *Sea T un $(\mathcal{F}_t)$-tiempo de paro finito casi seguramente. Sea $N_s^{'} = N_{T+s}$ y $\widetilde{N}_s = N_{T+s} - N_T$, $s \geq 0$. Entonces*

- *El proceso $\widetilde{N}$ es independiente de $\mathcal{F}_T$ y tiene la misma ley que N.*
- *El proceso N' condicionado con respecto a $\{N_T = k\}$ es independiente de $\mathcal{F}_T$ y tiene por ley $\mathbb{P}_k$.*

Demostración. Probemos que $\widetilde{N}$ es independiente de $\mathcal{F}_T$ y $N_{T+s} - N_T \stackrel{L}{=} N_s$ para toda $s \geq 0$. Si $T = t_1$, es determinista, por el resultado anterior, sabemos que se cumple el resultado. Supongamos que T toma una cantidad numerable de valores, $\{t_1, t_2, \dots\}$. Entonces para $\Lambda \in \mathcal{F}_T$ y $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}_+$ una función medible y acotada, vemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Lambda f(\widetilde{N}_{s_1}, \dots, \widetilde{N}_{s_n})\right] &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{T=k\}} f(N_{t_k+s_1} - N_{t_k}, \dots, N_{t_k+s_n} - N_{t_k})\right] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{T=k\}}\right] \mathbb{E}\left[f(N_{t_k+s_1} - N_{t_k}, \dots, N_{t_k+s_n} - N_{t_k})\right] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{T=k\}}\right] \mathbb{E}\left[f(N_{s_1}, \dots, N_{s_n})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Lambda\right] \mathbb{E}\left[f(N_{s_1}, \dots, N_{s_n})\right],
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se sigue de la propiedad de Markov. Por lo tanto tenemos que el resultado es valido para T que toma una cantidad numerable de valores.
Finalmente para el caso general, consideremos al tiempo de paro $T < \infty$ casi seguramente. Definamos $T_n = 2^{-n}\lfloor 2^n T + 1\rfloor$, $n \geq 1$, observemos que $T \leq T_n \leq T + 1/2^n < \infty$ y $T_n \searrow T$ casi seguramente. Queremos probar que para $\Lambda \in \mathcal{F}_T$ y f medible y acotada,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Lambda f(\widetilde{N})\right] = \mathbb{P}(\Lambda)\mathbb{E}\left[f(N)\right].$$

Sea $\Lambda \in \mathcal{F}_T$, como $T \leq T_n$, así, $\Lambda \in \mathcal{F}_{T_n}$. Definamos $\widetilde{N}^n_s := N_{T_n+s} - N_{T_n}$, $s \geq 0$, usando el hecho de que T_n es simple, tenemos que el resultado se cumple para este proceso. Como N tiene trayectorias continuas por la derecha y $T_n \searrow T$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{N}^n_s = \widetilde{N}_s.$$

Por lo tanto, usando el teorema de convergencia monótona, se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Lambda f(\widetilde{N}^n)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Lambda f(\widetilde{N})\right].$$

por otro lado, como T_n es simple, vemos

$$\mathbb{E}\left[f(\widetilde{N}^n)\mathbb{1}_\Lambda\right] = \mathbb{P}(\Lambda)\mathbb{E}\left[f(N)\right].$$

En consecuencia,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Lambda f(\widetilde{N})\right] = \mathbb{P}(\Lambda)\mathbb{E}\left[f(N)\right],$$

esto es, $\widetilde{N}$ es independiente de $\mathcal{F}_T$ y tiene la misma ley que N.
Para probar la segunda afirmación, observemos que $N^{'}_s = \widetilde{N}_s + N_T$ con $\widetilde{N}$ independiente de $\mathcal{F}_T$ y N_T una variable aleatoria $\mathcal{F}_T$-medible. Sea $\Lambda \in \mathcal{F}_T$ y $f : N^n \to \mathbb{R}$ medible y acotado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Lambda f(N^{'}_{s_1}, \ldots, N^{'}_{s_n})\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Lambda f(\widetilde{N}_{s_1} + N_T, \ldots, \widetilde{N}_{s_n} + N_T)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Lambda \mathbb{E}\left[f(\widetilde{N}_{s_1} + N_T, , \ldots, \widetilde{N}_{s_n} + N_T) \,\middle|\, \mathcal{F}_T\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Lambda g\left(N_T\right)\right],
\end{aligned}$$

con

$$g(y) = \mathbb{E}\left[f(\widetilde{N}_{s_1} + y, \ldots, \widetilde{N}_{s_n} + y)\right] = \mathbb{E}\left[f(N_{s_1} + y, \ldots, N_{s_n} + y)\right].$$

Entonces,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Lambda f(N^{'}_{s_1}, \ldots, N^{'}_{s_n})\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Lambda\right]\mathbb{E}\left[f(N_{s_1} + N_T, \ldots, N_{s_n} + N_T)\right].$$

De esta manera, bajo el evento $\{N_T = k\}$, tenemos que el proceso $N^{'}$ es independiente de $\mathcal{F}_T$ y tiene la misma ley que N bajo $\mathbb{P}_k$.

$\square$

Ahora veamos algunos ejemplos de martingalas asociadas al proceso Poisson.

Ejemplo 1.1.4 Consideremos a $(N_t, t \geq 0)$ un proceso de Poisson de parámetro $c > 0$ y $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ su filtración natural. Definamos los siguientes procesos

$$M_t = N_t - ct, \quad M_t^2 - ct, \quad \text{y} \quad \xi_t^q = e^{-q\,N_t + ct(1-e^{-q})}, \quad t \geq 0, \quad q > 0.$$

Estos procesos son $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingalas.

Veamos que efectivamente son $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingalas. Para el proceso M_t,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{t+s} \,|\, F_t\right] &= \mathbb{E}\left[N_{t+s} - c(t+s) \,|\, F_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[N_{t+s} - N_t + N_t - c(t+s) \,|\, F_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[N_s^{'}\right] + N_t - c(t+s) \\
&= cs + N_t - c(t+s) \\
&= N_t - ct \\
&= M_t.
\end{aligned}$$

Por lo tanto M_t es martingala. Ahora, consideremos al proceso $M_t^2 - ct$. Sea $s < t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 \,|\, F_s\right] &= \mathbb{E}\left[(M_t - M_s + M_s)^2 \,|\, F_s\right] - M_s^2 \\
&= \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2\right] + \mathbb{E}\left[2(M_t - M_s)M_s \,|\, F_s\right] + M_s^2 - M_s^2 \\
&= c(t-s) + 2M_s\mathbb{E}\left[M_t - M_s\right] \\
&= c(t-s),
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 - ct \,|\, F_s\right] = M_s^2 - cs,$$

es decir, el proceso $M_t^2 - ct$ es martingala. Finalmente consideremos al proceso ξ_t^q,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi_{t+s}^q \,|\, F_t\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-q(N_{t+s}-N_t)+cs(1-e^{-q})}\right] e^{-qN_t+ct(1-e^{-q})} \\
&= e^{cs(1-e^{-q})}\mathbb{E}\left[e^{-qN_s}\right] \xi_t^q \\
&= \xi_t^q,
\end{aligned}$$

ya que $\mathbb{E}\left[e^{-qN_s}\right] = e^{-cs(1-e^{-q})}$. Así, ξ_t^q es $(\mathcal{F}_t)_t$-martingala.

Consideremos un espacio de probabilidad filtrado, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, sea R, la familia de subconjuntos de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ de la forma $(s,t] \times A$, donde $A \in \mathcal{F}_s$,

$$R = \left\{(s,t] \times A \,:\, 0 \leq s \leq t,\, A \in \mathcal{F}_s\right\},$$

los elementos de R son llamados rectángulos predecibles. Sea $\mathcal{P}$ la σ-álgebra generada por R. A los conjuntos que son elementos de $\mathcal{P}$ son conocidos como conjuntos predecibles.

Definición 1.1.5 Un proceso, $H = (H_t, t \geq 0)$, es predecible si es medible con respecto a la σ- álgebra predecible.

Proposición 1.1.6 *Consideremos a $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Entonces el proceso $\mathbb{1}_{(0,T]}$, donde T es un tiempo de paro, es un proceso predecible. Mas aún, un proceso valuado en un espacio de Banach, adaptado y continuo por la izquierda es un proceso predecible.*

La prueba de este resultado se puede encontrar en la página 7 de ([18]).

Definamos la integral estocástica de un proceso predecible con respecto al proceso de Poisson N. Para H proceso predecible tenemos

$$\int_0^t H_s dN_s = \sum_{s\leq t} H_s \, \Delta N_s,$$

donde $\Delta N_s = N_s - N_{s-}$. Observemos también que $\Delta N_s \neq 0$ si y solo si, s es un tiempo de salto del proceso N, así, tenemos la siguiente igualdad

$$\int_0^t H_s dN_s = \sum_{s\leq t} H_s \, \Delta N_s = \sum_{n=1}^{\infty} H_{T(n)} \mathbb{1}_{\{T(n)\leq t\}}.$$

Otro ejemplo importante de martingalas asociadas al procesos Poisson es el que nos proporciona el siguiente resultado.

Proposición 1.1.7 *Sea H un proceso predecible tal que para toda $t \geq 0$,*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |H_s| \, ds\right] < \infty.$$

Entonces, para $t \geq 0$

$$\int_0^t H_s \, dN_s - c\int_0^t H_s ds,$$

es una $(\mathcal{F}_t)$- martingala. Además se tiene la formula de compensación

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s dN_s\right] = c\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s ds\right].$$

Demostración. Sea M^H el proceso

$$M_t^H := \int_0^t H_s \, dN_s - c\int_0^t H_s ds \quad \text{para} \quad t \geq 0.$$

Primero supongamos que H es un proceso simple y acotado, es decir,

$$H_s = H_{t_i} \quad \text{para } s \in (t_i, t_{i+1}],$$

donde $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$ y H_{t_i} es $\mathcal{F}_{t_i}$-medible. Entonces, observemos que para $u, v \in (t_i, t_{i+1}]$ con $u \leq v$

$$M_v^H - M_u^H = H_{t_i}(N_v - N_u) - cH_{t_i}(v-u)$$

así

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_v^H - M_u^H \,|\, \mathcal{F}_u\right] &= \mathbb{E}\left[H_{t_i}(N_v - N_u) - cH_{t_i}(v-u) \,|\, \mathcal{F}_u\right] \\
&= H_{t_i}\mathbb{E}\left[N_v - N_u \,|\, \mathcal{F}_u\right] - cH_{t_i}(v-u) \\
&= H_{t_i}c(v-u) - cH_{t_i}(v-u) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

Consideremos el caso, $u \leq v$, con $t_i < u \leq t_{i+1} \leq t_j < v \leq t_{j+1}$, con $i < j$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_v^H - M_u^H \,\middle|\, \mathcal{F}_u\right] &= \mathbb{E}\left[M_v^H - M_{t_j}^H + M_{t_j}^H - M_{t_{i+1}}^H + M_{t_{i+1}}^H - M_u^H \,\middle|\, \mathcal{F}_u\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_v^H - M_{t_j}^H \,\middle|\, \mathcal{F}_u\right] + \mathbb{E}\left[M_{t_j}^H - M_{t_{i+1}}^H \,\middle|\, \mathcal{F}_u\right] + \mathbb{E}\left[M_{t_{i+1}}^H - M_u^H \,\middle|\, \mathcal{F}_u\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_{t_j}^H - M_{t_{i+1}}^H \,\middle|\, \mathcal{F}_u\right] \\
&= \sum_{k=i+1}^{j-1} \mathbb{E}\left[M_{t_{k+1}}^H - M_{t_k}^H \,\middle|\, \mathcal{F}_u\right] \\
&= \sum_{k=i+1}^{j-1} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_{t_{k+1}}^H - M_{t_k}^H \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_k}\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_u\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\int_0^t H_s dM_s$ es una martingala, donde $M_s = N_s - cs$.

Ahora supongamos que H es un proceso adaptado continuo por la izquierda y acotado por $C > 0$. Para $n \geq 1$ definamos

$$H_s^{(n)} = H_{\frac{k}{2^n}} \quad \text{para} \quad \frac{k}{2^n} < s \leq \frac{k+1}{2^n}.$$

Así, $(H^{(n)}, n \geq 1)$ es una sucesión de procesos simples acotados y continuos por la izquierda tal que, para $s \geq 0$

$$H_s^{(n)} \longrightarrow H_s \text{ c.s.}$$

Por teorema de convergencia dominada, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t H_s^{(n)} dM_s = \int_0^t H_s dM_s.$$

Como $\int_0^t H_s^{(n)} dM_s$ es martingala, entonces, $\int_0^t H_s dM_s$ es martingala. Por lo tanto tenemos el resultado para H proceso adaptado continuo por la izquierda y acotado.

Para extender el resultado para procesos predecibles y acotados usaremos el teorema de clases monótonas. Consideremos el π-sistema

$$\Pi = \{(s,t] \times F,\ s < t \in \mathbb{R},\ F \in \mathcal{F}_s\}.$$

Definamos A como

$$A = \left\{ H \quad \text{predecible y acotado} \quad : \left(\int_0^t H_s dM_s \right) \text{ es martingala} \right\}.$$

A es un espacio vectorial, $1 \in A$, pues M_s es martingala y además, para toda $B \in \Pi$, tenemos $\mathbb{1}_B \in A$. Si $H^{(n)}$ es una sucesión creciente en A que converge a H, con H acotado, entonces por el teorema de convergencia monótona, vemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t H_s^{(n)} dM_s = \int_0^t H_s dM_s.$$

Así, del teorema de convergencia dominada, para $s < t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^t H_u dM_u \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] =& \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} \int_0^t H_u^{(n)} dM_u \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] \\
=& \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^t H_u^{(n)} dM_u \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] \\
=& \lim_{n\to\infty} \int_0^s H_s^{(n)} dM_u \\
=& \int_0^s H_u dM_u.
\end{aligned}$$

Concluimos que $H \in A$. Por lo tanto, al aplicar el teorema de clases monótonas vemos que A contiene todos los procesos predecibles y acotados.

Finalmente, sin perdida de generalidad, supongamos que H es positiva y consideremos el siguiente tiempo de paro

$$T_C = \inf\{t \geq 0 : \ H_s \geq C\}.$$

Entonces, usando que $T_C \wedge t$ está acotado y por el teorema de paro opcional

$$(I_C)_t := \int_0^{T_C \wedge t} H_s dM_s, \quad \text{para} \quad t \geq 0,$$

es una martingala. Pero $T_C \nearrow \infty$ cuando $C \to \infty$, así por el teorema de convergencia monótona

$$(I_C)_t \longrightarrow \int_0^t H_s dM_s \text{ conforme } C \to \infty,$$

y como $(I_C)_t$ es martingala, entonces $\int_0^t H_s dM_s$ es martingala.

Falta probar la formula de compensación. Nuevamente por el teorema de convergencia monótona

$$\lim_{C \to \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^{T_C \wedge t} H_s dN_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s dN_s\right],$$

y además,

$$\lim_{C \to \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^{T_C \wedge t} H_s ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s ds\right],$$

Usando de nuevo que $(I_C)_t$ es martingala, tenemos

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{T_C \wedge t} H_s dN_s\right] = c\mathbb{E}\left[\int_0^{T_C \wedge t} H_s ds\right].$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s dN_s\right] = c\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s ds\right],$$

esto concluye la prueba.

□

Otra martingala importante es la siguiente

Proposición 1.1.8 *Sea h un función medible y positiva, entonces el proceso*

$$\exp\left\{-\int_0^t h(s) dN_s + c\int_0^t (1 - e^{-h(s)}) ds\right\}, \quad t \geq 0,$$

es una $(\mathcal{F}_t)$-martingala. También se tiene que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^t h(s) dN_s\right\}\right] = \exp\left\{-c\int_0^t (1 - e^{-h(s)}) ds\right\}.$$

Demostración.

Recordemos que $\xi_t^q = \exp\left\{-qN_t + ct(1-e^{-q})\right\}$ es martingala, entonces si $h(s) = a$, con a constante, tenemos que el resultado es valido. Ahora supongamos que $h(s)$ es simple, es decir

$$h(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]},$$

donde $t_0 < t_1, \cdots, t_n < \cdots$. Denotemos por M_t al proceso

$$\exp\left\{-\int_0^t h(s)dN_s + c\int_0^t (1-e^{-h(s)})ds\right\}, \quad t \geq 0.$$

Observemos que para $0 < u < v < \infty$,

$$M_v = M_u \exp\left\{-\int_u^v h(s)dN_s + c\int_u^v (1-e^{-h(s)})ds\right\},$$

así, para $u, v \in (t_i, t_{i+1}]$, vemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_v \middle| \mathcal{F}_u\right] &= M_u \mathbb{E}\left[e^{-\int_u^v h(s)dN_s + c\int_u^v (1-e^{-h(s)})ds} \middle| \mathcal{F}_u\right] \\
&= M_u \mathbb{E}\left[e^{-a_i(N_v-N_u)+c(v-u)(1-e^{-a_i})} \middle| \mathcal{F}_u\right] \\
&= M_u \mathbb{E}\left[e^{-a_i(N_v-N_u)+c(v-u)(1-e^{-a_i})}\right] \\
&= M_u e^{c(v-u)(1-e^{-a_i})} \mathbb{E}\left[e^{-a_i(N_v-N_u)}\right] \\
&= M_u.
\end{aligned}$$

Por otro lado si $t_i < u \leq t_{i+1} \leq t_j < v \leq t_{j+1}$, con $i < j$, usando que los incrementos son independientes y estacionarios, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_v \middle| \mathcal{F}_u\right] &= M_u \mathbb{E}\left[e^{-\int_u^v h(s)dN_s + c\int_u^v (1-e^{-h(s)})ds} \middle| \mathcal{F}_u\right] \\
&= M_u \mathbb{E}\left[e^{-a_i(N_{t_{i+1}}-N_u)+c(t_{i+1}-u)(1-e^{-a_i})} e^{-a_j(N_v-N_{t_j})+c(v-t_j)(1-e^{-a_j})}\right] \\
&\quad \times \mathbb{E}\left[\prod_{k=i+1}^{j} e^{-a_k(N_{t_{k+1}}-N_{t_k})+c(t_{k+1}-u)(1-e^{-a_k})}\right] \\
&= M_u.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado es valido para h simple. En particular para funciones de la forma $\mathbb{1}_{(a,b]}(s)$. Notemos que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(C)$, donde C es el conjunto

$$C = \left\{(a,b] : \, a < b \in \mathbb{R}\right\},$$

que es un π-sistema. Aplicando el teorema de clases monótonas, concluimos que el resultado es valido para toda función h positiva medible.

$\square$

A continuación introducimos otra definición del proceso de Poisson asociado a una filtración.

Definición 1.1.9 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado. Un $(\mathcal{F}_t)$-proceso de Poisson con parámetro $c > 0$, $(N_s, s \geq 0)$, es un proceso estocástico $(\mathcal{F}_t)$-adaptado, tal que para toda $0 \leq s \leq t$,

- $N_0 = 0$.
- Las trayectorias de N son càdlàg.
- Los incrementos condicionados a la información obtenida hasta el tiempo s, siguen una ley Poisson con parámetro c, es decir,

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k \,|\, \mathcal{F}_s) = \frac{c^k (t-s)^k}{k!} e^{-c(t-s)}.$$

Un resultado importante de independencia para procesos de Poisson es el siguiente.

Proposición 1.1.10 *Sean N y $N^{'}$ dos $(\mathcal{F}_t)$-procesos de Poisson. Los procesos N y $N^{'}$ son independientes si y sólo si no tienen saltos en común, es decir, se cumple sólo una de las siguientes igualdades*

$$N_t - N_{t-} = 0 \quad o \quad N^{'}_t - N^{'}_{t-} = 0, \qquad \textit{para toda } \ t > 0 \quad c.s.$$

Para demostrar este hecho, antes veamos algunos resultado previos.

Lema 1.1.11 *Sean S y T dos tiempos de paro acotados por M, tal que $S \leq T$. Si $(Y_t)_{t\geq 0}$ es $(\mathcal{F}_t)$-adaptado e integrable, entonces Y es una martingala si y solo si*

$$\mathbb{E}\left[Y_S\right] = \mathbb{E}\left[Y_T\right].$$

Demostración. Supongamos que Y es una martingala, como S y T están acotados, entonces

$$\mathbb{E}\left[Y_S\right] = \mathbb{E}\left[Y_T\right].$$

Recíprocamente, para $B \in \mathcal{F}_s$, definamos

$$S^B := \mathbb{1}_B S + \mathbb{1}_{B^c} M \quad \text{y} \quad T^B := \mathbb{1}_B T + \mathbb{1}_{B^c} M,$$

S^B y T^B son tiempos de paro y $S^B \leq T^B \leq M$, así, por hipótesis,

$$\mathbb{E}\left[Y_{S^B}\right] = \mathbb{E}\left[Y_{T^B}\right], \tag{1.1.1}$$

pero $\mathbb{E}\left[Y_{S^B}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B Y_S\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{B^c} Y_M\right]$ y

$$\mathbb{E}\left[Y_{T^B}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B Y_T\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{B^c} Y_M\right],$$

de la ecuación (1.1.1), tenemos

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B Y_S\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B Y_T\right], \qquad \text{para todo} \qquad B \in \mathcal{F}_s,$$

en consecuencia

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[Y_T \,|\, \mathcal{F}_s\right] \mathbb{1}_B\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B Y_S\right].$$

Por lo tanto, Y es martingala.

$\square$

Lema 1.1.12 *Sean M una martingala càdlàg de variación acotada y M' una martingala càdlàg acotada, en la misma filtración. Si M y M' no saltan simultáneamente entonces MM' es una martingala.*

Demostración. Por el lema anterior, basta probar que

$$\mathbb{E}\left[M_T M_T'\right] = \mathbb{E}\left[M_0 M_0'\right],$$

para cualquier, T, tiempo de paro acotado. Sea T un tiempo de paro acotado por A y $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = A$, entonces

$$\begin{aligned} M_T M_T' - M_0 M_0' &= \sum_{s_i < T} \left(M_{s_{i+1}} M_{s_{i+1}}' - M_{s_i} M_{s_i}'\right) \\ &= \sum_{s_i < T} \left(M_{s_{i+1}} - M_{s_i}\right)\left(M_{s_{i+1}}' - M_{s_i}'\right) + \sum_{s_i < T} M_{s_i}\left(M_{s_{i+1}}' - M_{s_i}'\right) \\ &\quad + \sum_{s_i < T} M_{s_i}'\left(M_{s_{i+1}} - M_{s_i}\right), \end{aligned}$$

donde $s_i := t_i \wedge T$. Usando el hecho que M y M' son martingalas, tenemos

$$\mathbb{E}\left[M_{s_i}(M_{s_{i+1}}' - M_{s_i}')\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_{s_i}(M_{s_{i+1}}' - M_{s_i}') \,\middle|\, \mathcal{F}_{s_i}\right]\right] = 0,$$

y

$$\mathbb{E}\left[M'_{s_i}\left(M_{s_{i+1}} - M_{s_i}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M'_{s_i}(M_{s_{i+1}} - M_{s_i}) \,\middle|\, \mathcal{F}_{s_i}\right]\right] = 0.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[M_T M'_T - M_0 M'_0\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{s_i < T} \left(M_{s_{i+1}} - M_{s_i}\right)\left(M'_{s_{i+1}} - M'_{s_i}\right)\right].$$

Por otro lado como M' es acotada y M es de variación acotada, tenemos

$$\left|\sum_{s_i<T} \left(M_{s_{i+1}} - M_{s_i}\right)\left(M'_{s_{i+1}} - M'_{s_i}\right)\right| \leq C \left|\sum_{s_i<T}\left(M_{s_{i+1}} - M_{s_i}\right)\right| \leq C \sup_{\tau \in A} V_\tau(M) < \infty,$$

donde $V_\tau(M)$ es la variación total de M sobre la partición τ de $[0, A]$. Cuando la norma de la partición se va a cero, vemos que

$$\sum_{s_i<T} \left(M_{s_{i+1}} - M_{s_i}\right)\left(M'_{s_{i+1}} - M'_{s_i}\right) \longrightarrow \sum_{s<T} (\Delta M_s)(\Delta M'_s) = 0.$$

Así, aplicando teorema de convergencia dominada, concluimos que

$$\mathbb{E}\left[M_T M'_T - M_0 M'_0\right] = 0.$$

Por lo tanto MM' es una martingala si M y M' no saltan simultáneamente.

□

Después de los resultados anteriores, pasemos a demostrar la proposición.
Demostración. [Proposición 1.1.10]
Supongamos que N y N' son independientes. Sean $(T(n))_{n\geq 1}$ los tiempos de saltos para N. Entonces

$$\sum_{s>0} \Delta N_s \Delta N'_s = \sum_{s>0} \Delta N'_{T(n)},$$

donde $\Delta N_s = N_s - N_{s-}$. Como la ley de los saltos no tiene átomos, para cada t fijo, $\Delta N'_t = 0$ c.s. De la independencia de N' y $T(n)$ tenemos que $\Delta N'_{T(n)} = 0$ c.s. para cada n. Por lo tanto

$$\sum_{s>0} \Delta N_s \Delta N'_s = 0 \quad \text{c.s},$$

en otras palabras, no saltan simultáneamente.

Recíprocamente, tomemos h y $h^{'}$ dos funciones simples y definamos

$$M_t = \exp\left\{-\int_0^t h(s)dN_s + c\int_0^t (1-e^{-h(s)})ds\right\}$$

y

$$M_t' = \exp\left\{-\int_0^t h^{'}(s)dN_s^{'} + c'\int_0^t (1-e^{-h^{'}(s)})ds\right\}.$$

Por la proposición 1.1.8, M_t y M_t' son martingalas definidas en la misma filtración, ambas son acotadas y de variación acotada. Como N_t y $N_t^{'}$ no saltan simultáneamente, M_t y M_t' no saltan simultáneamente. Así, M_tM_t' es martingala, entonces $\mathbb{E}\left[M_tM_t'\right] = \mathbb{E}\left[M_0M_0'\right] = 1$. En consecuencia

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}\left[M_tM_t'\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)dN_s + c\int_0^t (1-e^{-h(s)})ds - \int_0^t h'(s)dN_s' + c'\int_0^t (1-e^{-h^{'}(s)})ds\right)\right],
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)dN_s - \int_0^t h'(s)dN_s'\right)\right] \\
&\quad = \exp\left(-c\int_0^t (1-e^{-h(s)})ds - c'\int_0^t (1-e^{-h'(s)})ds\right) \\
&\quad = \exp\left(-c\int_0^t (1-e^{-h(s)})ds\right)\exp\left(-c'\int_0^t (1-e^{-h^{'}(s)})ds\right) \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)dN_s\right)\right]\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^t h'(s)dN_s'\right)\right],
\end{aligned}$$

lo cual prueba la independencia.

□

1.2. Construcción de Medidas Aleatorias de Poisson y Procesos Puntuales de Poisson.

Definamos la medida aleatoria de Poisson.

Definición 1.2.1 Sea $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita. Una familia de variables aleatorias a valores en $\overline{\mathbb{Z}}_+$ definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\{M(A), A \in \mathcal{E}\}$, recibe el nombre de medida aleatoria de Poisson con intensidad μ si,

- Si $B \in \mathcal{E}$ es tal que $\mu(B) < \infty$, la variable aleatoria $M(B)$ se distribuye como una variable aleatoria Poisson de parámetro $\mu(B)$, es decir,

$$\mathbb{P}(M(B) = k) = \frac{\mu(B)^k}{k!} e^{-\mu(B)}, \quad \text{para toda} \quad k = 0, 1, \dots$$

  Si $\mu(B) = \infty$, entonces $M(B) = \infty$ casi seguramente.

- Las variables aleatorias $M(B_1)$, $M(B_2)$, $\cdots$, $M(B_n)$ son independientes siempre que B_1, $B_2, \cdots$, B_n sea una sucesión finita de conjuntos disjuntos en $\mathcal{E}$.

Proposición 1.2.2 (Propiedad de superposición) *Sean $(\mu_n, n \geq 1)$ una sucesión de medidas σ-finitas y $\mu = \sum_{n \geq 1} \mu_n$. Si μ es σ-finita y $M^{(1)}$, $M^{(2)}, \cdots$ son medidas aleatorias de Poisson independientes con intensidades μ_1, $\mu_2, \cdots$ respectivamente, entonces $M = \sum_{i \geq 1} M^{(i)}$ es una medida aleatoria de Poisson con intensidad μ.*

Demostración. Tenemos que para $B \in \mathcal{E}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\{-\lambda M(B)\}\right] &= \mathbb{E}\left[\lim_{k\to\infty} \exp\left\{-\lambda \sum_{n=1}^{k} M^{(n)}(B)\right\}\right] \\
&= \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k} \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\lambda M^{(n)}(B)\right\}\right] \\
&= \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k} \exp\left\{-\mu_{(n)}(B)(e^{-1} - 1)\right\} \\
&= \lim_{k\to\infty} \exp\left\{-(e^{-\lambda} - 1) \sum_{n=1}^{k} \mu_{(n)}(B)\right\} \\
&= \exp\left\{-(e^{-\lambda} - 1)\mu(B)\right\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $M(B)$ es una variable aleatoria Poisson con parámetro $\mu(B)$. Finalmente si B_1, $B_2, \cdots, B_n \in \mathcal{E}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos, y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son números reales,

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i M(B_i)}\right] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i \sum_{m=1}^{k} M^{(m)}(B_i)}\right],$$

dado que $\left\{M^{(n)}\right\}_{n\geq 1}$ son independientes y además $M^{(n)}(B_i)$ es independiente de $M^{(n)}(B_j)$ para $i \neq j$, vemos

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i \sum_{m=1}^{k} M^{(m)}(B_i)}\right] = \lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{\lambda_i \sum_{m=1}^{k} M^{(m)}(B_i)}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{\lambda_i M(B_i)}\right].$$

Entonces las variables $M(B_1), \cdots, M(B_n)$ son independientes.

□

A continuación construiremos a las medidas aleatorias de Poisson.

Proposición 1.2.3 *Sea $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita. Entonces existe una medida aleatoria de Poisson en $(E, \mathcal{E}, \mu)$ con intensidad μ.*

Demostración. La demostración de la existencia lo haremos en dos casos: cuando $\mu(E) < \infty$ y el caso $\mu(E) = \infty$.
Supongamos que $\mu(E) < \infty$, definamos

$$\rho(B) := \frac{\mu(B)}{\mu(E)}, \quad \text{para} \quad B \in \mathcal{E}.$$

Sean $(\xi_n, n \geq 1)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con ley ρ y N una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\mu(E)$ independiente de $(\xi_n, n \geq 1)$. Definamos la siguiente medida aleatoria

$$M(dx) = \sum_{i=1}^{N} \delta_{\xi_i}(x).$$

Probemos que M es una medida aleatoria de Poisson con intensidad μ,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(M(B)=k\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{\xi_i \in B\}} = k\right) \\
&= \sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j} \mathbb{1}_{\{\xi_i \in B\}} = k \mid N=j\right) \mathbb{P}(N=j) \\
&= \sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j} \mathbb{1}_{\{\xi_i \in B\}} = k\right) \frac{\mu(E)^j}{j!} e^{-\mu(E)} \\
&= \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} \frac{\mu(B)^k}{\mu(E)^k} \left(1-\frac{\mu(B)}{\mu(E)}\right)^{j-k} \frac{\mu(E)^j}{j!} e^{-\mu(E)} \\
&= \frac{\mu(B)^k}{k!} e^{-\mu(E)} \sum_{j=k}^{\infty} \left(1-\frac{\mu(B)}{\mu(E)}\right)^{j-k} \frac{\mu(E)^{j-k}}{(j-k)!} \\
&= \frac{\mu(B)^k}{k!} e^{-\mu(B)}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $M(B)$ es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\mu(B)$. Falta probar la independencia para conjuntos disjuntos. Sean B y B' dos conjuntos disjuntos en $\mathcal{E}$, definamos al proceso

$$X_t := \xi_{N_t},$$

donde $(N_t, t \geq 0)$ es un proceso Poisson con intensidad $\mu(E)$ el cual es independiente de $(\xi_n, n \geq 1)$ y ξ_i son independientes con ley ρ. Sea $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtración natural de X_t. Consideremos los procesos de conteo

$$N_t^B = \operatorname{card}\{i \leq N_t \,:\, \xi_i \in B\}$$

y

$$N_t^{B'} = \operatorname{card}\{i \leq N_t \,:\, \xi_i \in B'\}.$$

Los procesos N_t^B y $N_t^{B'}$ son $(\mathcal{F}_t)$-procesos de Poisson además son independientes, como B y B' son ajenos, estos no saltan simultáneamente. Observemos que

$$M(B) = N_1^B \quad \text{y} \quad M(B') = N_1^{B'},$$

en consecuencia, $M(B)$ y $M(B')$ son independientes.

Ahora, supongamos que $\mu(E) = \infty$. Como μ es σ-finita, Entonces existen E_1, $E_2, \cdots \in \mathcal{E}$ disjuntos tal que $\cup_{i\geq 1} E_i = E$ y $\mu(E_i) < \infty$ para toda $i \geq 1$. Definamos la medida μ_i como

$$\mu_i(\cdot) := \mu(\cdot \cap E_i),$$

así, μ_i es una medida finita. Sean $(N_i, i \geq 1)$ medidas aleatorias de Poisson en $(E, \mathcal{E})$ con intensidad μ_i respectivamente. Definamos

$$M(B) = \sum_{i=1}^{\infty} N_i(B),$$

por la propiedad de superposición, $\{M(B), B \in \mathcal{E}\}$ es una medida aleatoria de Poisson con intensidad μ.

□

Proposición 1.2.4 (Propiedad de divisibilidad) *Sean M una medida aleatoria de Poisson en $(E, \mathcal{E})$ con intensidad μ y $(B_i, i \geq 1)$ una sucesión de conjuntos disjuntos en $\mathcal{E}$. Entonces las restricciones $(M|_{B_i}, i \geq 1)$ son medidas aleatorias de Poisson con intensidades $(\mu(\cdot \cap B_i), i \geq 1)$ respectivamente.*

Demostración. Usando el hecho de que M es una medida aleatoria de Poisson, para $F \in \mathcal{E}$, tal que $\mu(F) < \infty$

$$\mathbb{P}\left(M(F) = k\right) = \frac{\mu(F)^k}{k!} e^{-\mu(F)},$$

en consecuencia

$$\mathbb{P}\left(M|_{B_i}(F) = k\right) = \mathbb{P}\left(M(B_i \cap F)\right) = \frac{\mu(B_i \cap F)^k}{k!} e^{-\mu(B_i \cap F)}.$$

También, si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son conjuntos disjuntos en $\mathcal{E}$, entonces

$$\left(M|_{B_i}(A_1), \cdots, M|_{B_i}(A_n)\right) = \left(M(B_i \cap A_1), \cdots, M(B_i \cap A_n)\right),$$

son independientes, ya que $\{A_j \cap B_i\}_{j=1}^n$ son disjuntos y M es medida aleatoria de Poisson.

□

Ahora, vamos a introducir la integral de una función medible f con respecto a una medida aleatoria de Poisson M. Como en el caso de la integral de Lebesgue, empecemos con f simple, y para generalizar usamos el hecho de la existencia de funciones simples f_n, tal que $f_n \nearrow f$. Sea $f : E \to \mathbb{R}_+$ una función medible simple, es decir,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbb{1}_{\{x \in B_i\}},$$

donde $c_i \geq 0$ y (B_i) es una partición de E. Entonces, definimos la integral de f con respecto a la medida aleatoria de Poisson como sigue,

$$< M, f >:= \int_E f(x)M(dx) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i M(B_i).$$

Así, para cualquier función medible $f : E \to \mathbb{R}_+$, sea $(f_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de funciones simples no decrecientes tal que $f_n \nearrow f$ uniformemente, definimos la integral de f de la siguiente manera,

$$< M, f >= \lim_{n\to\infty} < M, f_n >= \int_E f(x)M(dx).$$

En general, para cualquier función $f : E \to \mathbb{R}$, usamos el hecho de que $f = f_+ - f_-$, donde f_- y f_+ son funciones no negativas y corresponden a la parte negativa y positiva de la función f. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.2.5 (Fórmula de Campbell) *Sean $f : E \to \mathbb{R}_+$ una función medible y M una medida aleatoria de Poisson con intensidad μ. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[e^{-<M,f>}\right] = \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-f(x)})\mu(dx)\right\}.$$

Demostración. Análogamente como en el caso anterior, tratemos primero el caso $\mu(E) < \infty$. De la construcción de medidas aleatorias de Poisson, recordemos que $M(dx) = \sum_{i=1}^{N} \delta_{\xi_i}(x)$, es una medida aleatoria de Poisson, con N que tiene ley Poisson de parámetro $\mu(E)$, ξ_i v.a.i.i.d con ley $\rho(\cdot) = \mu(\cdot)/\mu(E)$ y (N, ξ_i) independientes. Entonces, tenemos

$$< M, f >= \int f(x)M(dx) = \sum_{i=1}^{N} \int f(x)\delta_{\xi_i}(dx) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i).$$

Así,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\exp\{- < M, f >\}\Big] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\right\}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\right\}\right] \mathbb{P}(N = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\{-f(\xi_1)\}\right]^k \frac{\mu(E)^k}{k!} e^{-\mu(E)} \\
&= e^{-\mu(E)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(E)^k}{k!} \left(\int_E e^{-f(x)} \frac{\mu(dx)}{\mu(E)}\right)^k \\
&= \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-f(x)})\mu(dx)\right\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\mu(E) < \infty$,

$$\mathbb{E}\left[e^{-<M,f>}\right] = \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-f(x)})\mu(dx)\right\}.$$

Ahora, veamos el caso $\mu(E) = \infty$. Sea $(B_n, n \geq 1)$ una sucesión disjunta de conjuntos en $\mathcal{E}$ tal que $\mu(B_n) < \infty$ para cada $n \geq 1$ y $\cup_{n\geq 1} B_n = E$. Definamos

$$E_n := \cup_{k=1}^{n} B_k$$

y

$$M^{(n)} := M\,|_{E_n},$$

de esta manera, $\mu(E_n) < \infty$ y por la propiedad de divisibilidad, $M^{(n)}$ es una medida aleatoria de Poisson con intensidad $\mu(\cdot \cap E_n)$. Entonces si $f \geq 0$ medible, por definición

$$< M^{(n)}, f >= \int_E f(x)\mathbb{1}_{E_n}(x)M(dx),$$

y para cada $n \geq 1$ tenemos,

$$\mathbb{E}\left[e^{-<M^{(n)},f>}\right] = \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-f(x)})\mathbb{1}_{E_n}\mu(dx)\right\}.$$

Observemos que $E_n \nearrow E$, así, $f(x)\mathbb{1}_{E_n} \nearrow f$ y $(1 - e^{-f(x)})\mathbb{1}_{E_n} \nearrow (1 - e^{-f(x)})$. Usando teorema de convergencia monótona, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} < M^{(n)}, f >= \lim_{n\to\infty} \int_E f(x)\mathbb{1}_{E_n}(x)M(dx) = \int_E f(x)(x)M(dx) =< M, f >,$$

y
$$\lim_{n\to\infty}\int(1-e^{-f(x)})\mathbb{1}_{E_n}\mu(dx)=\int(1-e^{-f(x)})\mu(dx).$$
En consecuencia,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-< M,f>\right\}\right]&=\mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty}\exp\left\{-< M^{(n)},f>\right\}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-< M^{(n)},f>\right\}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{-\int_E(1-e^{-f(x)})\mathbb{1}_{E_n}\mu(dx)\right\}\\&=\exp\left\{-\int_E(1-e^{-f(x)})\mu(dx)\right\},\end{aligned}$$
lo cual prueba lo deseado.

□

Ahora, consideremos el espacio $([0,\infty)\times E,\mathcal{B}([0,\infty))\times\mathcal{E},\lambda\otimes\mu)$, donde λ es la medida de Lebesgue en $[0,\infty)$ y μ es una medida σ-finita en E. El siguiente resultado nos dice que a lo mas ocurre un evento en la fibra $\{t\}\times E$.

Lema 1.2.6 *Sea M una medida aleatoria de Poisson en $([0,\infty)\times E,\mathcal{B}([0,\infty))\times\mathcal{E},\lambda\otimes\mu)$ con intensidad $\lambda\otimes\mu$. Entonces para toda $t\geq 0$*
$$M(\{t\}\times E)=0 \text{ ó } 1,\ \ c.s.$$

Demostración. Supongamos que $\mu(E)<\infty$. Sea $t\in(0,1]=\cup_{k=1}^{2^n}(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}]$, usando la propiedad de estacionariedad vemos
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(M(\{t\}\times E)\geq 2,\text{ para alguna } t\in(0,1]\Big)&\leq\sum_{k=1}^{2^n}\mathbb{P}\left(M\left(\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]\times E\right)\geq 2\right)\\&=\sum_{k=1}^{2^n}\mathbb{P}\left(M\left(\left(0,\frac{1}{2^n}\right]\times E\right)\geq 2\right)\\&=2^n\mathbb{P}\left(M\left(\left(0,\frac{1}{2^n}\right]\times E\right)\geq 2\right).\end{aligned}$$
Como $M(B)$ tiene ley Poisson, resulta
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(M\left(\left(0,\frac{1}{2^n}\right]\times E\right)\geq 2\right)&=1-e^{-2^{-n}\mu(E)}-2^{-n}\mu(E)e^{-2^{-n}\mu(E)}\\&\leq 2\left(2^{-n}\mu(E)\right)^2.\end{aligned}$$

Retomando la ecuación anterior, tenemos

$$\mathbb{P}\Big(M(\{t\}\times E)\geq 2,\ \text{para alguna } t\in(0,1]\Big)\leq 2^n\left(\frac{1}{2^n}\mu(E)\right)^2=\frac{1}{2^n}\mu(E)^2,$$

y como $\mu(E)<\infty$, es claro

$$\mathbb{P}\left(M(\{t\}\times E)\geq 2,\ \text{para alguna } t\in(0,1]\right)=0.$$

Supongamos ahora que $t\in[0,\infty)$ y $\mu(E)<\infty$, observemos que $[0,\infty)=\cup_{n\geq 1}A_n$, donde $A_n=[n,n+1)$, así $A_n\cap A_m=\emptyset$ para $m\neq n$. Definamos la medida de Lebesgue restringida a A_n como $\lambda_n:=\lambda|_{A_n}=\lambda(\cdot\cap A_n)$ y $M^n:=M|_{A_n}$, que es una medida aleatoria de Poisson con intensidad $\lambda_n\otimes\mu$. De esta manera

$$\lambda=\sum_{n\geq 0}\lambda_n \text{ y } M=\sum_{n\geq 0}M^n,$$

y por lo anterior, para cada n,

$$\mathbb{P}\Big(M^n(\{t\}\times E)\geq 2,\ \text{para alguna } t\in A_n\Big)=0.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(M(\{t\}\times E)\geq 2,&\ \text{para alguna } t\geq 0\big)\\ &=\mathbb{P}\left(\cup_{n\geq 0}\left\{M(\{t\}\times E)\geq 2,\ \text{para alguna } t\in A_n\right\}\right)\\ &\leq\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\left(M^n(\{t\}\times E)\geq 2,\ \text{para alguna } t\in A_n\right)\\ &=0.\end{aligned}$$

Finalmente, consideremos el caso $\mu(E)=\infty$. Existe una sucesión de conjuntos en $\mathcal{E}$, $\{B_n\}_{n\geq 1}$, tal que $\cup_{n\geq 1}B_n=E$ y $\mu(B_n)<\infty$. Sea E_n como antes, $E_n=\cup_{k=1}^n B_k$, de esta forma $\mu(E_n)<\infty$. Definamos $f_n:[0,\infty)\times E\to\mathbb{R}_+$ de la siguiente manera,

$$f_n(s,x)=\mathbb{1}_{\{\{t\}\times E_n\}}(s,x).$$

Entonces, usando el hecho que $\mu(E_n)<\infty$,

$$<M,f_n>=\int\mathbb{1}_{\{\{t\}\times E_n\}}(s,x)M(ds\otimes dx)=M(\{t\}\times E_n)\leq 1,\quad \text{c.s.}$$

Por otro lado $f_n \nearrow f = \mathbb{1}_{\{\{t\}\times E\}}$ ya que $E_n \nearrow E$, usando teorema de convergencia monótona, tenemos

$$\begin{aligned} M(\{t\}\times E) &= < M, f > \\ &= \int \mathbb{1}_{\{\{t\}\times E\}}(s,x)M(ds\otimes dx) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_{\{\{t\}\times E_n\}}(s,x)M(ds\otimes dx) \\ &= \lim_{n\to\infty} M(\{t\}\times E_n) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Por último observemos que

$$\begin{aligned} A &= \{w \in \Omega : \ \text{para toda } t \geq 0, < M, f > \leq 1\} \\ &= \bigcap_{n\geq 1} \{w \in \Omega : \ \text{para toda } t \geq 0, < M, f_n > \leq 1\}, \end{aligned}$$

y cada uno de estos conjuntos tiene probabilidad igual a uno. Concluimos que

$$M(\{t\}\times E) = 0 \text{ ó } 1, \ \text{c.s.}$$

□

Dado el resultado anterior, si $M(\{t\}\times E) = 1$, definimos $\Delta_t \in E$, como el punto en E tal que

$$M\big|_{\{t\}\times E} = \delta_{(t,\Delta_t)}.$$

Si $M(\{t\}\times E) = 0$, entonces definimos al punto $\Delta_t = \infty$ y no se le asigna masa.

Definición 1.2.7 El proceso definido por $\Delta = (\Delta_t, t \geq 0)$ es un proceso puntual de Poisson con medida característica μ.

Lema 1.2.8 *Sea $B \in \mathcal{E}$ tal que $0 < \mu(B) < \infty$ y definamos*

$$T_B = \text{ínf}\{t \geq 0, \Delta_t \in B\}.$$

Entonces, T_B y Δ_{T_B} son variables aleatorias independientes. La variable aleatoria T_B se distribuye como una variable aleatoria exponencial de parámetro $\mu(B)$ y la distribución de Δ_B está dada por $\mu(\cdot \cap B)/\mu(B)$.

Demostración. Consideremos $A \subset B$. Definamos

$$N_t^A = \sum_{s \leq t} \mathbb{1}_{\{\Delta_s \in A\}} = \operatorname{card}\{s \leq t : \Delta_s \in A\}.$$

Observemos que $T_A \wedge T_{B\setminus A} = T_B$, y si $\Delta_{T_B} \in A$ entonces $T_A < T_{B\setminus A}$, de esta manera

$$\{T_B \leq t, \Delta_{T_B} \in A\} = \left\{T_A \wedge T_{B\setminus A} \leq t, T_A < T_{B\setminus A}\right\}.$$

En consecuencia,

$$\mathbb{P}(T_B \leq t, \Delta_{T_B} \in A) = \mathbb{P}\left(T_A \wedge T_{B\setminus A} \leq t, T_A < T_{B\setminus A}\right).$$

Por otro lado, T_A es el primer tiempo de salto del proceso N^A, entonces T_A tiene ley exponencial con parámetro $\mu(A)$. Como A y $B\setminus A$ son conjuntos disjuntos entonces T_A y $T_{B\setminus A}$ son variables aleatorias exponenciales independientes de parámetro $\mu(A)$ y $\mu(B) - \mu(A)$ respectivamente. Tenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(T_B \leq t, \Delta_{T_B} \in A\big) \\
&\qquad = \mathbb{P}\left(T_A \wedge T_{B\setminus A} \leq t, T_A < T_{B\setminus A}\right) \\
&\qquad = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_A \wedge s \leq t, T_A < s)\, \mu(B\setminus A) e^{-\mu(B\setminus A)s}\, ds \\
&\qquad = \int_0^t \mathbb{P}(T_A < s)\, \mu(B\setminus A) e^{-\mu(B\setminus A)s}\, ds + \int_t^\infty \mathbb{P}(T_A \leq t)\, \mu(B\setminus A) e^{-\mu(B\setminus A)s}\, ds \\
&\qquad = \int_0^t (1 - e^{-\mu(A)s}) \mu(B\setminus A) e^{-\mu(B\setminus A)s}\, ds + \mathbb{P}(T_A \leq t)\, e^{-\mu(B\setminus A)s} \\
&\qquad = \left(1 - e^{-\mu(B)t}\right)\left(1 - \frac{\mu(B\setminus A)}{\mu(B)}\right) \\
&\qquad = \left(1 - e^{-\mu(B)t}\right)\frac{\mu(A)}{\mu(B)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}(T_B \leq t, \Delta_{T_B} \in A) = \left(1 - e^{-\mu(B)t}\right)\frac{\mu(A)}{\mu(B)},$$

y esto concluye la prueba.

$\square$

1.3. Construcción de Subordinadores.

A continuación, definamos al subordinador.

Definición 1.3.1 Un subordinador, $(\sigma_t, t \geq 0)$, es un proceso estocástico que toma valores en $[0, \infty)$ con trayectorias càdlàg y tal que sus incrementos son independientes y estacionarios.

Lema 1.3.2 *Existe una función $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que*

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_t}\right] = e^{-t\psi(\lambda)},$$

para toda $t, \lambda \geq 0$.

Demostración. Para $t = n$, observemos que

$$\sigma_n = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_3 - \sigma_2) + \ldots + (\sigma_n - \sigma_{n-1}),$$

usando la propiedad de incrementos independientes y estacionarios, tenemos

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_1}e^{-\lambda(\sigma_2-\sigma_1)}\cdots e^{-\lambda(\sigma_n-\sigma_{n-1})}\right] = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[e^{-\lambda(\sigma_i-\sigma_{i-1})}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_1}\right]^n,$$

con $\sigma_0 = 0$ casi seguramente.

Ahora tomemos $t = p/q$, de igual manera

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_{p/q}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_{1/q}}\right]^p.$$

Por otro lado,

$$\sigma_1 = \sigma_{\frac{1}{q}} + \left(\sigma_{\frac{2}{q}} - \sigma_{\frac{1}{q}}\right) + \ldots + \left(\sigma_1 - \sigma_{\frac{q-1}{q}}\right),$$

así,

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_{p/q}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_1}\right]^{p/q}.$$

Si $t \geq 0$, existe $\{t_n, n \geq 1\} \subset \mathbb{Q}$ tal que $t_n \downarrow t$, por la continuidad por la derecha, $\sigma_t = \lim_{t_n \downarrow t} \sigma_{t_n}$ c.s. y como $e^{\lambda\sigma_{t_n}} \to e^{\lambda\sigma_t}$, por teorema de convergencia dominada, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_t}\right] &= \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} e^{-\lambda\sigma_{t_n}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_1}\right]^{t_n} \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_1}\right]^t.
\end{aligned}$$

Esto es, para cualquier $t \geq 0$ se satisface

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_1}\right]^t.$$

Ahora, si definimos $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $\mathbb{E}(e^{-\lambda\sigma_1}) = e^{-\psi(\lambda)}$ para toda $\lambda \geq 0$, tenemos

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_t}\right] = e^{-t\psi(\lambda)}, \quad \text{para toda } \lambda \text{ y } t \geq 0.$$

□

Definición 1.3.3 Sea σ_t un subordinador y $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función. La función ψ se le llama el exponente de Laplace de un subordinador, si

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_t}\right] = e^{-t\psi(\lambda)}, \quad \text{para toda } \lambda \text{ y } t \geq 0,$$

El siguiente teorema determina de manera explicita al exponente de Laplace de un subordinador.

Teorema 1.3.4 (De Finetti, Lévy, Khintchine) .

(i) Si ψ es el exponente de Laplace de un subordinador $\sigma = (\sigma_t, t \geq 0)$ entonces existe una única pareja (k, d) de reales no negativos y una única medida Π en $(0, \infty)$ con $\int(1 \wedge x)\Pi(dx) < \infty$ tal que para toda $\lambda \geq 0$,

$$\psi(\lambda) = k + d\lambda + \int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \Pi(dx). \tag{1.3.1}$$

(ii) Recíprocamente cualquier función ψ que puede expresarse en la forma (1.3.1) es el exponente de Laplace de un subordinador.

Demostración. Tenemos que para toda $t > 0$, $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_t}\right] = e^{-t\psi(\lambda)}$. Observemos que

$$\psi(q) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - e^{-\psi(q)/n}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} n(1 - e^{-\psi(q)/n}).$$

Por otro lado,

$$\mathbb{E}\left[1 - e^{-\lambda\sigma_{1/n}}\right] = 1 - \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_{1/n}}\right] = 1 - e^{-\psi(q)/n}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\psi(q) &= \lim_{n\to\infty} n\mathbb{E}\left[1-e^{-\lambda\sigma_{1/n}}\right] \\ &= q\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-qx}n\mathbf{1}_{\{x<\sigma_{1/n}\}}dx\right] \\ &= q\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-qx}n\mathbb{P}\left(x<\sigma_{1/n}\right)dx \\ &= q\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-qx}\bar{F}_n(x)dx,\end{aligned}$$

donde $\bar{F}_n(x) = n\mathbb{P}\left(x<\sigma_{1/n}\right)$. Por lo tanto,

$$\frac{\psi(q)}{q} = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-qx}\bar{F}_n(x)dx.$$

Por el teorema de continuidad extendida de transformadas de Laplace, $(\bar{F}_n(x), n\geq 1)$ converge conforme n se va a infinito hacia una medida definida en $[0,\infty]$. Y como cada $\bar{F}_n$ decrece, el limite es, necesariamente, de la forma

$$\bar{F}_n(x) \to d\delta_0(dx) + \Lambda(x)dx$$

con $d\geq 0$ y Λ una función no decreciente.
Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\psi(q)}{q} &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-qx}\bar{F}_n(x)dx \\ &= \int_0^\infty e^{-qx}\left(d\delta_0(dx)+\Lambda(x)dx\right) \\ &= d+\int_{(0,\infty)} e^{-qx}\Lambda(x)dx \\ &= d+\int_{(0,\infty)} e^{-qx}\int_x^\infty d(-\Lambda(u))dx + \int_{(0,\infty)} e^{-qx}\Lambda(\infty)dx \\ &= d+\int_{(0,\infty)}\int_0^u e^{-qx}dxd(-\Lambda(u)) - \frac{e^{-qx}}{q}\Lambda(\infty)\Big|_0^\infty \\ &= d+\frac{1}{q}\int_{(0,\infty)}(1-e^{-qu})d(-\Lambda(u)) + \frac{\Lambda(\infty)}{q}.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\psi(q) &= \Lambda(\infty) + dq + \int_0^\infty (1 - e^{-qu}) d(-\Lambda(u)) \\ &= k + dq + \int_0^\infty (1 - e^{-qx}) \Pi(dx),\end{aligned}$$

con $k = \Lambda(\infty)$ y $\Pi(dx) = d(-\Lambda(x))$ en $(0, \infty)$.

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\, \Pi(dx) &= \int_0^1 x\Pi(dx) + \Pi(1, \infty) \\ &= \int_0^1 \int_y^1 \Pi(dx)dy + \Pi(1, \infty) \\ &= \int_0^1 \Pi(y, 1)dy + \Pi(1, \infty) \\ &= \int_0^1 \Pi(y, \infty)dy \\ &= \int_0^1 \Lambda(y)dy < \infty.\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de la primera parte del teorema.

A continuación, probemos la segunda parte del teorema. Tenemos que

$$\psi(\lambda) = k + d\lambda + \int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \Pi(dx).$$

Supongamos que $d = 0$. Tomemos Π tal que $\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\, \Pi(dx) < \infty$. Definamos $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$, como $f(s, x) = x\mathbb{1}_{\{s\in(0,t]\}}$.

Para $B \in \mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathcal{B}([0, \infty])$, consideremos

$$M(B) = \sum_{t\geq 0} \mathbb{1}_{\{(t,\Delta_t)\in B\}},$$

la medida aleatoria de Poisson con intensidad $\lambda\otimes[\Pi + k\delta_\infty]$ sobre $E = [0, \infty)\times[0, \infty]$, así $(\Delta_t, t \geq 0)$ es un proceso puntual de Poisson con medida característica $\Pi + k\delta_\infty$. Ahora definamos

$$T_\infty = \inf \{t :\, \Delta_t = \infty\}$$

y para toda $t \leq T_\infty$,

$$\Sigma_t = \sum_{0\leq s\leq t} \Delta_s.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\int_E f(s,x)M(ds\otimes dx) &= \int_E x\mathbb{1}_{\{s\in(0,t]\}}M(ds\otimes dx)\\
&= \int_E x\mathbb{1}_{\{s\in(0,t]\}}\sum_{t'>0}\delta_{(t',\Delta_{t'})}\left(ds\otimes dx\right)\\
&= \sum_{t'\leq t}\int_E x\delta_{(t',\Delta_{t'})}\left(ds\otimes dx\right)\\
&= \sum_{t'\leq t}\Delta_{t'},
\end{aligned}$$

la ultima igualdad es por que $\delta_{(t',\Delta_{t'})}\left(ds\otimes dx\right) = 1$ si y solo si $s = t'$ y $x = \Delta_{t'}$.

Así,

$$\Sigma_t = \int f(s,x)M(ds\otimes dx).$$

De la fórmula de Campbell, tenemos

$$\mathbb{E}\left[e^{-q\Sigma_t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-<M,qf>}\right] = \exp\left\{-\int(1-e^{-qf(s,x)})\lambda\otimes\left[\Pi + k\delta_\infty\right]\left(ds\otimes dx\right)\right\},$$

pero

$$\begin{aligned}
-\int_E &\left(1-e^{-qf(s,x)}\right)\lambda\otimes\left[\Pi + k\delta_\infty\right]\left(ds\otimes dx\right)\\
&= -\int_{(0,\infty)}\int_{(0,\infty]}\left(1-e^{-qx\mathbb{1}_{\{s\in(0,t]\}}}\right)\left(ds\otimes\left[\Pi(dx)+k\delta_\infty\right]\right)\\
&= -\int_0^t\int_{(0,\infty]}\left(1-e^{-qx}\right)\left(ds\otimes\left[\Pi(dx)+k\delta_\infty\right]\right)\\
&= -t\int_{(0,\infty)}\left(1-e^{-qx}\right)\Pi(dx) - t\int_{(0,\infty]}\left(1-e^{-qx}\right)k\delta_\infty\\
&= -t\int_{(0,\infty)}\left(1-e^{-qx}\right)\Pi(dx) - tk, \qquad (1.3.2)
\end{aligned}$$

en consecuencia
$$\mathbb{E}\left[e^{-q\Sigma_t}\right] = e^{-tk-t\int_{(0,\infty)}\left(1-e^{-qx}\right)\Pi(dx)},$$
para toda t, $q \geq 0$.
Ahora, veamos que $\Sigma_t < \infty$ c.s. para toda $t < T_\infty$. Observemos que para $y \geq 0$, $0 \leq e^{-y} \leq 1$, así, $1 - e^{-y} \leq 1$. Si $y < 1$,
$$e^{-y} = 1 - y + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!},$$
con $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} \geq 0$, lo cual implica que $e^{-y} \geq 1 - y$, es decir, $y \geq 1 - e^{-y}$, por lo tanto
$$1 - e^{-y} \leq 1 \wedge y, \text{ para toda } y > 0.$$
Usando lo anterior y que $\int_{(0,\infty)}(1 \wedge x)\Pi(dx) < \infty$, tenemos
$$\int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{-x}\right) \Pi(dx) \leq \int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\Pi(dx) < \infty.$$
Así, usando el hecho de que existe una constante C_q tal que $(1-e^{-qx})(1-e^{-x})^{-1} \leq C_q$
$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{-qx}\right) \Pi(dx) &= \int_{(0,\infty)} \frac{1 - e^{-qx}}{1 - e^{-x}}(1 - e^{-x})\Pi(dx)\\ &\leq C_q \int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{-x}\right) \Pi(dx)\\ &\leq C_q \int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\Pi(dx) < \infty.\end{aligned}$$
Concluimos que
$$\int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{-qx}\right) \Pi(dx) < \infty.$$
Por teorema de convergencia dominada, notemos lo siguiente
$$\begin{aligned}\lim_{q\to 0} \mathbb{E}\left[e^{-q\Sigma_t}\right] &= \lim_{q\to 0} \mathbb{E}\left[e^{-q\Sigma_t}\mathbb{1}_{\{\Sigma_t<\infty\}}\right]\\ &= \mathbb{P}\left(\Sigma_t < \infty\right).\end{aligned}$$
Por otro lado, de (1.3.2)
$$\mathbb{E}\left[e^{-q\Sigma_t}\mathbb{1}_{\{\Sigma_t<\infty\}}\right] = \exp\left\{-t\int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{-qx}\right) \Pi(dx)\right\}$$

y

$$\lim_{q\to 0}\int_{(0,\infty)}\left(1-e^{-qx}\right)\Pi(dx)=\int_{(0,\infty)}\lim_{q\to 0}\left(1-e^{-qx}\right)\Pi(dx)=0,$$

en consecuencia

$$\mathbb{P}(\Sigma_t<\infty)=1.$$

Entonces, si $d=0$ en la ecuación (1.3.1)

$$\mathbb{E}\left[e^{-q\Sigma_t}\right]=e^{-t\left(k+\int_{(0,\infty)}\left(1-e^{-qx}\right)\Pi(dx)\right)}=e^{-t\psi(q)}.$$

También, como $\Sigma_t=\int_E x\mathbf{1}_{\{s\in(0,t]\}}M(ds\times dx)$, Σ_t es no decreciente. Además,

$$\Sigma_{t+s}-\Sigma_t=\int_E x\mathbf{1}_{\{u\in(t,t+s]\}}M(du\times dx),$$

es independiente de la medida aleatoria Poisson M restringida a $(0,t]\times(0,\infty)$, por lo que $(\Sigma_{t+s}-\Sigma_t)$ es independiente de $\{\Sigma_u,u\leq t\}$. Con lo que se concluye que Σ_t tiene incrementos independientes.

Veamos que Σ_t tiene incrementos estacionarios.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-\lambda(\Sigma_{t+s}-\Sigma_t)}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\int_E x\mathbf{1}_{\{u\in(t,t+s]\}}M(du\times dx)}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\langle M,f\rangle}\right]\\ &= e^{-sk-s\int(1-e^{-\lambda x})\Pi(dx)}\\ &= \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\Sigma_s}\right].\end{aligned}$$

Entonces,

$$\Sigma_{t+s}-\Sigma_t\overset{L}{=}\Sigma_s,$$

para todo $t\geq 0$.

Ahora, tomemos $d>0$ y definamos

$$\Sigma_t^{(d)}=dt+\Sigma_t.$$

De esta manera

$$\mathbb{E}\left[e^{-q\Sigma_t^{(d)}}\right]=\mathbb{E}\left[e^{-qdt-q\Sigma_t}\right]=e^{-t\psi(q)},$$

con

$$\psi(q)=k+dq+\int_{(0,\infty)}\left(1-e^{-qx}\right)\Pi(dx),$$

esto concluye la prueba.

□

Como consecuencia del resultado anterior, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.3.5 *Para toda $t \geq 0$,*

$$\sigma_t = dt + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta_s, \ \ c.s. \ ,$$

donde $\Delta = (\Delta_s, s \geq 0)$ es un proceso de Poisson puntual con valores en $(0, \infty]$ y medida característica $\Pi + k\delta_\infty$. El tiempo de vida de σ está dado por $\zeta = \text{ínf}\,\{t : \ \Delta_t = \infty\}$

Existe un teorema mas general que el teorema (1.3.4), aplicados a ciertos tipos de procesos, llamados procesos de Lévy.

Definición 1.3.6 (Procesos de Lévy) Diremos que un proceso estocástico, $(X_t, t \geq 0)$, que toma valores en $\mathbb{R}$ es un proceso de Lévy si

1. Las trayectorias de X_t son càdlàg.
2. Los incrementos de X son independientes, es decir, para todo $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n < \infty$ con $n \geq 1$, las variables aleatorias

$$\left(X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right),$$

   son independientes.
3. Para todo $s, t \geq 0$, la ley del proceso $(X_{t+s} - X_t, s \geq 0)$ es igual a la de $(X_s, s \geq 0)$.

Teorema 1.3.7 (Formula de Lévy-Khintchine) *Sea X_t un proceso de Lévy en $\mathbb{R}$. Para todo $t \geq 0$, X_t es infinitamente divisible y la función característica de X_t está dada por*

$$\mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}\lambda X_t}\right] = e^{-t\Psi(\lambda)}, \ \textit{para toda } \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.3.3}$$

donde $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda) = &- \mathrm{i}a\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} \\ &+ \int_{x \in \mathbb{R}} \left(1 - e^{\mathrm{i}\lambda x} + \mathrm{i}\lambda x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}}\right) \Pi(dx), \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ y Π una medida sobre $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y es tal que $\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} 1 \wedge ||x||^2 \Pi(dx) < \infty$

La demostración se puede consultar en [[21], Teorema 8.1].
En el teorema anterior, a recibe el nombre de coeficiente lineal, σ el coeficiente Gaussiano y Π es la medida de Lévy de X. La tercia (a, σ, Π) caracteriza a X y lo llamaremos como la tripleta característica de Lévy-Khintchine.

En este trabajo estaremos interesados en un tipo especial de proceso de Lévy, a saber, *procesos de Lévy espectralmente negativos (SNLP)* con trayectorias de variación acotada, intuitivamente son aquellos procesos que solamente saltan hacia abajo.

Definición 1.3.8 (SNLP) Se dice que un proceso de Lévy en $\mathbb{R}$, $(X_t, t \geq 0)$, es un proceso de Lévy espectralmente negativo si su medida de Lévy, Π, es tal que $\Pi(0, \infty) = 0$.

Una condición necesaria y suficiente para que el proceso X tenga trayectorias de variación acotada es que [[7], Lema 2.12]

$$\sigma = 0 \quad \text{y} \quad \int_{(-\infty,0)} (1 \wedge |x|)\Pi(dx) < \infty.$$

Como consecuencia, si X es un proceso de Lévy con trayectorias de variación acotada con tripleta característica de Lévy-Khintchine $(a, 0, \Pi)$, la ecuación (1.3.4) se reduce a

$$\Psi(\lambda) = -\mathrm{i}d\lambda + \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{\mathrm{i}\lambda x}\right) \Pi(dx),$$

donde la constante $d \in \mathbb{R}$ está definida como

$$d := a - \int_{|x|<1} x\Pi(dx).$$

También en este caso, X se puede escribir de la siguiente manera

$$X_t = at + \sigma_t^+ - \sigma_t^-, \quad t \geq 0,$$

donde σ_t^+ y σ_t^- son subordinadores independientes, en particular si X es un proceso de Lévy espectralmente negativo con trayectorias de variación acotada, entonces

$$X_t = at - \sigma_t, \tag{1.3.5}$$

con σ_t un subordinador sin deriva.

Para procesos de Lévy espectralmente negativo con tripleta característica $(a, 0, \Pi)$, en lugar de considerar la función característica (1.3.4), es preferible trabajar con el exponente de Laplace $\psi(\lambda)$,

$$\psi(\lambda) := \frac{1}{t} \log \mathbb{E}\left[e^{\lambda X_t}\right] = -\Psi(-\mathrm{i}\lambda),$$

el cual es finito para toda $\lambda \geq 0$. Así, ψ se escribe como

$$\psi(\lambda) = a\lambda - \int_{(-\infty,0)} \left(1 - e^{\lambda x} + \lambda x \mathbb{1}_{(|x|<1)}\right) \Pi(dx),$$

mas aun, si añadimos la hipótesis de que X_t tiene trayectorias de variación acotada, entonces ψ se puede reescribir como sigue

$$\psi(\lambda) = \tilde{a}\lambda - \int_{(-\infty,0)} \left(1 - e^{\lambda x}\right) \Pi(dx), \tag{1.3.6}$$

donde,

$$\tilde{a} := a - \int_{|x|<1} x\Pi(dx) > 0,$$

de lo contrario, ψ sería el exponente de Laplace de un subordinador decreciente.

Capítulo 2

Funciones de Escala.

En este capitulo se estudia a las funciones de escala. Vamos a denotar por $(X_t, t \geq 0)$ a un proceso de Lévy espectralmente negativo con trayectorias de variación acotada definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, con tripleta característica de Lévy-Khintchine $(a, 0, \Pi)$. Sabemos que el exponente de Laplace está dado por

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta X_t}\right] = e^{t\psi(\theta)},$$

para $\theta \geq 0$ y $t \geq 0$, donde

$$\psi(\theta) = \tilde{a}\theta - \int_{(-\infty,0)} \left(1 - e^{\theta z}\right) \Pi(dz),$$

con

$$\tilde{a} = a - \int_{|z|<1} z\Pi(dz) > 0.$$

También usaremos las siguientes notaciones,

$$\underline{X}_t = \inf_{0\leq s\leq t} X_s, \quad \overline{X}_t = \sup_{0\leq s\leq t} X_s.$$

2.1. Martingala Asociada a la Transformación de Esscher.

A continuación introducimos una martingala que será de apoyo para el desarrollo de este trabajo. Para $\beta > 0$, definamos al proceso $\mathcal{E}(\beta) = \{\mathcal{E}_t(\beta) \,:\, t \geq 0\}$, donde

$$\mathcal{E}_t(\beta) := \exp\left\{\beta X_t - \psi(\beta)t\right\}, \quad t \geq 0. \tag{2.1.1}$$

La ecuación anterior también se le conoce como la *transformada de Esscher.*

Teorema 2.1.1 *Para cada $\beta > 0$, el proceso $\mathcal{E}(\beta)$ es una $\mathbb{P}$-martingala con respecto a la filtración natural $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, es decir, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s\,;\, 0 \leq s \leq t)$.*

Demostración. Claramente $\{\mathcal{E}_t(\beta), t \geq 0\}$ es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Como X tiene incrementos independientes y estacionarios, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathcal{E}_{t+s}(\beta) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[\mathcal{E}_t(\beta) e^{\beta(X_{t+s}-X_t)-\psi(\beta)s} \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathcal{E}_t(\beta)\mathbb{E}\left[e^{\beta(X_{t+s}-X_t)} e^{-\psi(\beta)s}\right] \\
&= \mathcal{E}_t(\beta)\mathbb{E}\left[e^{\beta X_s}\right] e^{-\psi(\beta)s} \\
&= \mathcal{E}_t(\beta).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{E}_t$ es martingala.

□

El hecho de que $\mathbb{E}\left[\mathcal{E}_t(\beta)\right] = 1$, para toda t, $c \geq 0$, el proceso se puede usar para definir una nueva medida de probabilidad, $\mathrm{d}\mathbb{P}_x^\beta/\mathrm{d}\mathbb{P}_x$ sobre la σ-álgebra $\mathcal{F}_t$, es decir, puede ser utilizado para llevar acabo un cambio de medida en $(X, \mathbb{P}_x)$, de la siguiente manera

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_x^\beta}{\mathrm{d}\mathbb{P}_x}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\mathcal{E}_t(\beta)}{\mathcal{E}_0(\beta)} = \exp\left\{\beta(X_t - x) - \psi(\beta)t\right\}, \quad t \geq 0. \tag{2.1.2}$$

Teorema 2.1.2 *Sea $\beta > 0$. Entonces el proceso $(X, \mathbb{P}^\beta)$ es un proceso de Lévy espectralmente negativo con exponente de Laplace, $\psi_\beta(\theta)$, dado por*

$$\psi_\beta(\theta) := \psi(\theta + \beta) - \psi(\beta),$$

para toda $\theta \geq -\beta$.

La demostración se puede consultar en [[7], Corolario 3.10].

La transformada de Esscher también es valido con tiempos de paro.

Corolario 2.1.3 *Bajo las condiciones del teorema (2.1.2), si τ es un $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$-tiempo de paro, entonces*

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\beta}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_\tau} = \mathcal{E}_\tau(\beta), \quad \text{en } \{\tau < \infty\},$$

dicho de otra manera, para todo $A \in \mathcal{F}_\tau$, tenemos

$$\mathbb{P}^\beta(A, \tau < \infty) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(A,\tau<\infty)}\mathcal{E}_\tau(\beta)\right]$$

.

Demostración. Por definición, si $A \in \mathcal{F}_\tau$, entonces $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, así

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^\beta(A \cap \{\tau \leq t\}) =& \mathbb{E}\left[\mathcal{E}_t \mathbb{1}_{\{A\cap\{\tau\leq t\}\}}\right]\\ =&\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathcal{E}_t \mathbb{1}_{\{A\cap\{\tau\leq t\}\}}\,\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right]\right]\\ =&\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{A\cap\{\tau\leq t\}\}}\mathbb{E}\left[\mathcal{E}_t\,\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right]\right]\\ =&\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{A\cap\{\tau\leq t\}\}}\mathcal{E}_\tau\right],\end{aligned}$$

en la ultima igualdad, es porque $\mathcal{E}_t$ es martingala. Tomando el límite cuando t se va a infinito y por el teorema de convergencia monótona, se obtiene el resultado.

□

2.2. Distribución del Mínimo y Máximo.

Veamos algunos hechos importantes acerca de la ley del supremo e ínfimo del proceso X, que nos será útil mas adelante.

Lema 2.2.1 (Lema de Dualidad) *Para cada $t > 0$ fija, definamos el proceso invertido en el tiempo*

$$\left\{X_{(t-s)-} - X_t : 0 \leq s \leq t\right\}$$

y el proceso dual,

$$\{-X_s : 0 \leq s \leq t\}.$$

Entonces los dos procesos tienen la misma ley bajo $\mathbb{P}$.

La prueba se puede ver en [[7], Lema 3.4].

Lema 2.2.2 *Para cada $t > 0$ fija, se tiene que los vectores*

$$\left(\overline{X}_t, \overline{X}_t - X_t\right) \;\; y \;\; (X_t - \underline{X}_t, -\underline{X}_t)$$

son iguales en ley.

Demostración. Definamos $\widetilde{X}_s = X_t - X_{(t-s)-}$ para $0 \leq s \leq t$ y $\underline{\widetilde{X}}_t = \inf_{0\leq s\leq t} \widetilde{X}_s$. Usando la propiedad càdlàg de la trayectoria de X, deducimos que

$$\left(\overline{X}_t, \overline{X}_t - X_t\right) = \left(\widetilde{X}_t - \underline{\widetilde{X}}_t, -\underline{\widetilde{X}}_t\right)$$

casi seguramente. Usando el Lema de Dualidad tenemos que $\left\{\widetilde{X}_s : 0 \leq s \leq t\right\}$ es igual en ley a $\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$ bajo $\mathbb{P}$. Por lo tanto,

$$\left(\overline{X}_t, \overline{X}_t - X_t\right) \stackrel{L}{=} \left(X_t - \underline{X}_t, -\underline{X}_t\right).$$

$\square$

Definición 2.2.3 Definimos a la función $\Phi(q)$, como la raíz mas grande de la ecuación $\psi(\lambda) = q$, es decir

$$\Phi(q) = \sup\{\lambda \geq 0 \, : \, \psi(\lambda) = q\}, \text{ para toda } q \geq 0. \tag{2.2.1}$$

Recordemos que, para $x \geq 0$, el tiempo de paro τ_x^+, está definido como

$$\tau_x^+ = \text{ínf}\{t > 0 \, : \, X_t > x\},$$

que también es llamado el primer tiempo de pasada.

Teorema 2.2.4 *Para cualquier proceso de Lévy espectralmente negativo, con $q \geq 0$,*

$$\mathbb{E}\left[e^{-q\tau_x^+}; \tau_x^+ < \infty\right] = e^{-\Phi(q)x}, \tag{2.2.2}$$

donde $\Phi(q)$ está dado por (2.2.1).

Demostración. Fijemos $q > 0$, usando que X es espectralmente negativo, $X_{\tau_x^+} = x$ en $\tau_x^+ < \infty$ y $\mathbb{E}[\mathcal{E}_t(\Phi(q))] = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\Phi(q)X_t - qt} \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_x^+}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(\tau_x^+ \geq t)} e^{\Phi(q)X_t - qt} \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_x^+}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(\tau_x^+ < t)} e^{\Phi(q)X_t - qt} \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_x^+}\right] \\
&= \mathbb{1}_{(\tau_x^+ \geq t)} e^{\Phi(q)X_t - qt} + \mathbb{1}_{(\tau_x^+ < t)} e^{\Phi(q)x - q\tau_x^+} \mathbb{E}\left[e^{\Phi(q)(X_t - X_{\tau_x^+}) - q(t - \tau_x^+)} \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_x^+}\right] \\
&= \mathbb{1}_{(\tau_x^+ \geq t)} e^{\Phi(q)X_t - qt} + \mathbb{1}_{(\tau_x^+ < t)} e^{\Phi(q)x - q\tau_x^+} \mathbb{E}\left[e^{\Phi(q)(X_t - X_{\tau_x^+}) - q(t - \tau_x^+)}\right] \\
&= \mathbb{1}_{(\tau_x^+ \geq t)} e^{\Phi(q)X_t - qt} + \mathbb{1}_{(\tau_x^+ < t)} e^{\Phi(q)x - q\tau_x^+} \\
&= e^{\Phi(q)X_{t \wedge \tau_x^+} - q(t \wedge \tau_x^+)},
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad usamos el corolario 2.1.3. Tomando esperanza, del lado izquierdo tenemos

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{\Phi(q)X_t - qt} \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_x^+}\right]\right] = \mathbb{E}\left[e^{\Phi(q)X_t - qt}\right],$$

y del lado derecho

$$\mathbb{E}\left[e^{\Phi(q)X_{t\wedge\tau_x^+}-q(t\wedge\tau_x^+)}\right].$$

Por lo tanto

$$1=\mathbb{E}\left[e^{\Phi(q)X_t-qt}\right]=\mathbb{E}\left[e^{\Phi(q)X_{t\wedge\tau_x^+}-q(t\wedge\tau_x^+)}\right].$$

Ahora, observemos que $X_{t\wedge\tau_x^+}\leq x$, lo cual implica que $e^{\Phi(q)X_{t\wedge\tau_x^+}-q(t\wedge\tau_x^+)}\leq e^{\Phi(q)x}$, aplicando teorema de convergencia dominada cuando t tiende a infinito, obtenemos

$$\mathbb{E}\left[e^{\Phi(q)x-q\tau_x^+}\right]=1,$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[e^{-q\tau_x^+}\right]=e^{-\Phi(q)x}.$$

$\square$

A partir del resultado anterior, podemos decir como es la distribución del supremo del proceso X. En lo siguiente, una variable aleatoria exponencial que tiene parámetro cero, se entiende como un valor que es infinito casi seguramente.

Corolario 2.2.5 *Supongamos que $q\geq 0$ y sea e_q una variable aleatoria exponencial con parámetro q que es independiente de X. Entonces $\overline{X}_{e_q}$ tiene distribución exponencial con parámetro $\Phi(q)$.*

Demostración. Primero supongamos que $q>0$, entonces

$$\mathbb{P}(\overline{X}_{e_q}>x)=\mathbb{P}(\tau_x^+<e_q)=\mathbb{E}\left[e^{-q\tau_x^+}\mathbb{1}_{\tau_x^+<\infty}\right].$$

Por lo tanto, por (2.2.2)

$$\mathbb{P}(\overline{X}_{e_q}>x)=e^{-\Phi(q)x}.$$

En otras palabras, $\overline{X}_{e_q}$ tiene distribución exponencial con parámetro $\Phi(q)$ para $q>0$.

Para el caso $q=0$, tomamos el límite cuando q tiende a cero en el caso anterior. Notemos que e_q es igual en distribución a $\frac{1}{q}e_1$, así, gracias a la monotonía de $\overline{X}$, la continuidad de $\Phi(q)$ y el teorema de convergencia monótona,

$$\mathbb{P}(\overline{X}_\infty>x)=\lim_{q\downarrow 0}\mathbb{P}(\overline{X}_{q^{-1}e_1}>x)=\lim_{q\downarrow 0}e^{-\Phi(q)x}=e^{-\Phi(0)x}.$$

Esto concluye la prueba.

$\square$

Para estudiar la ley del ínfimo, necesitamos introducir la siguiente martingala, conocida como la *martingala de Kella-Whitt*.

Teorema 2.2.6 *Sea X un proceso de Lévy espectralmente negativo con trayectorias de variación acotada. Para cada $\theta > 0$ y $x \geq 0$, el proceso*

$$M_t^x := \psi(\theta) \int_0^t e^{-\theta(\overline{X}_s \vee x - X_s)} ds + 1 - e^{-\theta(\overline{X}_t \vee x - X_t)} - \theta(\overline{X}_t \vee x), \quad t \geq 0$$

es una $\mathbb{P}$-martingala respecto a $\mathcal{F}$.

La demostración se puede consular en la pagina 98 de ([7]).

La ley del ínfimo del proceso X no es tan simple como la del supremo, en el siguiente resultado vemos como es su transformada de Laplace.

Teorema 2.2.7 *Supongamos que e_q es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $q > 0$ independiente del proceso X. Entonces para toda $\theta > 0$,*

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta \underline{X}_{e_q}}\right] = \frac{q(\theta - \Phi(q))}{\Phi(q)(\psi(\theta) - q)}. \tag{2.2.3}$$

El caso $\theta = \Phi(q)$, se entiende como límite, es decir, la expresión (2.2.3) del lado derecho es $q/\Phi(q)\psi^{'}(\Phi(q))$.

Demostración. Tratemos primero el caso θ, $q > 0$ y $\theta \neq \phi(q)$. Sabemos que por dualidad $\overline{X}_t - X_t \stackrel{L}{=} -\underline{X}_t$. Consideremos la martingala de Kella-Whitt,

$$M_t = \psi(\theta) \int_0^t e^{-\theta(\overline{X}_s - X_s)} ds + 1 - e^{-\theta(\overline{X}_t - X_t)} - \theta \overline{X}_t,$$

y observemos que $\mathbb{E}[M_t] = 0$. Sea e_q una variable aleatoria con ley exponencial de parámetro $q > 0$ independiente del proceso X, entonces

$$\mathbb{E}\left[M_{e_q}\right] = \psi(\theta)\mathbb{E}\left[\int_0^{e_q} e^{-\theta(\overline{X}_s - X_s)} ds\right] + 1 - \mathbb{E}\left[e^{-\theta(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})}\right] - \theta\mathbb{E}\left[\overline{X}_{e_q}\right], \tag{2.2.4}$$

utilizando el hecho que $\overline{X}_{e_q}$ tiene distribución exponencial con parámetro $\Phi(q)$,

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_{e_q}\right] = \frac{1}{\Phi(q)},$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^{e_q} e^{-\theta(\overline{X}_s - X_s)} ds\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty}\int_0^{u} q e^{-qu} e^{-\theta(\overline{X}_s - X_s)} ds\, du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty}\int_s^{\infty} q e^{-qu} e^{-\theta(\overline{X}_s - X_s)} du\, ds\right] \\
&= \frac{1}{q}\mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} q e^{-qs} e^{-\theta(\overline{X}_s - X_s)} ds\right] \\
&= \frac{1}{q}\mathbb{E}\left[e^{-\theta(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})}\right] \\
&= \frac{1}{q}\mathbb{E}\left[e^{\theta \underline{X}_{e_q}}\right],
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utilizó el Lema 2.2.2. Esto implica que la ecuación (2.2.4) es equivalente a

$$0 = \frac{\psi(\theta)}{q}\mathbb{E}\left[e^{\theta \underline{X}_{e_q}}\right] + 1 - \mathbb{E}\left[e^{\theta \underline{X}_{e_q}}\right] - \frac{\theta}{\Phi(q)},$$

esto es,

$$\left(\frac{\psi(\theta) - q}{q}\right)\mathbb{E}\left[e^{\theta \underline{X}_{e_q}}\right] = \frac{\theta - \Phi(q)}{\Phi(q)}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta \underline{X}_{e_q}}\right] = \frac{q\left(\theta - \Phi(q)\right)}{\Phi(q)\left(\psi(\theta) - q\right)}.$$

Para el caso $\theta = \Phi(q)$ y $q > 0$, obtenemos el resultado a partir del caso $\theta \neq \Phi(q)$, tomando el límite cuando θ tiende a $\Phi(q)$.

□

Observación 2.2.8 *Sabemos que, si $\psi^{'}(0+) < 0$, entonces $\Phi(0) > 0$, así,*

$$\lim_{q \downarrow 0} \frac{q}{\Phi(q)} = 0,$$

también, si $\psi^{'}(0+) \geq 0$, entonces $\Phi(q) \to 0$, cuando $q \to 0$, en consecuencia,

$$\lim_{q \downarrow 0} \frac{q}{\Phi(q)} = \psi^{'}(0+).$$

Por lo tanto, si hacemos que q tienda a cero en la ecuación (2.2.3), tenemos que

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta \underline{X}_{\infty}}\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi^{'}(0+) < 0 \\ \theta\psi^{'}(0+)/\psi(\theta) & \text{si } \psi^{'}(0+) \geq 0. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

2.3. Construcción de Funciones de Escala.

Definición 2.3.1 Para un proceso de Lévy espectralmente negativo, X, con exponente de Laplace ψ, definimos una familia de funciones indexadas por $q \geq 0$,

$$W^{(q)} : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty),$$

de la siguiente manera. Para cada $q \geq 0$ definimos a $W^{(q)}$ como la única función continua por la derecha tal que, para $x \geq 0$, su transformada de Laplace está dada por

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W^{(q)}(x) dx = \frac{1}{\psi(\beta) - q}, \quad \beta > \Phi(q)$$

y $W^{(q)}(x) = 0$ para $x < 0$. Si $q = 0$ escribiremos simplemente W en vez de $W^{(0)}$.

A las funciones $W^{(q)}$ se les conoce con el nombre *funciones q-escala* y la existencia de dichas funciones se dará en el siguiente teorema.

Las funciones q-escala es la herramienta principal para el estudio de las identidades correspondientes al problema del cruce de barrera. A continuación veamos que dichas funciones q-escala existen.

Teorema 2.3.2 *Para todo proceso de Lévy espectralmente negativo con trayectorias de variación acotada, las funciones q-escala existen para toda $q \geq 0$.*

Demostración. Supongamos primero que $\psi'(0+) > 0$ y $q = 0$. Definamos a $W(x)$ como

$$W(x) = \frac{1}{\psi'(0+)} \mathbb{P}_x \left(\underline{X}_\infty \geq 0 \right).$$

Observemos que para toda $x < 0$, $\underline{X}_\infty < 0$, así, $\mathbb{P}_x \left(\underline{X}_\infty \geq 0 \right) = 0$, es decir, $W(x) = 0$ si $x < 0$. $W(x)$ es càdlàg, ya que $\mathbb{P} \left(-\underline{X}_\infty \leq x \right)$ es càdlàg, pues es una función distribución, en consecuencia, $W(x)$ es càdlàg y no decreciente.

Ahora veamos que su transformada de Laplace es precisamente $1/\psi(\beta)$.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\beta x}W(x)dx &= \int_0^\infty \frac{1}{\psi'(0+)}e^{-\beta x}\mathbb{P}_x\left(-\underline{X}_\infty \leq x\right)dx\\ &= \frac{1}{\psi'(0+)}\int_0^\infty e^{-\beta x}\int_0^x \mathbb{P}_x\left(-\underline{X}_\infty \in dy\right)dx\\ &= \frac{1}{\psi'(0+)}\int_0^\infty \int_y^\infty e^{-\beta x}dx\mathbb{P}_x\left(-\underline{X}_\infty \in dy\right)\\ &= \frac{1}{\beta\psi'(0+)}\int_0^\infty e^{-\beta y}\mathbb{P}_x\left(-\underline{X}_\infty \in dy\right)\\ &= \frac{1}{\beta\psi'(0+)}\mathbb{E}\left[e^{\beta \underline{X}_\infty}\right].\end{aligned}$$

Por otro lado, recordemos que si $\psi'(0+) > 0$

$$\mathbb{E}\left[e^{\beta \underline{X}_\infty}\right] = \frac{\psi'(0+)\beta}{\psi(\beta)}.$$

Así,

$$\int_0^\infty e^{-\beta x}W(x)dx = \frac{1}{\psi(\beta)}.$$

Ahora tratemos el caso cuando $q \geq 0$ y $\psi'(0+) < 0$. Definamos

$$W^{(q)} := e^{\Phi(q)x}W_{\Phi(q)}(x),$$

donde $W_{\Phi(q)}$ juega el papel de W para el proceso $(X, \mathbb{P}^{\Phi(q)})$ y su exponente de Laplace es

$$\psi_{\Phi(q)}(\lambda) = \psi(\lambda + \Phi(q)) - q,$$

con ψ el exponente de Laplace del proceso $(X, \mathbb{P})$. Observemos que $\psi'_{\Phi(q)}(0+) = \psi'(\Phi(q)) > 0$, así, $W_{\Phi(q)}$ está bien definida. Calculemos la transformada de Laplace para $\beta > \Phi(q)$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\beta x}W^{(q)}(x)dx &= \int_0^\infty e^{-\beta x}e^{\Phi(q)x}W_{\Phi(q)}(x)dx\\ &= \int_0^\infty e^{-(\beta-\Phi(q))x}W_{\Phi(q)}(x)dx\\ &= \frac{1}{\psi_{\Phi(q)}(\beta - \Phi(q))}\\ &= \frac{1}{\psi(\beta) - q}.\end{aligned}$$

Esto completa la demostración para el caso $q \geq 0$ y $\psi'(0+) < 0$. Notemos que, para el caso $q > 0$ y $\psi'(0+) > 0$, la justificación anterior es valida, ya que en este caso también se tiene $\psi'_{\Phi(q)}(0+) > 0$.
Falta por analizar el caso $q = 0$ y $\psi'(0+) = 0$. Como $W_{\Phi(q)}$ es no decreciente y continua por la derecha, podemos pensarlo como una función de distribución de una medida, abusando de la notación llamémoslo $W_{\Phi(q)}(dx)$ a la medida inducida por $W_{\Phi(q)}(x)$. Usando integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\beta x} W_{\Phi(q)}(x)dx &= \int_0^\infty e^{-\beta x} \int_0^x W_{\Phi(q)}(dy)dx \\ &= \int_0^\infty \int_y^\infty e^{-\beta x} dx W_{\Phi(q)}(dy) \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^\infty e^{-\beta y} W_{\Phi(q)}(dy).\end{aligned}$$

Esto es,

$$\int_{[0,\infty)} e^{-\beta x} W_{\Phi(q)}(dx) = \frac{\beta}{\psi_{\Phi(q)}(\beta)}.$$

Como $\psi'(0+) = 0$, entonces $\Phi(0) = 0$, lo cual implica

$$\lim_{q \searrow 0} \psi_{\Phi(q)}(\beta) = \lim_{q \searrow 0} \left(\psi(\beta + \Phi(q)) - q\right) = \psi(\beta).$$

Así,

$$\lim_{q \searrow 0} \left(\frac{\beta}{\psi_{\Phi(q)}(\beta)} \right) = \frac{\beta}{\psi(\beta)},$$

en consecuencia

$$\lim_{q \searrow 0} \int_{[0,\infty)} e^{-\beta x} W_{\Phi(q)}(dx) = \frac{\beta}{\psi(\beta)}.$$

Por el teorema de continuidad extendida de transformadas de Laplace, existe una medida W^* tal que $W^*[0,x] = \lim_{q \downarrow 0} W_{\Phi(q)}(x)$ y

$$\int_{[0,\infty)} e^{-\beta x} W^*(dx) = \frac{\beta}{\psi(\beta)}.$$

Por lo tanto la distribución que es continua por la derecha, $W(x) := W^*[0,x]$, satisface

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W(x)dx = \frac{1}{\psi(\beta)},$$

para $\beta > 0$ y esto concluye la construcción.
□

Una consecuencia inmediata de la definición anterior es el siguiente resultado.

Corolario 2.3.3 *Para toda $x \geq 0$,*

$$\mathbb{P}\left(-\underline{X}_{e_q} \in dx\right) = \frac{q}{\varPhi(q)} W^{(q)}(dx) - qW^{(q)}(x)dx. \tag{2.3.1}$$

Demostración. Usamos el hecho

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta \underline{X}_{e_q}}\right] = \frac{q\left(\theta - \Phi(q)\right)}{\Phi(q)(\psi(\theta) - q)} = \int e^{-\theta x} \mathbb{P}(-\underline{X}_{e_q} \in dx).$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{q\left(\theta - \Phi(q)\right)}{\Phi(q)(\psi(\theta) - q)} &= \frac{q\theta}{\Phi(q)} \frac{1}{\psi(\theta) - q} - \frac{q}{\psi(\theta) - q} \\
&= \frac{q\theta}{\Phi(q)} \int e^{-\theta x} W^{(q)}(x)dx - q \int e^{-\theta x} W^{(q)}(x)dx \\
&= \frac{q}{\Phi(q)} \int e^{-\theta x} W^{(q)}(dx) - q \int e^{-\theta x} W^{(q)}(x)dx \\
&= \int e^{-\theta x} \left(\frac{q}{\Phi(q)} W^{(q)}(dx) - q\, W^{(q)}(x)dx \right).
\end{aligned}$$

Esto es

$$\int e^{-\theta x} \mathbb{P}(-\underline{X}_{e_q} \in dx) = \int e^{-\theta x} \left(\frac{q}{\Phi(q)} W^{(q)}(dx) - q\, W^{(q)}(x)dx \right).$$

Por lo tanto, concluimos

$$\mathbb{P}\left(-\underline{X}_{e_q} \in dx\right) = \frac{q}{\varPhi(q)} W^{(q)}(dx) - qW^{(q)}(x)dx.$$

□

2.4. Aplicaciones de Funciones de Escala.

Recordemos que para toda $a \in \mathbb{R}$,

$$\tau_a^+ = \text{ínf}\{t > 0 : X_t > a\} \quad \text{y} \quad \tau_a^- = \text{ínf}\{t > 0 : X_t < a\}.$$

Para cada $q \geq 0$, definamos la función $Z^{(q)}$ de la siguiente manera,

$$Z^{(q)}(x) := 1 + q\int_0^x W^{(q)}(y)dy.$$

El siguiente teorema, es el resultado principal de este capítulo, en el cual se pretende presentar una versión mas general en el sentido de la definición del tiempo de ruina, τ_0^-.

Teorema 2.4.1 (One-and two-sided exit formulae) .

(i) Para toda $x \in \mathbb{R}$ y $q \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}}\right] = Z^{(q)}(x) - \frac{q}{\Phi(q)}W^{(q)}(x), \tag{2.4.1}$$

si $q = 0$, entonces $q/\Phi(q)$ se considera como el límite cuando q tiende a cero, en este caso tenemos

$$\mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty) = \begin{cases} 1 - \psi'(0+)W(x) & \text{si } \psi'(0+) > 0 \\ 1 & \text{si } \psi'(0+) \leq 0. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

(ii) Para toda $x \leq a$ y $q \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+}\mathbb{1}_{\{\tau_0^- > \tau_a^+\}}\right] = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}, \tag{2.4.3}$$

y

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \tau_a^+\}}\right] = Z^{(q)}(x) - Z^{(q)}(a)\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}. \tag{2.4.4}$$

Demostración.
(i) Usando el hecho de que la variable aleatoria e_p es independiente del proceso, tenemos

$$\mathbb{P}(e_p > \tau_0^-) = \mathbb{E}\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}}\right].$$

Así, usando el corolario anterior

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}\right] &= \mathbb{P}_x(e_p > \tau_0^-) \\
&= \mathbb{P}_x(\underline{X}_{e_p} < 0) \\
&= 1 - \mathbb{P}(-\underline{X}_{e_p} \leq x) \\
&= 1 - \frac{q}{\Phi(q)}W^{(q)}(x) + q\int_0^x W^{(q)}(y)dy \\
&= Z^{(q)}(x) - \frac{q}{\Phi(q)}W^{(q)}(x).
\end{aligned}
$$

Esto completa la demostración para el caso $q > 0$. Si $q = 0$, tomemos el límite cuando q tiende a cero en el caso $q > 0$. Si $\psi'(0+) \geq 0$,

$$\lim_{q\downarrow 0}\frac{q}{\Phi(q)} = \psi'(0+),$$

ya que $\Phi(0) = 0$. Si $\psi'(0+) < 0$, entonces $\Phi(0) \neq 0$, en consecuencia

$$\lim_{q\downarrow 0}\frac{q}{\Phi(q)} = 0,$$

y por otro lado $Z^{(0)} \equiv 1$, por lo tanto,

$$\mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty) = \begin{cases} 1 - \psi^{'}(0+)W(x), & \text{si } \psi^{'}(0+) > 0 \\ 1, & \text{si } \psi^{'}(0+) \leq 0. \end{cases} \tag{2.4.5}$$

(ii) Probemos la ecuación (2.4.3). Primero veamos el caso cuando $q = 0$ y $\psi'(0+) > 0$. Para esto, tenemos que

$$W(x) = \frac{1}{\psi'(0+)}\mathbb{P}_x\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right).$$

Calculemos $\mathbb{P}_x\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right)$ para $x \in [0, a]$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_x\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right) &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_x\left(\underline{X}_\infty \geq 0 \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_a^+}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{\tau_a^+<\tau_0^-\}}\mathbb{P}_x\left(\underline{X}_\infty \geq 0 \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_a^+}\right)\right] + \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{\tau_0^-<\tau_a^+\}}\mathbb{P}_x\left(\underline{X}_\infty \geq 0 \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_a^+}\right)\right] \\
&= \mathbb{P}_a\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right)\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{\tau_a^+<\tau_0^-\}}\right] + \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{\tau_0^-<\tau_a^+\}}\mathbb{P}_x\left(\underline{X}_\infty \geq 0 \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_a^+}\right)\right],
\end{aligned}
$$

observemos que el segundo término de la igualdad anterior es cero, pues en el evento $\left\{\tau_0^- < \tau_a^+\right\}$, el ínfimo del proceso es menor que cero, ya que al ser el proceso de variación acotada $X_{\tau_0^-} < 0$. En consecuencia

$$\mathbb{P}_x\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right) = \mathbb{P}_a\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right)\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\left\{\tau_a^+ < \tau_0^-\right\}}\right] = \mathbb{P}_a\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right)\mathbb{P}_x\left(\tau_a^+ < \tau_0^-\right),$$

esto es

$$\mathbb{P}_x\left(\tau_a^+ < \tau_0^-\right) = \frac{\mathbb{P}_x\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right)}{\mathbb{P}_a\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right)} = \frac{W(x)}{W(a)}.$$

Ahora veamos el caso $q > 0$. Para ello usaremos la transformada de Esscher. Dado que $X_{\tau_a^+} = a$ y $\psi'_{\Phi(q)}(0+) > 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+}\mathbb{1}_{\left\{\tau_a^+ < \tau_0^-\right\}}\right] =& \mathbb{E}_x\left[e^{\Phi(q)(X_{\tau_a^+}-x)-q\tau_a^+}\mathbb{1}_{\left\{\tau_a^+ < \tau_0^-\right\}}\right]e^{-\Phi(q)(a-x)} \\
=& e^{-\Phi(q)(a-x)}\mathbb{P}_x^{\Phi(q)}\left(\tau_a^+ < \tau_0^-\right) \\
=& e^{-\Phi(q)(a-x)}\frac{W_{\Phi(q)}(x)}{W_{\Phi(q)}(a)} \\
=& e^{-\Phi(q)(a-x)}\frac{W^{(q)}(x)e^{-\Phi(q)x}}{W^{(q)}(a)e^{-\Phi(q)a}} \\
=& \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)},
\end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad se aplicó el caso anterior pero con la ley $\mathbb{P}_x^{\Phi(q)}$. Así, tenemos que para $q > 0$,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+}\mathbb{1}_{\left\{\tau_0^- > \tau_a^+\right\}}\right] = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}. \tag{2.4.6}$$

Finalmente, veamos el caso, $q = 0$ y $\psi'(0+) \leq 0$. Para esto, tomamos el límite $q \downarrow 0$ en el caso anterior, es decir, en la ecuación (2.4.6), del lado izquierdo, usando teorema de convergencia monótona, tenemos

$$\lim_{q\downarrow 0}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+}\mathbb{1}_{\left\{\tau_0^- > \tau_a^+\right\}}\right] = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\left\{\tau_0^- > \tau_a^+\right\}}\right] = \mathbb{P}_x\left(\tau_a^+ < \tau_0^-\right).$$

Por otro lado, por el teorema de continuidad extendida para transformadas de Laplace, sabemos que límite $W^q(x)$ existe cuando $q \downarrow 0$, mas aún

$$\lim_{q\downarrow 0} W^{(q)}(x) = W(x),$$

por lo tanto, para $q = 0$ y $\psi'(0+) \leq 0$

$$\mathbb{P}_x\left(\tau_a^+ < \tau_0^-\right) = \frac{W(x)}{W(a)}.$$

Esto concluye la prueba para la ecuación (2.4.3).

Por último, probemos la ecuación (2.4.4). Observemos que

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\infty)}\right] = \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_a^+)}\right] + \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_a^+<\tau_0^-)}\right]$$

así,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_a^+)}\right] = \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\infty)}\right] - \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_a^+<\tau_0^-)}\right]. \tag{2.4.7}$$

Usando la propiedad de Markov fuerte en τ_a^+ y nuevamente el hecho de que $X_{\tau_a^+} = a$, vemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_a^+<\tau_0^-)}\right] &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_a^+<\tau_0^-)}\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau_a^+}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+-q(\tau_0^--\tau_a^+)}\mathbb{1}_{(\tau_a^+<\tau_0^-)}\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau_a^+}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+}\mathbb{1}_{(\tau_a^+<\tau_0^-)}\mathbb{E}_x\left[e^{-q(\tau_0^--\tau_a^+)}\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau_a^+}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+}\mathbb{1}_{(\tau_a^+<\tau_0^-)}\right]\mathbb{E}_a\left[e^{-q\tau_0^-}\right],
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_a^+<\tau_0^-)}\right] = \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+}\mathbb{1}_{(\tau_a^+<\tau_0^-)}\right]\mathbb{E}_a\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\infty)}\right].$$

Regresando a la ecuación (2.4.7), tenemos que para $q > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_a^+)}\right] &= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\infty)}\right] - \mathbb{E}_a\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\infty)}\right]\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+}\mathbb{1}_{(\tau_a^+<\tau_0^-)}\right] \\
&= Z^{(q)}(x) - \frac{q}{\Phi(q)}W^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}\left(Z^{(q)}(a) - -\frac{q}{\Phi(q)}W^{(q)}(a)\right) \\
&= Z^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}Z^{(q)}(a).
\end{aligned}$$

Concluimos, para $q > 0$,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_a^+)}\right] = Z^{(q)}(x) - Z^{(q)}(a)\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}.$$

Para el caso $q = 0$, tomemos el límite cuando q tiende a cero en la ecuación anterior, entonces por el teorema de convergencia monótona,

$$\lim_{q\downarrow 0} \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^-} \mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_a^+)} \right] = \mathbb{P}_x \left(\tau_0^- < \tau_a^+ \right),$$

y del lado derecho, por el teorema de continuidad extendida para transformadas de Laplace,

$$\lim_{q\downarrow 0} \left(Z^{(q)}(x) - Z^{(q)}(a) \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)} \right) = 1 - \frac{W(x)}{W(a)}.$$

La cual termina la prueba.

□

Otra de las cosas que nos va interesar en el siguiente capitulo es lo que a continuación se menciona.

Observación 2.4.2 *De la ecuación (2.4.4), tomando el límite cuando a tiende a infinito y usando teorema de convergencia dominada, obtenemos*

$$\lim_{a\to\infty} \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^-} \mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_a^+)} \right] = \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^-} \mathbb{1}_{(\tau_0^- < \infty)} \right]$$

así, combinando lo anterior con la ecuación (2.4.1), tenemos

$$\lim_{a\to\infty} \left(Z^{(q)}(x) - \frac{Z^{(q)}(a)}{W^{(q)}(a)} W^{(q)}(x) \right) = Z^{(q)}(x) - \frac{q}{\Phi(q)} W^{(q)}(x).$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Z^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)} = \frac{q}{\Phi(q)}. \tag{2.4.8}$$

Definición 2.4.3 Definimos al operador de Dickson-Hipp, $\mathcal{T}_r$, de la siguiente manera,

$$\mathcal{T}_r f(x) = \int_0^\infty e^{-ry} f(y + x) dy,$$

para toda r de tal manera que la integral converja.

Teorema 2.4.4 *El operador de Dickson-Hipp cumple la siguiente identidad,*

$$\frac{d^l}{d\xi^l} \mathcal{T}_\xi W^{(q)}(x) = (-1)^l (l!) \mathcal{T}_\xi^{l+1} W^{(q)}(x), \quad l = 0, 1, \cdots \tag{2.4.9}$$

La demostración se puede consultar en la pagina 393 de ([16]).

Lema 2.4.5 *Sea $q \geq 0$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que $|\psi(c)| < \infty$. Entonces*

$$W^{(q)}(x) = e^{cx} W_c^{(q-\psi(c))}(x), \tag{2.4.10}$$

para toda $x \geq 0$.

Demostración. Tenemos que

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W^{(q)}(x)dx = \frac{1}{\psi(\beta) - q},$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\beta x} e^{cx} W_c^{(q-\psi(c))}(x)dx &= \int_0^\infty e^{-(\beta-c)x} W_c^{(q-\psi(c))}(x)dx \\ &= \frac{1}{\psi_c(\beta - c) - q + \psi(c)} \\ &= \frac{1}{\psi(\beta) - q}.\end{aligned}$$

Comparando las transformadas de la Laplace, concluimos que

$$W^{(q)}(x) = e^{cx} W_c^{(q-\psi(c))}(x).$$

□

Un resultado mas general que (2.4.4) es el siguiente.

Teorema 2.4.6 *Sea $r \geq 0$. Entonces para toda $x \in \mathbb{R}$ y $q > \psi(r) \vee 0$,*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}} ; \tau_0^- < \infty \right] \\ &= e^{rx} + (q - \psi(r))\, e^{rx} \int_0^x e^{-rz} W^{(q)}(z)dz - \frac{q - \psi(r)}{\Phi(q) - r} W^{(q)}(x),\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

y, para $0 \leq x \leq b$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}} ; \tau_0^- < \tau_b^+ \right] &= e^{rx} + (q - \psi(r))\, e^{rx} \int_0^x e^{-rz} W^{(q)}(z)dz \\ &\quad - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)} \left(e^{rb} + (q - \psi(r))\, e^{rb} \int_0^b e^{-rz} W^{(q)}(z)dz \right).\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Demostración. Como $r \geq 0$, entonces $|\psi(r)| < \infty$, así, haciendo el cambio de medida bajo la transformación de Esscher y la ecuación (2.4.1), para toda $x \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \infty\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-q\tau_{-x}^- + r(X_{\tau_{-x}^-} + x)}; \tau_{-x}^- < \infty\right]\\ &= e^{rx}\mathbb{E}\left[e^{-q\tau_{-x}^- + rX_{\tau_{-x}^-}}; \tau_{-x}^- < \infty\right].\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-q\tau_{-x}^- + rX_{\tau_{-x}^-}}; \tau_{-x}^- < \infty\right] &= \mathbb{E}\left[e^{rX_{\tau_{-x}^-} - \psi(r)\tau_{-x}^-} e^{-(q-\psi(r))\tau_{-x}^-}; \tau_{-x}^- < \infty\right]\\ &= \mathbb{E}^r\left[e^{-(q-\psi(r))\tau_{-x}^-}; \tau_{-x}^- < \infty\right]\\ &= \mathbb{E}_x^r\left[e^{-(q-\psi(r))\tau_0^-}; \tau_0^- < \infty\right]\\ &= Z_r^{(p)}(x) - \frac{p}{\Phi_r(p)} W_r^{(p)}(x),\end{aligned}$$

donde $p = q - \psi(r) > 0$. Así

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \infty\right] = e^{rx}\left(Z_r^{(p)}(x) - \frac{p}{\Phi_r(p)} W_r^{(p)}(x)\right).$$

Por otro lado observemos que,

$$\begin{aligned}\Phi_r(p) &= \sup\{\lambda \geq 0 \,:\, \psi_r(\lambda) = p\}\\ &= \sup\{\lambda \geq 0 \,:\, \psi(\lambda + r) - \psi(r) = q - \psi(r)\}\\ &= \sup\{\theta \geq 0 \,:\, \psi(\theta) = q\} - r\\ &= \Phi(q) - r.\end{aligned}$$

Usando que $W_r^{(p)}(x) = W_r^{(q-\psi(r))}(x) = e^{-rx}W^{(q)}(x)$,

$$Z_r^{(p)}(x) = 1 + p\int_0^x e^{-rz}W^{(q)}(z)dz,$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \infty\right]\\ &\quad = e^{rx}\left(1 + (q - \psi(r))\int_0^x e^{-rz}W^{(q)}(z)dz - \frac{q - \psi(r)}{\Phi(q) - r} e^{-rx}W^{(q)}(x)\right),\end{aligned}$$

que es precisamente lo que queríamos probar.

Para la ecuación (2.4.12), observemos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \tau_b^+\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \infty\right] - \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_b^+ < \tau_0^-\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \infty\right] - \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+}; \tau_b^+ < \tau_0^-\right]\mathbb{E}_b\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \infty\right] \\
&= e^{rx} + (q-\psi(r))\, e^{rx}\int_0^x e^{-rz}W^{(q)}(z)dz \\
&- \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}\left(e^{rb} + (q-\psi(r))\, e^{rb}\int_0^b e^{-rz}W^{(q)}(z)dz\right).
\end{aligned}$$

Esto termina la prueba.

□

Notemos que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \infty\right] =& e^{rx} + (q-\psi(r))\, e^{rx}\left(\int_0^\infty e^{-rz}W^{(q)}(z)dz - \int_x^\infty e^{-rz}W^{(q)}(z)dz\right) \\
&- \frac{q-\psi(r)}{\Phi(q)-r}W^{(q)}(x) \\
=& e^{rx} + (q-\psi(r))\, e^{rx}\left(\frac{1}{\psi(r)-q} - \int_x^\infty e^{-rz}W^{(q)}(z)dz\right) \\
&- \frac{q-\psi(r)}{\Phi(q)-r}W^{(q)}(x) \\
=& (\psi(r)-q)\, e^{rx}\int_x^\infty e^{-rz}W^{(q)}(z)dz - \frac{q-\psi(r)}{\Phi(q)-r}W^{(q)}(x) \\
=& (\psi(r)-q)\left(\mathcal{T}_r W^{(q)}(x) + \frac{1}{\Phi(q)-r}W^{(q)}(x)\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $r > \Phi(q)$,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \infty\right] = (\psi(r)-q)\left(\mathcal{T}_r W^{(q)}(x) + \frac{1}{\Phi(q)-r}W^{(q)}(x)\right). \quad (2.4.13)$$

De manera análoga,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \tau_b^+\right] = \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \infty\right] - \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_b^+ < \tau_0^-\right]$$

por otro lado, condicionando sobre $\mathcal{F}_{\tau_b^+}$ y haciendo cálculos similares a los anteriores

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_b^+ < \tau_0^-\right] &= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+}; \tau_b^+ < \tau_0^-\right]\mathbb{E}_b\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \infty\right] \\
&= \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}\mathbb{E}_b\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \infty\right].
\end{aligned}$$

Entonces, usando (2.4.13), tenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \tau_b^+\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \infty\right] - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}\mathbb{E}_b\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \infty\right] \\
&= (\psi(r) - q)\left(\mathcal{T}_r W^{(q)}(x) + \frac{1}{\Phi(q) - r}W^{(q)}(x)\right) \\
&- \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}(\psi(r) - q)\left(\mathcal{T}_r W^{(q)}(b) + \frac{1}{\Phi(q) - r}W^{(q)}(b)\right) \\
&= (\psi(r) - q)\left(\mathcal{T}_r W^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}\mathcal{T}_r W^{(q)}(b)\right).
\end{aligned}$$

Esto es, para toda $r > \Phi(q)$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \tau_b^+\right] \\
&= (\psi(r) - q)\left(\mathcal{T}_r W^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}\mathcal{T}_r W^{(q)}(b)\right).
\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

Las ecuaciones (2.4.14) y (2.4.13) serán de gran ayuda en el siguiente capitulo.

Capítulo 3

Modelo de Riesgo de Seguros con Implementación Tipo Parisino.

Recordemos que $X = (X_t, t \geq 0)$ denota al proceso de Lévy espectralmente negativo de variación acotada, lo cual se puede escribir como

$$X_t = at - \sigma_t, \tag{3.0.1}$$

con σ_t un subordinador sin deriva.

También, recordemos que la función q-escala, $W^{(q)}$, es la única función continua no decreciente con transformada de Laplace

$$\int_0^\infty e^{-\theta z} W^{(q)}(z)dz = \frac{1}{\psi(z) - q}, \quad \text{para} \quad \theta > \Phi(q),$$

donde $\Phi(q) = \sup\{\lambda \geq 0 :\ \psi(\lambda) = q\}$. También definimos

$$Z^{(q)}(x) = 1 + q\int_0^x W^{(q)}(z)dz, \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

y

$$\tau_x^+ = \text{ínf}\{t > 0 :\ X_t > x\} \text{ y } \tau_x^- = \text{ínf}\{t > 0 :\ X_t < x\},$$

para toda $x \in \mathbb{R}$.

En los textos clásicos de teoría de riesgo, se define el tiempo de ruina para un modelo de riesgo, X_t, como sigue

$$\tau_0^- = \text{ínf}\{t > 0\, ,\, X_t < 0\}.$$

En este trabajo se considera el tiempo de ruina, de tal manera que permita al proceso pasar un tiempo aleatorio por debajo del nivel cero antes de declarar la ruina, esperando la recuperación de la compañía.
A continuación, definimos el tiempo de ruina parisino. Usaremos la convención $\inf \emptyset = \infty$.

Consideremos, $(e_d^k)_{k\geq 1}$, una sucesión de variables aleatorias positivas, independientes e idénticamente distribuidas. Sea

$$\tau_{0,1}^- = \tau_0^- = \inf \{t > 0 \, : \, X_t < 0\},$$

el primer tiempo en que el proceso X_t, entra en $(-\infty, 0)$ y

$$\tau_{0,1}^+ = \inf \left\{t > \tau_{0,1}^- \, : \, X_t > 0\right\},$$

que es el primer tiempo, después de $\tau_{0,1}^-$, en que el proceso entra en $(0,\infty)$. Recursivamente, definimos dos sucesiones de tiempos de paro $(\tau_{0,k}^-)_{k\geq 1}$ y $(\tau_{0,k}^+)_{k\geq 1}$ de la siguiente manera, para $k \geq 2$,

$$\tau_{0,k}^- = \inf \left\{t > \tau_{0,k-1}^+ \, : \, X_t < 0\right\}$$

y

$$\tau_{0,k}^+ = \inf \left\{t > \tau_{0,k}^- \, : \, X_t > 0\right\}.$$

Definición 3.0.7 El tiempo de ruina parisino, τ_d, se define como sigue,

$$\tau_d := \tau_{0,k_d}^- + e_d^{k_d},$$

donde

$$k_d = \inf \left\{k \geq 1 : \, \tau_{0,k}^- + e_d^k < \tau_{0,k}^+\right\}.$$

Ver figura (3.1).

Los siguientes resultados que presentaremos es una generalización de los problemas de salida con dos barreras, esto es, cuando τ_0^-, el primer tiempo de pasada por debajo del nivel cero, es sustituido por el tiempo de ruina parisino τ_d.

Teorema 3.0.8 *Sea X_t un proceso de Lévy espectralmente negativo con trayectorias de variación acotada. Entonces, para cualquier $x \leq b$ y $q \geq 0$*

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^+}; \, \tau_b^+ < \tau_d\right] = \frac{H_d^{(q)}(x)}{H_d^{(q)}(b)},$$

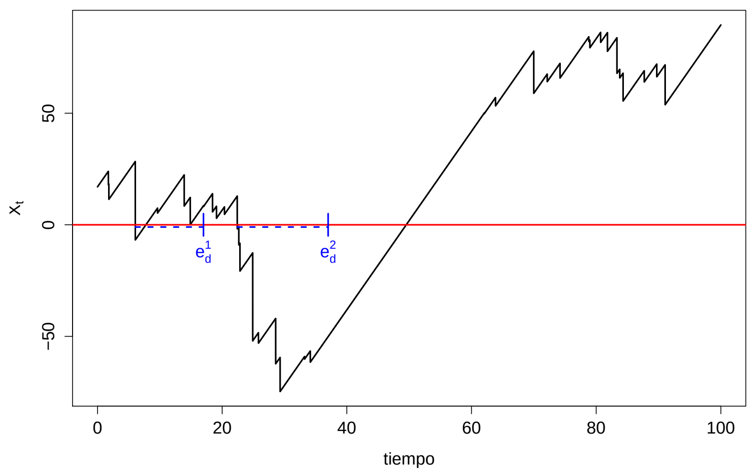


Figura 3.1: Ejemplo ilustrativo del tiempo de ruina tipo parisino. En este caso la ruina ocurra en $\tau_{0,2}^- + e_d^2$.

donde

$$H_d^{(q)}(x) = \begin{cases} \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\left[1 - \mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+};\, \tau_0^+ < e_d\right];\, \tau_0^- < \tau_x^+\right]\right], & \text{si } x \geq 0 \\ \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+};\, \tau_0^+ < e_d\right], & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $x \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+};\, \tau_b^+ < \tau_d\right] &= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_b^+)};\, \tau_b^+ < \tau_d\right] + \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+}\mathbb{1}_{(\tau_b^+ < \tau_0^-)}\right] \\ &= \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)} + \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_b^+)};\, \tau_b^+ < \tau_d\right]. \end{aligned}$$

Veamos que pasa con el segundo término de la expresión anterior, primero notemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_b^+ < \tau_d)} \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_0^+}\right] &= \mathbb{E}_x\left[e^{-q(\tau_b^+ - \tau_0^+) - q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_b^+ < \tau_d)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+ < e_d)} \,\middle|\, \mathcal{F}_{\tau_0^+}\right] \\ &= e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+ < e_d)}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_b^+)}\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_b^+}\mathbb{1}_{(\tau_b^+ < \tau_d)}\right] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_d)}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau_0^-}\right] =&\mathbb{E}_x\left[e^{-q(\tau_0^+-\tau_0^-)-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_d)}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau_0^-}\right]\\ =&e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_x\left[e^{-q(\tau_0^+-\tau_0^-)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+-\tau_0^-<e_d)}\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau_0^-}\right]\\ =&e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_d)}\right].\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)};\,\tau_b^+<\tau_d\right]\\ &=\mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_b^+<\tau_d)}\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau_0^+}\right]\right]\\ &=\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_d)}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\right]\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_b^+}\mathbb{1}_{(\tau_b^+<\tau_d)}\right]\\ &=\mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_d)}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\,\middle|\mathcal{F}_{\tau_0^-}\right]\right]\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_b^+}\mathbb{1}_{(\tau_b^+<\tau_d)}\right]\\ &=\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_d)}\right]\right]\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_b^+}\mathbb{1}_{(\tau_b^+<\tau_d)}\right].\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+};\,\tau_b^+<\tau_d\right] \\ &=\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}+\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_d)}\right];\tau_0^-<\tau_b^+\right]\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_b^+}\mathbb{1}_{(\tau_b^+<\tau_d)}\right]\end{aligned}\tag{3.0.2}$$

Tomando $x=0$ en la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_b^+};\,\tau_b^+<\tau_d\right]\\ &=\frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(b)}+\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_d)}\right];\tau_0^-<\tau_b^+\right]\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_b^+}\mathbb{1}_{(\tau_b^+<\tau_d)}\right].\end{aligned}$$

Esto implica

$$\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_b^+};\tau_b^+<\tau_d\right]\left[1-\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_d)}\right];\tau_0^-<\tau_b^+\right]\right]=\frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(b)}$$

es decir,

$$\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_b^+};\tau_b^+<\tau_d\right]=\frac{1}{H_d^{(q)}(b)},\tag{3.0.3}$$

sustituyendo esto en la ecuación (3.0.2), tenemos

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+};\, \tau_b^+ < \tau_d\right] \\ &\quad = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)} + \frac{\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+};\tau_0^+ < e_d\right];\tau_0^- < \tau_b^+\right]}{H_d^{(q)}(b)}.\end{aligned} \tag{3.0.4}$$

Ahora, observemos que, usando la propiedad de Markov fuerte, tenemos la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+ < \tau_d)}\right] &= \mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_b^+)}\mathbb{E}_0\left[e^{-q(\tau_0^+ - \tau_0^-)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+ - \tau_0^- < \tau_d - \tau_0^-)}\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau_0^-}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+};\, \tau_0^+ < e_d\right];\, \tau_0^- < \tau_b^+\right].\end{aligned} \tag{3.0.5}$$

Por otro lado, para $0 \leq x \leq b$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+ < \tau_d)}\right] \\ &\quad = \mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+ < \tau_d)}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_x^+)}\right] + \mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+ < \tau_d)}\mathbb{1}_{(\tau_0^- > \tau_x^+)}\right] \\ &\quad = \mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+ < \tau_d)}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_x^+)}\right] + \mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+ < \tau_d)}\mathbb{1}_{(\tau_0^- > \tau_x^+)}\right].\end{aligned} \tag{3.0.6}$$

Analicemos el primer termino de la expresión anterior condicionando con $\mathcal{F}_{\tau_0^-}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+ < \tau_d)}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_x^+)}\right] &= \mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_x^+)}\mathbb{E}_0\left[e^{-q(\tau_0^+ - \tau_0^-)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+ - \tau_0^- < \tau_d - \tau_0^-)}\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau_0^-}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^- < \tau_x^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+ < \tau_d)}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+};\, \tau_0^+ < e_d\right];\, \tau_0^- < \tau_x^+\right].\end{aligned}$$

En seguida, examinemos el segundo termino de la ecuación (3.0.6) condicionando sobre $\mathcal{F}_{\tau_x^+}$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<\tau_d)}\mathbb{1}_{(\tau_0^->\tau_x^+)}\right]\\
&\quad=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_x^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^->\tau_x^+)}\mathbb{E}_0\left[e^{-q(\tau_0^+-\tau_x^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+-\tau_x^+<\tau_d-\tau_x^+)}\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau_x^+}\right]\right]\\
&\quad=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_x^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^->\tau_x^+)}\right]\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<\tau_d)}\right]\\
&\quad=\frac{W^q(0)}{W^q(x)}\mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<\tau_d)}\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau_0^-}\right]\right]\\
&\quad=\frac{W^q(0)}{W^q(x)}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_x\left[e^{-q(\tau_0^+-\tau_0^-)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+-\tau_0^-<\tau_d-\tau_0^-)}\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau_0^-}\right]\right]\\
&\quad=\frac{W^q(0)}{W^q(x)}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<\tau_d)}\right]\right].
\end{aligned}
$$

Después de los cálculos anteriores, tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<\tau_d)}\right]&=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+};\,\tau_0^+<e_d\right];\,\tau_0^-<\tau_x^+\right]\\
&\quad+\frac{W^q(0)}{W^q(x)}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+};\tau_0^+<\tau_d\right];\tau_0^-<\tau_b^+\right].
\end{aligned}
$$

Comparando esta expresión con (3.0.5), obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+};\,\tau_0^+<e_d\right];\,\tau_0^-<\tau_b^+\right]\\
&\qquad=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+};\,\tau_0^+<e_d\right];\,\tau_0^-<\tau_x^+\right]\\
&\qquad+\frac{W^q(0)}{W^q(x)}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+};\tau_0^+<\tau_d\right];\tau_0^-<\tau_b^+\right].
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+};\tau_0^+<e_d\right];\tau_0^-<\tau_b^+\right]\\
&=\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+};\tau_0^+<e_d\right];\tau_0^-<\tau_b^+\right]\\
&-\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+};\tau_0^+<e_d\right];\tau_0^-<\tau_x^+\right]\\
&=\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\left[1-\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+};\tau_0^+<e_d\right];\tau_0^-<\tau_x^+\right]\right]\\
&-\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\left[1-\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+};\tau_0^+<e_d\right];\tau_0^-<\tau_b^+\right]\right]\\
&=H_d^{(q)}(x)-\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}H_d^{(q)}(b),
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+};\tau_0^+<e_d\right];\tau_0^-<\tau_b^+\right]=H_d^{(q)}(x)-\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}H_d^{(q)}(b). \tag{3.0.7}
$$

Regresando a la ecuación (3.0.4), tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+};\,\tau_b^+<\tau_d\right]=&\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}+\frac{1}{H_d^{(q)}(b)}\left(H_d^{(q)}(x)-\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}H_d^{(q)}(b)\right)\\
=&\frac{H_d^{(q)}(x)}{H_d^{(q)}(b)},
\end{aligned}
$$

lo cual prueba el caso $0\le x\le b$.

Para $x<0$, condicionamos sobre τ_0^+ y aplicamos la propiedad de Markov fuerte, tenemos

$$
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+};\,\tau_b^+<\tau_d\right]=\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+};\,\tau_0^+<e_d\right]\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_b^+};\,\tau_b^+<\tau_d\right],
$$

de esta manera, usando la ecuación (3.0.3),

$$
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+};\,\tau_b^+<\tau_d\right]=\frac{H_d^{(q)}(x)}{H_d^{(q)}(b)}.
$$

Lo cual completa la demostración. □

Observación 3.0.9 *Si* $e_d \equiv 0$*, en otras palabras, es la variable aleatoria con distribución degenerada en el cero, así el tiempo de ruina es precisamente* τ_0^-*, que corresponde al caso de ruina clásico. De la definición de* $H_d^{(x)}$*, tenemos que*

$$H_d^{(q)}(x) = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)},$$

para $x \geq 0$*, la cual implica*

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+};\, \tau_b^+ < \tau_d\right] = \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+};\, \tau_b^+ < \tau_0^-\right] = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)},$$

para $x \in [0, b]$*.*

Ahora, veamos el caso cuando el proceso alcanza la ruina antes de que alcanza un nivel $b > 0$ dado.

Teorema 3.0.10 *Para el proceso de Lévy espectralmente negativo con trayectorias de variación acotada y* $x \leq b$*,*

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d};\, \tau_d < \tau_b^+\right] = P_d^{(q)}(x) - \frac{H_d^{(q)}(x)}{H_d^{(q)}(b)} P_d^{(q)}(b), \tag{3.0.8}$$

donde

$$P_d^{(q)}(x) = \begin{cases} -\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\left[\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d};\, e_d < \tau_0^+\right];\, \tau_0^- < \tau_x^+\right]\right], & \text{si } x \geq 0 \\ \mathbb{E}_x\left[e^{-qe_d};\, e_d < \tau_0^+\right], & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $x \geq 0$, entonces

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right] = \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right] + \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_0^->\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right].$$

Notemos que el segundo término es cero, veamos que pasa con el primer termino.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right] =& \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_x\left[e^{-q(\tau_d-\tau_0^-)}\mathbb{1}_{(\tau_d-\tau_0^-<\tau_b^+-\tau_0^-)}\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau_0^-}\right]\right] \\ =& \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right]\right] \end{aligned} \tag{3.0.9}$$

Para la expresión, $\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right]$, hay dos casos, o pasa $\left\{e_d<\tau_0^+\right\}$ o pasa $\left\{e_d>\tau_0^+\right\}$, así,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right]=&\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]+\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(e_d>\tau_0^+)}\right]\\=&\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]+\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(e_d>\tau_0^+)}\right].\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(e_d>\tau_0^+)}\right]\\&\qquad=\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(e_d>\tau_0^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q(\tau_d-\tau_0^+)}\mathbb{1}_{(\tau_d-\tau_0^+<\tau_b^+-\tau_0^+)}\middle|\mathcal{F}_{\tau_0^+}\right]\right]\\&\qquad=\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(e_d>\tau_0^+)}\right]\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right].\end{aligned}$$

Juntando ambas identidades,vemos

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right]\\&\quad=\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]+\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(e_d>\tau_0^+)}\right]\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right],\end{aligned}\tag{3.0.10}$$

sustituyendo esto en la ecuación (3.0.9), obtenemos

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right]\\&=\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]\right]\\&+\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(e_d>\tau_0^+)}\right]\right]\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right].\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d};\tau_d<\tau_b^+\right]\\&=\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]\right]\\&+\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(e_d>\tau_0^+)}\right]\right]\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right].\end{aligned}\tag{3.0.11}$$

Tomando $x=0$, en la ecuación (3.0.11), tenemos

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d};\tau_d<\tau_b^+\right]\\&=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]\right]\\&+\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(e_d>\tau_0^+)}\right]\right]\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right],\end{aligned}\tag{3.0.12}$$

esto implica,

$$\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d};\tau_d<\tau_b^+\right]\left[1-\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(e_d>\tau_0^+)}\right]\right]\right]$$
$$=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]\right].$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d};\tau_d<\tau_b^+\right]\\&=\frac{\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]\right]}{1-\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(e_d>\tau_0^+)}\right]\right]}\\&=\frac{\frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)}(0)}\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]\right]}{\frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)}(0)}1-\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(e_d>\tau_0^+)}\right]\right]}\\&=-\frac{P_d^{(q)}(b)}{H_d^{(q)}(b)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d};\tau_d<\tau_b^+\right]=-\frac{P_d^{(q)}(b)}{H_d^{(q)}(b)},\tag{3.0.13}$$

sustituyendo (3.0.13) en la ecuación (3.0.11), tenemos

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d};\tau_d<\tau_b^+\right]\\&=\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]\right]\\&-\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(e_d>\tau_0^+)}\right]\right]\frac{P_d^{(q)}(b)}{H_d^{(q)}(b)}.\end{aligned}\tag{3.0.14}$$

A continuación, mostraremos que

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]\right]=P_d^{(q)}(x)-\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}P_d^{(q)}(b).$$

Usando las mismas ideas que en el desarrollo de (3.0.6), tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_0^+)}\right]&=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_0\left[e^{-q(\tau_d-\tau_0^-)}\mathbb{1}_{(\tau_d-\tau_0^-<\tau_0^+-\tau_0^-)}\middle|\mathcal{F}_{\tau_0^-}\right]\right]\\&=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]\right],\end{aligned}\tag{3.0.15}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_0^+)}\right]\\
&=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_0^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_x^+)}\right]+\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_0^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^->\tau_x^+)}\right]\\
&=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_0^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_x^+)}\right]+\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_0^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^->\tau_x^+)}\right],
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_0^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_x^+)}\right]&=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_x^+)}\mathbb{E}_0\left[e^{-q(\tau_d-\tau_0^-)}\mathbb{1}_{(\tau_d-\tau_0^-<\tau_0^+-\tau_0^-)}\big|\mathcal{F}_{\tau_0^-}\right]\right]\\
&=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_x^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_0^+)}\right]\right]. \qquad (3.0.16)
\end{aligned}$$

De la propiedad de Markov, vemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_0^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^->\tau_x^+)}\right]\\
&=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_x^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^->\tau_x^+)}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_0^+)}\right]\right]\\
&=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_x^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^->\tau_x^+)}\right]\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_0^+)}\right]\\
&=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_x^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^->\tau_x^+)}\right]\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]\right]\\
&=\frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(x)}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]\right]
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad, usamos un cálculo similar al de (3.0.16) para probar la igualdad y en la ultima se usa la expresión de la fórmula de salida con dos barreras.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_0^+)}\right]=&\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_x^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_0^+)}\right]\right]\\
&+\frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(x)}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]\right].
\end{aligned}$$

Comparando esta expresión con (3.0.15), tenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]\right]\\
&\qquad=\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_x^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_0^+)}\right]\right]\\
&\qquad+\frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(x)}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]\right],
\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}; e_d < \tau_0^+\right]; \tau_0^- < \tau_b^+\right] \\
&\quad = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-qe_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]\right] \\
&\quad - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_x^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_0^+)}\right]\right] \\
&\quad = P_d^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}P_d^{(q)}(b).
\end{aligned}
$$

Sustituyendo la expresión anterior en (3.0.14), obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}; \tau_d < \tau_b^+\right] =& P_d^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}P_d^{(q)}(b) \\
&- \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{(\tau_0^-<\tau_b^+)}\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}}\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(e_d>\tau_0^+)}\right]\right]\frac{P_d^{(q)}(b)}{H_d^{(q)}(b)}.
\end{aligned}
$$

Luego, usando (3.0.7),

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}; \tau_d < \tau_b^+\right] =& P_d^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}P_d^{(q)}(b) \\
&- \left(H_d^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}H_d^{(q)}(b)\right)\frac{P_d^{(q)}(b)}{H_d^{(q)}(b)} \\
=& P_d^{(q)}(x) - \frac{H_d^{(q)}(x)}{H_d^{(q)}(b)}P_d^{(q)}(b).
\end{aligned}
$$

Concluimos, que para toda $0 \le x \le b$,

$$
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}; \tau_d < \tau_b^+\right] = P_d^{(q)}(x) - \frac{H_d^{(q)}(x)}{H_d^{(q)}(b)}P_d^{(q)}(b).
$$

Ahora, supongamos que $x < 0$, así

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}; \tau_d < \tau_b^+\right] \\
&\quad = \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right] + \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_d)}\right] \\
&\quad = \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right] + \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_d)}\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau_0^+}\right]\right],
\end{aligned}
$$

pero

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_d)}\,\middle|\mathcal{F}_{\tau_0^+}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_d)}\mathbb{E}_x\left[e^{-q(\tau_d-\tau_0^+)}\mathbb{1}_{(\tau_d-\tau_0^+<\tau_b^+-\tau_0^+)}\,\middle|\mathcal{F}_{\tau_0^+}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_d)}\right]\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right].
\end{aligned}$$

Entonces, usando la definición de $P_d^{(q)}(x)$ y $H_d^{(q)}(x)$ para $x<0$, así como la ecuación (3.0.13), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d};\tau_d<\tau_b^+\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(e_d<\tau_0^+)}\right]+\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_d)}\right]\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}\mathbb{1}_{(\tau_d<\tau_b^+)}\right], \\
&= P_d^{(q)}(x)-\frac{H_d^{(q)}(x)}{H_d^{(q)}(b)}P_d^{(q)}(b).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $x<0$,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d};\tau_d<\tau_b^+\right]=P_d^{(q)}(x)-\frac{H_d^{(q)}(x)}{H_d^{(q)}(b)}P_d^{(q)}(b).$$

Esto concluye la demostración.

$\square$

Observación 3.0.11 *Análogamente, como en la observación anterior, si suponemos que la variable aleatoria e_d tiene distribución degenerada en cero, entonces para toda $x>0$, tenemos*

$$\begin{aligned}
P_d^{(q)} &= -\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^+};\,\tau_0^-<\tau_x^+\right] \\
&= -\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\left(1-\frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(x)}Z^{(q)}(b)\right) \\
&= Z^{(q)}(b)-\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)},
\end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_d};\, \tau_d < \tau_b^+\right] &= P_d^{(q)}(x) - \frac{H_d^{(q)}(x)}{H_d^{(q)}(b)} P_d^{(q)}(b) \\
&= Z^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)} - \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+};\, \tau_b^+ < \tau_d\right]\left(Z^{(q)}(b) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\right) \\
&= Z^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)} - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}\left(Z^{(q)}(b) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\right) \quad \textit{pues} \;\; \tau_d = \tau_0^- \\
&= Z^{(q)}(x) - Z^{(q)}(b)\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}, \qquad (3.0.17)
\end{aligned}$$

que es precisamente la expresión al considerar τ_0^-.

Capítulo 4

Aplicaciones.

A continuación veamos dos ejemplos, primero cuando las variables aleatorias de demora e_d^k, son exponenciales y posteriormente cuando son Erlang mixto.

4.1. Caso Exponencial.

Supongamos que e_d es una variable aleatoria con ley exponencial de parámetro β. Entonces, usando (2.2.2), tenemos que para $x < 0$

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+};\, \tau_0^+ < e_d\right] = e^{\Phi(q+\beta)x}. \tag{4.1.1}$$

Recordemos que $\mathcal{T}_r$ está definido de la siguiente manera

$$\mathcal{T}_r f(x) = \int_0^\infty e^{-ry} f(y+x)dy.$$

Caracterizaremos a $H_d^{(q)}(x)$ y $P_d^{(q)}(x)$. Por el Teorema 3.0.8 y (4.1.1), tenemos que

$$H_d^{(q)}(x) = \begin{cases} \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\left[1 - \mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-} e^{\Phi(q+\beta)X_{\tau_0^-}};\, \tau_0^- < \tau_x^+\right]\right], & \text{si } x \geq 0 \\ e^{\Phi(q+\beta)x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por otro lado, en el capitulo (2) en la ecuación (2.4.14), vimos que

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^+}};\, \tau_0^- < \tau_b^+\right] = (\psi(r) - q)\left(\mathcal{T}_r W^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}\mathcal{T}_r W^{(q)}(b)\right).$$

De aquí, por definición de $\mathcal{T}$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}e^{\Phi(q+\beta)X_{\tau_0^-}};\,\tau_0^-<\tau_x^+\right] =&(q+\beta-q)\left(\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(0)-\frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(x)}\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\right)\\
=&\beta\left(\frac{1}{\beta}-\frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(x)}\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\right)\\
=&1-\beta\frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(x)}\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x).
\end{aligned}
\tag{4.1.2}
$$

En la segunda igualdad de la expresión anterior, se debe a que

$$
\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(0)=\int_0^\infty e^{-\Phi(q+\beta)y}W^{(q)}(y)dy=\frac{1}{\psi(\Phi(q+\beta))-q}=\frac{1}{\beta}.
$$

De esta forma,

$$
\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}e^{\Phi(q+\beta)X_{\tau_0^-}};\,\tau_0^-<\tau_x^+\right]=1-\beta\frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(x)}\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x).
$$

Por lo tanto,

$$
H_d^{(q)}(x)=\begin{cases}\beta\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x), & \text{si } x\geq 0\\ e^{\Phi(q+\beta)x}, & \text{si } x<0.\end{cases}
\tag{4.1.3}
$$

Ahora, analicemos el caso para $P_d^{(q)}$. Condicionando sobre $\mathcal{F}_{\tau_0^+}$, vemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-qe_d};\tau_0^+<e_d\right] &= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}\mathbb{E}_0\left[e^{-qe_d}\right];\tau_0^+<e_d\right]\\
&= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+};\tau_0^+<e_d\right]\mathbb{E}_0\left[e^{-qe_d}\right],
\end{aligned}
$$

de esta manera,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-qe_d};e_d<\tau_0^+\right] =&\mathbb{E}_x\left[e^{-qe_d}\right]-\mathbb{E}_x\left[e^{-qe_d};\tau_0^+<e_d\right]\\
=&\frac{\beta}{\beta+q}-\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+};\tau_0^+<e_d\right]\mathbb{E}_0\left[e^{-qe_d}\right]\\
=&\frac{\beta}{\beta+q}-e^{\Phi(q+\beta)x}\frac{\beta}{\beta+q}\\
=&\frac{\beta}{\beta+q}\left(1-e^{\Phi(q+\beta)x}\right).
\end{aligned}
$$

En consecuencia, sustituyendo esta expresión en la definición de $P_d^{(q)}(x)$, tenemos

$$P_d^{(q)}(x) = \begin{cases} -\frac{\beta}{\beta+q}\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\left(1-e^{\Phi(q+\beta)X_{\tau_0^-}}\right);\, \tau_0^- < \tau_x^+\right], & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\beta}{\beta+q}\left(1-e^{\Phi(q+\beta)x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Pero, de (3.0.17) y (4.1.2)

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-}\left(1-e^{\Phi(q+\beta)X_{\tau_0^-}}\right);\, \tau_0^- < \tau_x^+\right] \\ &= \mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-};\, \tau_0^- < \tau_x^+\right] - \mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^- + \Phi(q+\beta)X_{\tau_0^-}};\, \tau_0^- < \tau_x^+\right] \\ &= Z^q(0) - \frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(x)}Z^{(q)}(x) - \left(1-\beta\frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(x)}\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\right) \\ &= -\frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(x)}\left(Z^{(q)}(x) - \beta\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P_d^{(q)}(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\beta+q}\left(Z^{(q)}(x) - \beta\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\right), & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\beta}{\beta+q}\left(1-e^{\Phi(q+\beta)x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Como $Z^{(q)}(x) = 1$ para toda $x < 0$, entonces para toda $x \in \mathbb{R}$,

$$P_d^{(q)}(x) = \frac{\beta}{\beta+q}\left(Z^{(q)}(x) - H_d^{(q)}(x)\right). \tag{4.1.4}$$

Con esto, hemos caracterizado a $P_d^{(q)}$ y $H_d^{(q)}$ cuando la variable aleatoria de demora tiene ley exponencial de parámetro β.

4.2. Caso Erlang Mixto.

Otro ejemplo que consideraremos, es cuando la variable aleatoria e_d tiene ley Erlang mixto, es decir tiene por ley

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i f_i(x),$$

donde, para cada i, c_i es no negativo tal que $\sum_i c_i = 1$ y $f_i(x)$ es la ley de una variable aleatoria Gamma con parámetros (i, β), explícitamente,

$$f_i(x) = \beta e^{-\beta x} \frac{(\beta x)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

De esta manera, su transformada de Laplace, que denotaremos por $\tilde{f}(s)$, es

$$\tilde{f}(s) = C\left(\frac{\beta}{\beta + s}\right), \tag{4.2.1}$$

con

$$C(z) = \sum_{n=1}^{r} c_n z^n.$$

Recordemos la fórmula de Bruno, que es una generalización de la regla de la cadena para derivadas de orden superior. Para dos funciones f y g diferenciables, se tiene que

$$\frac{d^n}{d\theta^n} f(g(\theta)) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(g(\theta)) B_{i,n}\left(g^{(1)}(\theta), g^{(2)}(\theta), \cdots, g^{(n-i+1)}(\theta)\right),$$

donde

$$B_{i,n}(x_1, \cdots, x_{n-i+1}) = \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_{n-i+1}!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{x_2}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{x_{n-i+1}}{(n-i+1)!}\right)^{k_{n-i+1}},$$

con la suma extendida sobre toda sucesión $k_1, \cdots k_{n-i+1}$ de enteros no negativos tal que $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-i+1} = i$ y $k_1 + 2k_2 + \cdots + (n-i+1)k_{n-i+1} = n$ y definimos $B_{0,0} = 1$ para toda x_1.
También, en el Capitulo 2, mencionamos la propiedad del operador de Dickson-Hipp,

$$\frac{d^l}{d\xi^l} \mathcal{T}_\xi W^{(q)}(x) = (-1)^l (l)! \mathcal{T}_\xi^{l+1} W^{(q)}(x), \quad l = 0, 1, \cdots \tag{4.2.2}$$

Antes de clasificar las expresiones $H_d^{(q)}$ y $P_d^{(q)}$, veamos el siguiente corolario. Denotaremos por $\overline{C}_n$ la suma $\sum_{j=n+a}^{r} c_j$.

Corolario 4.2.1 *Si e_d es una variable aleatoria con ley Erlang mixta y transformada de Laplace (4.2.1), entonces*

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}; \tau_0^+ < e_d\right] = \sum_{i=0}^{r-1} \zeta_i \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x}\right), \quad x < 0, \tag{4.2.3}$$

y

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-qe_d}; e_d < \tau_0^+\right] = C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right) - \sum_{i=0}^{r-1}\chi_i\left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x}\right), \quad x<0, \tag{4.2.4}$$

donde $\zeta_i = \sum_{n=i}^{r-1}\overline{C}_n\nu_{i,n}$, $\chi_i = \sum_{j=i}^{r-1}\nu_{i,n}\sum_{n=j+1}^{r}c_n\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)^{n-j}$ *y*

$$\nu_{i,n} = \frac{\beta^n}{n!}(-1)^n B_{i,n}\left(\Phi^{(1)}(q+\beta),\cdots,\Phi^{(n-i+1)}(q+\beta)\right).$$

Demostración. Por la propiedad de independencia, tenemos

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}; \tau_0^+ < e_d\right] \;=\; \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}g(\tau_0^+)\right],$$

donde

$$g(y) = \mathbb{P}(e_d > y) = \overline{F}(y) = \sum_{0}^{r-1}\overline{C}_n\frac{(\beta y)^n}{n!}e^{-\beta y}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}; \tau_0^+ < e_d\right]\\
&=\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}\left(\sum_{n=0}^{r-1}\overline{C}_n\frac{(\beta\tau_0^+)^n}{n!}e^{-\beta\tau_0^+}\right)\right]\\
&=\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}\left(\sum_{n=0}^{r-1}\overline{C}_n\frac{(\beta\tau_0^+)^n}{n!}e^{-\beta\tau_0^+}\right); \tau_0^+ < \infty\right]\\
&=\sum_{n=0}^{r-1}\overline{C}_n\frac{\beta^n}{n!}\mathbb{E}_x\left[(\tau_0^+)^n e^{-(q+\beta)\tau_0^+}; \tau_0^+ < \infty\right]\\
&=\sum_{n=0}^{r-1}\overline{C}_n\frac{\beta^n}{n!}(-1)^n\mathbb{E}_x\left[\frac{d^n}{d\alpha^n}e^{-\alpha\tau_0^+}; \tau_0^+ < \infty\right]\Bigg|_{\alpha=q+\beta}\\
&=\sum_{n=0}^{r-1}\overline{C}_n\frac{\beta^n}{n!}(-1)^n\frac{d^n}{d\alpha^n}\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha\tau_0^+}; \tau_0^+ < \infty\right]\Bigg|_{\alpha=q+\beta},
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

donde en la última igualdad es por el teorema de convergencia dominada. Pero, sabemos que si $x<0$, $E_x\left[e^{-q\tau_0^+}; \tau_0^+ < \infty\right] = e^{x\Phi(q)}$. Además, usando la fórmula de

Bruno, con $f(x) = e^x$ y $g(\alpha) = \Phi(\alpha)x$,

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{d\alpha^n}(e^{\Phi(\alpha)x}) &= \sum_{i=0}^{n} e^{\Phi(\alpha)x} B_{i,n}\left((\Phi(\alpha)x)^1, \ldots, (\Phi(\alpha)x)^{n-i+1}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} e^{\Phi(\alpha)x} x^i B_{i,n}\left((\Phi^{(1)}(\alpha), \ldots, \Phi^{(n-i+1)}(\alpha)\right).\end{aligned}$$

Así retomando (4.2.5) para $x < 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}; \tau_0^+ < e_d\right] =& \sum_{n=0}^{r-1} \overline{C}_n \frac{\beta^n}{n!}(-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n}\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha\tau_0^+}; \tau_0^+ < \infty\right]\Big|_{\alpha=q+\beta} \\ =& \sum_{n=0}^{r-1} \overline{C}_n \frac{\beta^n}{n!}(-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(e^{\Phi(\alpha)x}\right)\Big|_{\alpha=q+\beta} \\ =& \sum_{n=0}^{r-1} \overline{C}_n \frac{\beta^n}{n!}(-1)^n \sum_{i=0}^{n} e^{\Phi(a+\beta)x} x^i B_{i,n}\left((\Phi^{(1)}(q+\beta), \ldots, \Phi^{(n-i+1)}(q+\beta)\right) \\ =& e^{\Phi(a+\beta)x} \sum_{n=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{n} \overline{C}_n \frac{\beta^n}{n!}(-1)^n x^i B_{i,n}\left((\Phi^{(1)}(q+\beta), \ldots, \Phi^{(n-i+1)}(q+\beta)\right) \\ =& e^{\Phi(a+\beta)x} \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{n=i}^{r-1} \overline{C}_n \frac{\beta^n}{n!}(-1)^n x^i B_{i,n}\left((\Phi^{(1)}(q+\beta), \ldots, \Phi^{(n-i+1)}(q+\beta)\right) \\ =& e^{\Phi(a+\beta)x} \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{n=i}^{r-1} x^i \overline{C}_n \nu_{i,n} \\ =& \sum_{i=0}^{r-1} \xi_i \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x}\right).\end{aligned}$$

Ahora, demostraremos la otra expresión, es decir,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-qe_d}; e_d < \tau_0^+\right] = C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right) - \sum_{i=0}^{r-1} \chi_i(x^i e^{\Phi(q+\beta)x}),$$

para $x < 0$. (Aquí $C(k) = \sum_{i=1}^{r} c_n z^n$, con $\sum_{i=1}^{r} c_n = 1$)

Recordemos que la ley de una variable aleatoria Erlang mixto es:

$$f(x) = c_1 f_1(x) + \ldots + c_r f_r(x),$$

donde

$$f_i(x) = \beta e^{-\beta x} \frac{(\beta x)^{i-1}}{(i-1)!},$$

es decir, $f_i(x)$ es la ley de una variable aleatoria Gamma(i,β). Si $\{e_i\}_{i\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes $\exp(\beta)$ y definamos

$$e_{i,\beta} = \sum_{j=1}^{i} e_j,$$

así, $e_{i,\beta}$ es una variable aleatoria con ley $f_i(x)$. Entonces, como $e_d \stackrel{L}{=} \sum_{i=1}^{r} e_{i,\beta}$ tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[e^{-qe_d}; e_d < \tau_0^+\right] \\
&\quad = \sum_{n=1}^{r} c_n \mathbb{E}_x\left[e^{-qe_{n,\beta}}; e_{n,\beta} < \tau_0^+\right] \\
&\quad = \sum_{n=1}^{r} c_n \left[\mathbb{E}_x\left[e^{-qe_{n,\beta}}\right] - \mathbb{E}_x\left[e^{-qe_{n,\beta}}; e_{n,\beta} > \tau_0^+\right]\right] \\
&\quad = \sum_{n=1}^{r} c_n \left[\mathbb{E}_x\left[e^{-qe_{n,\beta}}\right] - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}_x\left[e^{-qe_{n,\beta}}; e_{j,\beta} < \tau_0^+ < e_{j+1,\beta}\right]\right]. \qquad (4.2.6)
\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que $\mathbb{1}_{(\tau_0^+ < e_{n,\beta})} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{(e_{j,\beta} < \tau_0^+ < e_{j+1,\beta})}$ con $e_{0,\beta} \equiv 0$. Por otro lado, para $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[e^{-qe_{n,\beta}}; e_{j,\beta} < \tau_0^+ < e_{j+1,\beta}\right] \\
&\quad = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[e^{-qe_{n,\beta}}; e_{j,\beta} < \tau_0^+ < e_{j+1,\beta} \middle| \mathcal{F}_{\tau_0^+}\right]\right] \\
&\quad = \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+} \mathbb{E}_x\left[e^{-q(e_{n,\beta} - \tau_0^+)} \middle| \mathcal{F}_{\tau_0^+}\right]; e_{j,\beta} < \tau_0^+ < e_{j+1,\beta}\right] \\
&\quad = \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+} \mathbb{E}_x\left[e^{-qe_{n-j,\beta}}\right]; e_{j,\beta} < \tau_0^+ < e_{j+1,\beta}\right] \qquad (4.2.7) \\
&\quad = \mathbb{E}_x\left[e^{-qe_{n-j,\beta}}\right] \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}; e_{j,\beta} < \tau_0^+ < e_{j+1,\beta}\right] \\
&\quad = \left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)^{n-j} \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}; e_{j,\beta} < \tau_0^+ < e_{j+1,\beta}\right]. \qquad (4.2.8)
\end{aligned}$$

Donde (4.2.7) se debe a la pérdida de la memoria $e_{j+1,\beta} - \tau_0^+ \sim \exp(\beta)$, así $e_{n,\beta} - \tau_0^+ \sim e_{n-j,\beta}$, bajo el evento $e_{j,\beta} < \tau_0^+ < e_{j+1,\beta}$.

Regresando a (4.2.6) y usando (4.2.8), tenemos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[e^{-qe_d}; e_d < \tau_0^+\right] \\
&\quad = \sum_{n=1}^{r} c_n \left[\mathbb{E}_x\left[e^{-qe_{n,\beta}}\right] - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}_x\left[e^{-qe_{n,\beta}}; e_{j,\beta} < \tau_0^+ < e_{j+1,\beta}\right]\right] \\
&\quad = \sum_{n=1}^{r} c_n \left[\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)^n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)^{n-j} \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}; e_{j,\beta} < \tau_0^+ < e_{j+1,\beta}\right]\right] \\
&\quad = C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right) - \sum_{n=1}^{r} c_n \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)^{n-j} \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}; e_{j,\beta} < \tau_0^+ < e_{j+1,\beta}\right]. \quad (4.2.9)
\end{aligned}$$

Observemos que $\mathbb{1}_{(e_{j,\beta}<\tau_0^+<e_{j+1,\beta})} = \mathbb{1}_{(\tau_0^+<e_{j+1,\beta})} - \mathbb{1}_{(e_{j,\beta}>\tau_0^+)}$, así

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}; e_{j,\beta} < \tau_0^+ < e_{j+1,\beta}\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}; \tau_0^+ < e_{j+1,\beta}\right] - \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}; e_{j,\beta} > \tau_0^+\right]. \qquad (4.2.10)
\end{aligned}$$

Ahora, veamos quien es $\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^+}; \tau_0^+ < e_{k,\beta}\right]$ donde $e_{k,\beta}$ ~Gamma(α, β), $1 \leq k \leq r$. Notemos que $e_{k,\beta}$ es una Erlang que tiene por ley

$$g(x) = c_1 f_1(x) + \ldots + c_r f_r(x),$$

donde f_i ~Gamma(i, β), con $c_i = 0$ si $i \neq k$ y $c_k = 1$. Entonces,

$$\overline{G}(x) = \sum_{n=0}^{r-1} \overline{C}_n \frac{(\beta x)^n}{n!} e^{-\beta x}, \qquad x > 0,$$

donde por definición $\overline{C}_n = \sum_{j=n+1}^{r} c_j$, la cual en este caso resulta ser

$$\overline{C}_n = \begin{cases} 0 & n = k, k+1, \ldots, r; \\ 1 & n = 0, 1, \ldots, k-1. \end{cases} \qquad (4.2.11)$$

Así, por el resultado anterior

$$\mathbb{E}_x\left[e^{q\tau_0^+}; \tau_0^+ < e_{k,\beta}\right] = \sum_{i=0}^{r-1} \xi_i \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x}\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x}\right),$$

ya que para $i \geq k$, $\overline{C}_n = 0$. Denotaremos a $\xi_i^k = \sum_{n=i}^{r-1} \overline{C}_n \nu_{i,n} = \sum_{n=i}^{k-1} \nu_{i,n}$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x & \left[e^{q\tau_0^+}; \tau_0^+ < e_{j+1,\beta} \right] - \mathbb{E}_x \left[e^{q\tau_0^+}; \tau_0^+ < e_{j,\beta} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} \xi_i^{j+1} \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x} \right) - \sum_{i=0}^{r-1} \xi_i^{j} \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x} \right) \left(\xi_i^{j+1} - \xi_i^{j} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{j} \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x} \right) \left(\xi_i^{j+1} - \xi_i^{j} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{j} \nu_{i,j} \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x} \right).
\end{aligned}
$$

Sustituyendo esto en la expresión (4.2.10) tenemos que

$$
\mathbb{E}_x \left[e^{q\tau_0^+}; e_{j,\beta} < \tau_0^+ < e_{j+1,\beta} \right] = \sum_{i=0}^{j} \nu_{i,j} \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x} \right).
$$

De esta manera, usando (4.2.9),

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x & \left[e^{-qe_d}; e_d < \tau_0^+ \right] \\
&= C\left(\frac{\beta}{\beta+q} \right) - \sum_{n=1}^{r} c_n \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\beta}{\beta+q} \right)^{n-j} \mathbb{E}_x \left[e^{q\tau_0^+}; e_{j,\beta} < \tau_0^+ < e_{j+1,\beta} \right] \\
&= C\left(\frac{\beta}{\beta+q} \right) - \sum_{n=1}^{r} c_n \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\beta}{\beta+q} \right)^{n-j} \sum_{i=0}^{j} \nu_{i,j} \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x} \right) \\
&= C\left(\frac{\beta}{\beta+q} \right) - \sum_{n=1}^{r} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} c_n \nu_{i,j} \left(\frac{\beta}{\beta+q} \right)^{n-j} \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x} \right) \\
&= C\left(\frac{\beta}{\beta+q} \right) - \sum_{i=0}^{r} \sum_{n=i+1}^{r} \sum_{j=i}^{n-1} c_n \nu_{i,j} \left(\frac{\beta}{\beta+q} \right)^{n-j} \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right) - \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=i}^{r-1}\sum_{n=j+1}^{r} c_n \nu_{i,j}\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)^{n-j}\left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x}\right)\\
&= C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right) - \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=i}^{r-1}\nu_{i,j}\sum_{n=j+1}^{r} c_n\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)^{n-j}\left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x}\right)\\
&= C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right) - \sum_{i=0}^{r}\chi_i\left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x}\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\mathbb{E}_x\left[e^{-qe_d}; e_d < \tau_0^+\right] = C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right) - \sum_{i=0}^{r}\chi_i\left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x}\right),
$$

lo que queríamos probar.

□

Con esto, tenemos las herramientas necesarias para completar el objetivo. Sea

$$
b_{r,l,i} = q\mathbb{1}_{(l=i)} - \binom{i}{l}\psi^{(i-l)}(r), \quad \text{con} \quad i \geq l.
$$

Proposición 4.2.2 *Si e_d tiene transformada de Laplace (4.2.1), entonces*

1.

$$
H_d^{(q)}(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{r-1}\vartheta_l\left(\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\right), & \text{si } x \geq 0\\ \sum_{l=0}^{r-1}\zeta_i\left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{4.2.12}
$$

donde

$$
\vartheta_l = (-1)^{l+1}(l)!\sum_{i=l}^{r-1}\zeta_i\, b_{\Phi(q+\beta),l,i}.
$$

2.

$$
P_d^{(q)}(x) = \begin{cases} \frac{\chi_0 - C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)}{W^{(q)}(0)}W^{(q)}(x) + C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)Z^{(q)}(x) + \displaystyle\sum_{l=0}^{r-1}\zeta_l\left(\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\right), & x \geq 0\\ C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right) - \displaystyle\sum_{i=0}^{r-1}\chi_i\left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x}\right), & x < 0. \end{cases} \tag{4.2.13}
$$

donde

$$\zeta_l = (-1)^l (l)! \sum_{i=l}^{r-1} \chi_i \, b_{\Phi(q+\beta),l,i}.$$

Demostración. Para $x < 0$, recordemos que

$$H_d^{(q)}(x) = \mathbb{E}_x \left[e^{q\tau_0^+}; \tau_0^+ < e_d \right]$$

y

$$P_d^{(q)}(x) = \mathbb{E}_x \left[e^{q e_d}; e_d < \tau_0^+ \right],$$

así, por el corolario anterior,

$$H_d^{(q)}(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \zeta_i \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x} \right)$$

y

$$P_d^{(q)}(x) = C\left(\frac{\beta}{\beta+q} \right) - \sum_{i=0}^{r-1} \chi_i \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x} \right).$$

Entonces se tiene el resultado para $x < 0$. Veamos el caso $x \geq 0$. Usando nuevamente el corolario anterior, tenemos

$$\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}} \left[e^{q\tau_0^+}; \tau_0^+ < e_d \right] = \sum_{i=0}^{r-1} \zeta_i \left(\left(X_{\tau_0^-} \right)^i e^{\Phi(q+\beta) X_{\tau_0^-}} \right),$$

así como,

$$\mathbb{E}_{X_{\tau_0^-}} \left[e^{q e_d}; e_d < \tau_0^+ \right] = C\left(\frac{\beta}{\beta+q} \right) - \sum_{i=0}^{r-1} \chi_i \left(\left(X_{\tau_0^-} \right)^i e^{\Phi(q+\beta) X_{\tau_0^-}} \right),$$

de esta manera, reescribiendo $H_d^{(q)}(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} H_d^{(q)}(x) &= \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)} \left[1 - \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_0^-} \sum_{i=0}^{r-1} \zeta_i \left(X_{\tau_0^-} \right)^i e^{\Phi(q+\beta) X_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \tau_x^+ \right] \right] \\ &= \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)} \left[1 - \sum_{i=0}^{r-1} \zeta_i \mathbb{E}_0 \left[\left(X_{\tau_0^-} \right)^i e^{-q\tau_0^- + \Phi(q+\beta) X_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \tau_x^+ \right] \right], \end{aligned}$$

esto es

$$H_d^{(q)}(x) = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)} \left[1 - \sum_{i=0}^{r-1} \zeta_i \mathbb{E}_0 \left[\left(X_{\tau_0^-} \right)^i e^{-q\tau_0^- + \Phi(q+\beta) X_{\tau_0^-}} ; \tau_0^- < \tau_x^+ \right]\right], \tag{4.2.14}$$

de igual manera,

$$\begin{aligned} P_d^{(q)}(x) = & \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)} \sum_{i=0}^{r-1} \chi_i \mathbb{E}_0 \left[\left(X_{\tau_0^-} \right)^i e^{-q\tau_0^- + \Phi(q+\beta) X_{\tau_0^-}} ; \tau_0^- < \tau_x^+ \right] \\ & - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)} C \left(\frac{\beta}{\beta+q} \right) \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_0^-} ; \tau_0^- < \tau_x^+ \right]. \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Notemos que en las expresiones anteriores, aparece la esperanza

$$\mathbb{E}_0 \left[\left(X_{\tau_0^-} \right)^i e^{-q\tau_0^- + \Phi(q+\beta) X_{\tau_0^-}} ; \tau_0^- < \tau_x^+ \right].$$

Si $i = 0$, de la ecuación (2.4.14), sabemos que

$$\mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}} ; \tau_0^- < \tau_x^+ \right] = 1 - W^{(q)}(0) \left(\psi(r) - q\right) \frac{\mathcal{T}_r W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)},$$

si $i \geq 1$, usando (4.2.2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left[\left(X_{\tau_0^-} \right)^i e^{-q\tau_0^- + rX_{\tau_0^-}} ; \tau_0^- < \tau_x^+ \right] = & \frac{d^i}{d\xi^i} \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_0^- + \xi X_{\tau_0^-}} ; \tau_0^- < \tau_x^+ \right] \Bigg|_{\xi = r} \\ = & W^{(q)}(0) \frac{d^i}{d\xi^i} \left(\left(q - \psi(r)\right) \frac{\mathcal{T}_r W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)} \right) \Bigg|_{\xi=r} \\ = & W^{(q)}(0) \sum_{l=0}^{i} b_{r,l,i} \frac{(-1)^l (l)! \mathcal{T}_r^{l+1} W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)}. \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (4.2.14), tenemos

$$\begin{aligned} H_d^{(q)}(x) = & \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)} \left[1 - \sum_{i=0}^{r-1} \zeta_i \mathbb{E}_0 \left[\left(X_{\tau_0^-} \right)^i e^{-q\tau_0^- + \Phi(q+\beta) X_{\tau_0^-}} ; \tau_0^- < \tau_x^+ \right]\right] \\ = & \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)} \left[1 - \zeta_0 \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_0^- + \Phi(q+\beta) X_{\tau_0^-}} ; \tau_0^- < \tau_x^+ \right]\right] \\ & - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)} \left[\sum_{i=1}^{r-1} \zeta_i \mathbb{E}_0 \left[\left(X_{\tau_0^-} \right)^i e^{-q\tau_0^- + \Phi(q+\beta) X_{\tau_0^-}} ; \tau_0^- < \tau_x^+ \right]\right], \end{aligned}$$

pero, usando que $\xi_0 = 1$

$$\begin{aligned}
&\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\left[1-\zeta_0\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_0^-+\Phi(q+\beta)X_{\tau_0^-}};\tau_0^-<\tau_x^+\right]\right]\\
&\qquad=\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\left(1-\xi_0\left(1-\beta W^{(q)}(0)\frac{\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)}\right)\right)\\
&\qquad=\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\left(1-\xi_0-\xi_0\beta W^{(q)}(0)\frac{\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)}\right)\\
&\qquad=\beta\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&-\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\left[\sum_{i=1}^{r-1}\zeta_i\mathbb{E}_0\left[\left(X_{\tau_0^-}\right)^i e^{-q\tau_0^-+\Phi(q+\beta)X_{\tau_0^-}};\tau_0^-<\tau_x^+\right]\right]\\
&\qquad=-\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\sum_{i=1}^{r-1}\zeta_i\left(\frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(x)}\sum_{l=0}^{i}b_{\Phi(q+\beta),l,i}(-1)^l(l)!\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\right)\\
&\qquad=-\sum_{i=1}^{r-1}\zeta_i\left(\sum_{l=0}^{i}b_{\Phi(q+\beta),l,i}(-1)^l(l)!\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\right)\\
&\qquad=\sum_{i=1}^{r-1}\zeta_i\left(\sum_{l=0}^{i}b_{\Phi(q+\beta),l,i}(-1)^{l+1}(l)!\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\right)
\end{aligned}$$

en consecuencia, usando que $\xi_0 b_{\Phi(q+\beta),0,0}(-1) = \beta$

$$\begin{aligned}
H_d^{(q)}(x)=&\beta\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)+\sum_{i=1}^{r-1}\zeta_i\sum_{l=1}^{i}b_{\Phi(q+\beta),l,i}(-1)^{l+1}(l)!\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\\
=&\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{i=l}^{r-1}\zeta_i b_{\Phi(q+\beta),l,i}(-1)^{l+1}(l)!\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\\
=&\sum_{l=0}^{r-1}(-1)^{l+1}(l)!\sum_{i=l}^{r-1}\zeta_i b_{\Phi(q+\beta),l,i}\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $x \geq 0$

$$H_d^{(q)}(x)=\sum_{l=0}^{r-1}\vartheta_l\left(\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\right).$$

Así, concluimos que, si e_d tiene transformada da Laplace (4.2.1), entonces

$$H_d^{(q)}(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{r-1} \vartheta_l \left(\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}^{l+1} W^{(q)}(x) \right), & \text{si } x \geq 0 \\ \sum_{l=0}^{r-1} \zeta_i \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x} \right), & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{4.2.17}$$

Para $P_d^{(q)}(x)$, con $x \geq 0$, recordemos que

$$\begin{aligned} P_d^{(q)}(x) &= \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)} \sum_{i=0}^{r-1} \chi_i \mathbb{E}_0 \left[(X_{\tau_0^-})^i e^{-q\tau_0^- + \Phi(q+\beta) X_{\tau_0^-}} ; \tau_0^- < \tau_x^+ \right] \\ &- \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)} C \left(\frac{\beta}{\beta + q} \right) \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_0^-} ; \tau_0^- < \tau_x^+ \right]. \end{aligned}$$

Usando las mismas ideas que en el caso de $H_d^{(q)}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{r-1} \chi_i \mathbb{E}_0 \left[(X_{\tau_0^-})^i e^{-q\tau_0^- + \Phi(q+\beta) X_{\tau_0^-}} ; \tau_0^- < \tau_x^+ \right] \\ = \; & \chi_0 \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_0^- + \Phi(q+\beta) X_{\tau_0^-}} ; \tau_0^- < \tau_x^+ \right] + \sum_{i=1}^{r-1} \chi_i \mathbb{E}_0 \left[(X_{\tau_0^-})^i e^{-q\tau_0^- + \Phi(q+\beta) X_{\tau_0^-}} ; \tau_0^- < \tau_x^+ \right] \\ = \; & \chi_0 \left(1 - W^{(q)}(0) (\Psi(\Phi(q+\beta)) - q) \frac{\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)} W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)} \right) \\ + \; & \frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(x)} \sum_{i=1}^{r-1} \chi_i \sum_{l=0}^{i} b_{\Phi(q+\beta),l,i} \left\{ (-1)^l l! \; \mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}^{l+1} W^{(q)}(x) \right\} \\ = \; & \chi_0 \left(1 - W^{(q)}(0) \beta \frac{\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)} W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)} \right) \\ + \; & \frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(x)} \sum_{i=1}^{r-1} \chi_i \sum_{l=0}^{i} b_{\Phi(q+\beta),l,i} \left\{ (-1)^l l! \; \mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}^{l+1} W^{(q)}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo las esperanzas en $P_d^{(q)}(x)$

$$\begin{aligned}
P_d^{(q)}(x) &= \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}\chi_0 - \chi_0\beta\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x) \\
&+ \sum_{i=1}^{r-1}\chi_i\sum_{l=0}^{i} b_{\Phi(q+\beta),l,i}\left\{(-1)^l l!\ \mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}^{l+1}W^{(q)}(x)\right\} \\
&- \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}c\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)\left[Z^{(q)}(0) - \frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(x)}Z^{(q)}(x)\right] \\
&= \frac{\chi_0 - c\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)}{W^{(q)}(0)}W^{(q)}(x) + C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)Z^{(q)}(x) \\
&+ \sum_{i=0}^{r-1}\chi_i\sum_{l=0}^{i} b_{\Phi(q+\beta),l,i}\left\{(-1)^l l!\ \mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}^{l+1}W^{(q)}(x)\right\}.
\end{aligned}$$

Trabajemos con el último término de la suma. Intercambiando índices obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{r-1}\chi_i\sum_{l=0}^{i} b_{\Phi(q+\beta),l,i}\left\{(-1)^l l!\ \mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}^{l+1}W^{(q)}(x)\right\} \\
&\qquad = \sum_{l=0}^{r-1}\sum_{i=l}^{r-1}\chi_i b_{\Phi(q+\beta),l,i}\left\{(-1)^l l!\ \mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}^{l+1}W^{(q)}(x)\right\} \\
&\qquad = \sum_{l=0}^{r-1}(-1)^l l!\ \sum_{i=l}^{r-1}\chi_i b_{\Phi(q+\beta),l,i}\left\{\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}^{l+1}W^{(q)}(x)\right\} \\
&\qquad = \sum_{l=0}^{r-1}\zeta_l\left\{\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}^{l+1}W^{(q)}(x)\right\},
\end{aligned}$$

donde $\zeta_l = (-1)^l l!\ \sum_{i=l}^{r-1}\chi_i b_{\Phi(q+\beta),l,i}$.

Así, para todo $x \geq 0$

$$P_d^{(q)}(x) = \frac{\chi_0 - c\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)}{W^{(q)}(0)}W^{(q)}(x) + C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)Z^{(q)}(x) + \sum_{l=0}^{r-1}\zeta_l\left\{\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}^{l+1}W^{(q)}(x)\right\}.$$

Por lo tanto, cuando e_d es Erlang mixto,

$$P_d^{(q)}(x) = \begin{cases} \frac{\chi_0 - C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)}{W^{(q)}(0)} W^{(q)}(x) + C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right) Z^{(q)}(x) + \sum_{l=0}^{r-1} \zeta_l \left(\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}^{l+1} W^{(q)}(x)\right), & x \geq 0 \\ C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right) - \sum_{i=0}^{r-1} \chi_i \left(x^i e^{\Phi(q+\beta)x}\right), & x < 0. \end{cases} \tag{4.2.18}$$

Esto concluye la prueba.

□

4.3. Transformada de Laplace del Tiempo de Ruina.

En esta sección estudiaremos la transformada de Laplace del tiempo de ruina parisino,

$$\phi_q(x) := \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_d}; \, \tau_d < \infty\right].$$

Observemos que, por teorema de convergencia monótona,

$$\phi_q(x) = \lim_{b\to\infty} \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_d}; \, \tau_d < \tau_b^+\right],$$

pero,

$$\begin{aligned} \lim_{b\to\infty} \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_d; \, \tau_d < \tau_b^+}\right] &= \lim_{b\to\infty} \left(P_d^{(q)}(x) - \frac{H_d^{(q)}(x)}{H_d^{(q)}(b)} P_d^{(q)}(b)\right) \\ &= P_d^{(q)}(x) - H_d^{(q)}(x) \lim_{b\to\infty} \frac{P_d^{(q)}(b)}{H_d^{(q)}(b)} \\ &= P_d^{(q)}(x) - H_d^{(q)}(x)\sigma_q, \end{aligned}$$

donde

$$\sigma_q := \lim_{x\to\infty} \frac{P_d^{(q)}(x)}{H_d^{(q)}(x)}. \tag{4.3.1}$$

Corolario 4.3.1 *La transformada de Laplace del tiempo de ruina parisino, puede ser expresado como*

$$\phi_q(x) = P_d^{(q)}(x) - H_d^{(q)}(x)\sigma_q, \tag{4.3.2}$$

con σ_q como en (4.3.1).

Por definición, $P_d^{(q)}(0) = 0$ y $H_d^{(q)}(0) = 1$, en consecuencia

$$\phi_q(0) = P_d^{(q)}(0) - \sigma_q H_d^{(q)}(0) = -\sigma_q.$$

Lo anterior implica lo siguiente, la probabilidad de ruina parisino cuando el proceso empieza en cero, es

$$\mathbb{P}_0(\tau_d < \infty) = \phi_0(0) = -\sigma_0.$$

Observemos que el objeto a conocer en la transformada de Laplace del tiempo de ruina parisino, es σ_q. A continuación, analicemos los casos cuando la variable aleatoria que representa la demora, e_d, es cero, es exponencial y cuando es Erlang mixto.

Supongamos que $e_d \equiv 0$, recordemos que para este caso

$$H_d^{(q)}(x) = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)} \quad \text{y} \quad P_d^{(q)}(x) = Z^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)},$$

también, en el capitulo (2) en la ecuación (2.4.8), vimos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Z^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)} = \frac{q}{\Phi(q)}, \tag{4.3.3}$$

de ahí, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_q &= \lim_{x\to\infty} \frac{P_d^{(q)}(x)}{H_d^{(q)}(x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{Z^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}}{\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)}} \\
&= \lim_{x\to\infty} W^{(q)}(0)\frac{Z^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)} - 1 \\
&= W^{(q)}(0)\frac{q}{\Phi(q)} - 1,
\end{aligned}$$

y por lo tanto, si $e_d \equiv 0$, la transformada de Laplace del tiempo de ruina parisino, es

$$\phi_q(x) = Z^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)} + \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(0)} - \frac{q}{\Phi(q)} W^{(q)}(x),$$

es decir,

$$\phi_q(x) = Z^{(q)}(x) - \frac{q}{\Phi(q)} W^{(q)}(x).$$

Para el caso exponencial, antes observemos lo siguiente. Por definición

$$\frac{\mathcal{T}_r W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)} = \int_0^\infty e^{-ry} \frac{W^{(q)}(x+y)}{W^{(q)}(x)} dy,$$

en consecuencia,

$$\frac{\mathcal{T}_r^l W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)} = \int_0^\infty \frac{y^{l-1}}{(l-1)!} e^{-ry} \frac{W^{(q)}(x+y)}{W^{(q)}(x)} dy,$$

recordemos que la función escala $W^{(q)}$ satisface $W^{(q)}(x) = e^{\Phi(q)x} W(x)$, donde $W(x)$ es una función no decreciente continua por la derecha y acotada. Reescribiendo la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{T}_r W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)} &= \int_0^\infty e^{-ry} \frac{e^{\Phi(q)(x+y)} W(x+y)}{e^{\Phi(q)x} W(x)} dy \\
&= \int_0^\infty e^{-(r-\Phi(q))y} \frac{W(x+y)}{W(x)} dy
\end{aligned}$$

de esta manera

$$\frac{\mathcal{T}_r^l W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)} = \int_0^\infty \frac{y^{l-1} e^{-(r-\Phi(q))y}}{(l-1)!} \frac{W(x+y)}{W(x)} dy$$

para toda $r > \Phi(q)$. Tomando limite ambos lados cuando x tiende a infinito y usando el teorema de convergencia dominada, obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\mathcal{T}_r^l W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)} &= \int_0^\infty \frac{y^{l-1} e^{-(r-\Phi(q))y}}{(l-1)!} \lim_{x\to\infty} \frac{W(x+y)}{W(x)} dy \qquad (4.3.4) \\
&= \int_0^\infty \frac{y^{l-1} e^{-(r-\Phi(q))y}}{(l-1)!} dy \\
&= \left(\frac{1}{r-\Phi(q)} \right)^l,
\end{aligned}$$

para toda $r > \Phi(q)$.

Ahora, supongamos que e_d es una variable aleatoria exponencial con media $1/\beta$, usando (4.1.3), (4.1.4), (4.3.3) y (4.3.4), tenemos

$$\begin{aligned}
\sigma_q &= \lim_{x\to\infty} \frac{P_d^{(q)}(x)}{H_d^{(q)}(x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\beta}{\beta+q}\left(Z^{(q)}(x) - \beta\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\right)}{\beta\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)} \\
&= \frac{1}{\beta+q} \lim_{x\to\infty} \frac{Z^{(q)}(x)/W^{(q)}(x) - \beta\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)/W^{(q)}(x)}{\mathcal{T}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)/W^{(q)}(x)} \\
&= \frac{1}{\beta+q} \frac{q/\Phi(q) - \beta/(\Phi(q+\beta) - \Phi(q))}{1/(\Phi(q+\beta) - \Phi(q))} \\
&= \frac{1}{\beta+q} \left(\frac{q(\Phi(q+\beta) - \Phi(q)) - \beta}{\Phi(q)}\right) \\
&= \frac{q\Phi(q+\beta) - (\beta+q)\Phi(q)}{\Phi(q)(\beta+q)} \\
&= \frac{q}{\beta+q}\frac{\Phi(q+\beta)}{\Phi(q)} - 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sigma_q = \frac{q}{\beta+q}\frac{\Phi(q+\beta)}{\Phi(q)} - 1. \tag{4.3.5}$$

Corolario 4.3.2 *Supongamos que $\psi'(0+) > 0$. Entonces*

$$\phi_q(0) = \mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d}; \tau_d < \infty\right] = 1 - \frac{q}{\beta+q}\left(\frac{\Phi(q+\beta)}{\Phi(q)}\right)$$

y

$$\mathbb{P}(\tau_d < \infty) = 1 - \psi'(0+)\frac{\Phi(\beta)}{\beta}.$$

Demostración. De la expresión (4.3.5), tenemos

$$\phi_q(0) = -\sigma_q = 1 - \frac{q}{\beta+q}\frac{\Phi(q+\beta)}{\Phi(q)},$$

en consecuencia

$$\mathbb{E}_0\left[e^{-q\tau_d};\,\tau_d<\infty\right]=1-\frac{q}{\beta+q}\left(\frac{\Phi(q+\beta)}{\Phi(q)}\right).$$

por otro lado

$$\begin{aligned}-\sigma_0&=1-\lim_{q\downarrow 0}\frac{q}{\Phi(q)}\left(\frac{\Phi(q+\beta)}{\beta+q}\right)\\&=1-\psi'(0+)\frac{\Phi(\beta)}{\beta}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}(\tau_d<\infty)=-\sigma_0=1-\psi'(0+)\frac{\Phi(\beta)}{\beta}.$$

□

Por ultimo, tratemos el caso cuando e_d es Erlang mixto, es decir, cuando e_d tiene transformada de Laplace (4.2.1). Usando los resultados de la proposición (4.2.2),

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{P_d^{(q)}(x)}{H_d^{(q)}(x)}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\chi_0-C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)}{W^{(q)}(0)}W^{(q)}(x)+C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)Z^{(q)}(x)+\sum_{l=0}^{r-1}\zeta_l\left(\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\right)}{\sum_{l=0}^{r-1}\vartheta_l\left(\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)\right)}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\chi_0-C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)}{W^{(q)}(0)}+C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)\frac{Z^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)}+\sum_{l=0}^{r-1}\zeta_l\left(\frac{\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)}\right)}{\sum_{l=0}^{r-1}\vartheta_l\left(\frac{\mathcal{T}^{l+1}_{\Phi(q+\beta)}W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(x)}\right)}\\&=\frac{\frac{\chi_0-C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)}{W^{(q)}(0)}+C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)\frac{q}{\Phi(q)}+\sum_{l=0}^{r-1}\zeta_l\left(\frac{1}{\Phi(q+\beta)-\Phi(q)}\right)^{l+1}}{\sum_{l=0}^{r-1}\vartheta_l\left(\frac{1}{\Phi(q+\beta)-\Phi(q)}\right)^{l+1}},\end{aligned}$$

en la última igualdad se uso (4.3.3) y (4.3.4). Por lo tanto

$$\sigma_q=\frac{\frac{\chi_0-C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)}{W^{(q)}(0)}+C\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)\frac{q}{\Phi(q)}+\sum_{l=0}^{r-1}\zeta_l\left(\frac{1}{\Phi(q+\beta)-\Phi(q)}\right)^{l+1}}{\sum_{l=0}^{r-1}\vartheta_l\left(\frac{1}{\Phi(q+\beta)-\Phi(q)}\right)^{l+1}}.$$

4.4. Métodos Numéricos.

En esta parte mencionaremos algunos métodos sobre como " calcular " las funciones q-escala. En la mayoría de las veces, no se tendrá una expresión cerrada para $W^{(q)}(x)$, ya que dichas funciones están definidas vía su transformada de Laplace. Pero no está del todo mal, ya que podemos recurrir a métodos numéricos para aproximarlas.

Se omitirán los detalles de dichos resultados ya que no es de nuestro interés, pero se podrán leer en las referencias que se mencionarán.

Uno de los métodos es la *integral de inversión de Bromwhic*. El teorema 2.2 en [1], concluye que $W^{(q)}(x)$ puede ser expresada de la siguiente manera,

$$W^{(q)}(x) = \frac{e^{cx}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\mathrm{i}ux}}{\psi(c+\mathrm{i}u)-q}du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

donde c es una constante que satisface $c > \Phi(q)$, así, el problema se reduce a aproximar la integral. El factor e^{cx} es un detalle a considerar, ya que esto puede hacer que el error de aproximación de la integral aumente, pues dicho factor puede ser muy grande, así que conviene tomar una $c > 0$ muy pequeña.

De esta manera, este método es razonable si $q = 0$ y $\Phi(0) = 0$, es decir, el proceso en cuestión, X_t, debe ser un proceso de tal manera que su exponente característico satisfaga, $\psi'(0+) \geq 0$.

Por otro lado, recordemos que estamos trabajando con un proceso de riesgo, esto es X_t deriva a $+\infty$, entonces $\psi'(0+) > 0$ y en consecuencia $\Phi(0) = 0$. En este caso, tenemos que $W(x)$ no crece de manera exponencial, de hecho crece de manera lineal cuando x tiende a infinito, ya que W es una medida de renovación. En general, para $q > 0$, usaremos la relación

$$W^{(q)}(x) = e^{\Phi(q)x}W_{\Phi(q)}(x).$$

Teorema 4.4.1 (Integral de Inversión de Bromwhic) *Sea f una función real valuada y $\widetilde{f}$ su transformada de Laplace. Entonces*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{T\to\infty}\int_{c-\mathrm{i}T}^{c+\mathrm{i}T} e^{zt}\widetilde{f}(z)dz$$

o

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} e^{zt}\widetilde{f}(z)dz \tag{4.4.1}$$

Para leer la demostración, consultar [[1], teorema 2.2].

Así, si tenemos una función explicita, $g(z)$, que es analítica en la región $\operatorname{Re}(z) > 0$ y que es igual a la transformada de Laplace de $f(x)$

$$\int_0^\infty e^{-zx} f(x) dx = g(z), \quad \operatorname{Re}(z) > 0,$$

el problema es calcular $f(x)$. El teorema anterior nos dice que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c+\mathrm{i}\mathbb{R}} g(z) e^{zx} dz, \quad x > 0,$$

el hecho de que estemos interesados en $f(x)$ para valores positivos de x, la ecuación anterior se puede reescribir como sigue

$$f(x) = \frac{2e^{cx}}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}\left[g(c + \mathrm{i}u)\right] \cos(ux) du, \quad x > 0. \tag{4.4.2}$$

Nuestro objetivo ahora es calcular la integral numéricamente. Una forma es a partir de la regla de trapezoide, esto es, si h es una función acotada en un intervalo $[a, b]$ cuyo conjunto de discontinuidades tiene medida cero, entonces

$$\int_a^b h(x) dx \approx \frac{b-a}{m} \left(\frac{h(a) + h(b)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} h\left(a + k\frac{b-a}{m}\right) \right), \tag{4.4.3}$$

con m suficientemente grande.

Otra manera, es observar que la integral anterior es una integral oscilatoria, en general no es fácil de evaluarla, ya que la función coseno puede causar problemas cuando su periodo es demasiado pequeño, por decir $2\pi/x$, cuando x es muy grande.

Para hacer la aproximación una forma es usar el método de Filon para integrales oscilatorios, sobre un intervalo finito $[a, b]$, de la forma

$$\mathcal{F}_c G(x) := \int_a^b G(u) \cos(ux) du.$$

La idea es similar al método de Simpson. Se aproxima la función $G(u)$ por una interpolación de Lagrange de un polinomio de orden dos y que es multiplicado por $\cos(ux)$ en el intervalo $[a, b]$. Debido al hecho de que el producto de funciones trigonométricas y polinomios pueden ser integrados explícitamente, se tiene una formula explicita para la aproximación.

El algoritmo para este método es de la siguiente manera. Tomar N, un número entero, y definimos $h = (b-a)/(2N)$, $u_n = a + nh$ y $g_n = G(u_n)$ con $0 \leq n \leq 2N$. Consideremos el vector de partición $\mathbf{u} = [u_0, u_1, \ldots, u_{2N}]$ y su correspondiente imagen bajo G, $\mathbf{g} = [g_0, g_1, \ldots, g_{2N}]$. Para $k \in \{1, 2\}$ definimos

$$\mathcal{C}_k(\mathbf{g}, \mathbf{u}, x) = \sum_{n=0}^{N-1} g_{2N+k} \cos(x u_{2N+k}). \tag{4.4.4}$$

Para cada subintervalo $[u_{2n}, u_{2n+2}]$ aproximamos a $G(u)$ por un polinomio de Lagrange de grado dos, obteniendo

$$\begin{aligned} G(u;N) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_{\{u_{2n} \leq u < u_{2n+2}\}} \Big[& g_{2n+1} + \frac{1}{2h}(g_{2n+2} - g_{2n})(u - u_{2n+1}) \\ & + \frac{1}{2h^2}(g_{2n+2} - 2g_{2n+1} + g_{2n})(u - u_{2n+1})^2 \Big]. \end{aligned}$$

Multiplicando por la función $\cos(ux)$ e integrando sobre el intervalo $[a, b]$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c G(x;N) =& \int_a^b G(u;N) \cos(ux) du \qquad (4.4.5) \\ =& hA(hx) \left(G(b) \sin(bx) - G(a) \sin(ax) \right) \\ & + hB(hx) \left[\mathcal{C}_2(\mathbf{g}, \mathbf{u}, x) - \frac{1}{2} \left(G(b) \cos(bx) - G(a) \cos(ax) \right) \right] \\ & + hC(hx) \mathcal{C}_1(\mathbf{g}, \mathbf{u}, x), \end{aligned}$$

donde

$$A(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sin(2x)}{2x^2} - \frac{2\sin(x)^2}{x^3}, \tag{4.4.6}$$

$$B(x) = 2 \left[\frac{1 + \cos(x)^2}{x^2} - \frac{\sin(2x)}{x^3} \right], \tag{4.4.7}$$

$$C(x) = 4 \left[\frac{\sin(x)}{x^3} - \frac{\cos(x)}{x^2} \right]. \tag{4.4.8}$$

Para mas detalles y referencias así como leer de otros métodos, consultar [[6] y [19]]. Regresando al problema original, tenemos que la transformada de Laplace de $W(x)$ es

$$\widetilde{W}(\lambda) = \frac{1}{\psi(\lambda)}$$

así, por la ecuación (4.4.2), resta calcular la parte real de $\widetilde{W}(c+\mathrm{i}u)$ con $u \in \mathbb{R}$. Para esto, notemos que $\psi(c+\mathrm{i}u) = \mathrm{Re}(\psi(c+\mathrm{i}u)) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\psi(c+\mathrm{i}u))$, entonces

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\psi(c+\mathrm{i}u)}\right) = \frac{\mathrm{Re}(\psi(c+\mathrm{i}u))}{\mathrm{Re}(\psi(c+\mathrm{i}u))^2 + \mathrm{Im}(\psi(c+\mathrm{i}u))^2},$$

y usando (1.3.6), es decir,

$$\psi(\lambda) = \tilde{a}\lambda - \int_{(-\infty,0)} \left(1 - e^{\lambda x}\right) \Pi(dx),$$

donde,

$$\tilde{a} := a - \int_{|x|<1} x\Pi(dx) > 0,$$

obtenemos

$$\mathrm{Re}(\psi(c+\mathrm{i}u)) = \tilde{a}c - \int_{(-\infty,0)} (1 - e^{cx}\cos(ux))\,\Pi(dx),$$

y

$$\mathrm{Im}(\psi(c+\mathrm{i}u)) = \tilde{a}u + \int_{(-\infty,0)} e^{cx}\sin(ux)\Pi(dx).$$

Ejemplo 4.4.2 Consideremos al proceso $X = (X_t, t \geq 0)$, como un proceso Poisson compuesto,

$$X_t = at - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i, \tag{4.4.9}$$

donde N_t es un proceso Poisson con intensidad μ y $(\xi)_{i\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias positivas independientes de N con ley F. Supongamos que F es la distribución de una ley exponencial con parámetro β.
Entonces,

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_t}\right] = e^{t\psi(\theta)},$$

con

$$\psi(\lambda) = a\lambda - \mu + \frac{\mu\beta}{\lambda+\beta}. \tag{4.4.10}$$

Recordemos que la función escala, $W(x)$, es tal que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W(x)dx = \frac{1}{\psi(\lambda)}. \tag{4.4.11}$$

Tomemos $a = 1$, $\beta = 2$ y $\mu = 1$. En este caso, $1/\psi(\lambda)$ se puede invertir fácilmente, a saber, usando fracciones parciales

$$\begin{aligned}\frac{1}{\psi(\lambda)} &= \frac{\lambda+\beta}{\lambda^2+\lambda\beta-\mu\lambda} \\ &= \frac{\beta}{\lambda(\beta-\mu)} + \frac{\mu}{(\mu-\beta)(\lambda+\beta-\mu)} \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\left(\frac{\beta}{\beta-\mu} + \frac{\mu}{\mu-\beta}e^{(\mu-\beta)x}\right)dx.\end{aligned}$$

Obteniendo así que

$$W(x) = \frac{\beta}{\beta-\mu} + \frac{\mu}{\mu-\beta}e^{(\mu-\beta)x}. \tag{4.4.12}$$

Aproximemos W usando los dos métodos que se describieron, (4.4.3) y (4.4.5) tomando en cuenta (4.4.2). Llamemos método uno a la ecuación (4.4.3) y método dos a la ecuación (4.4.5).

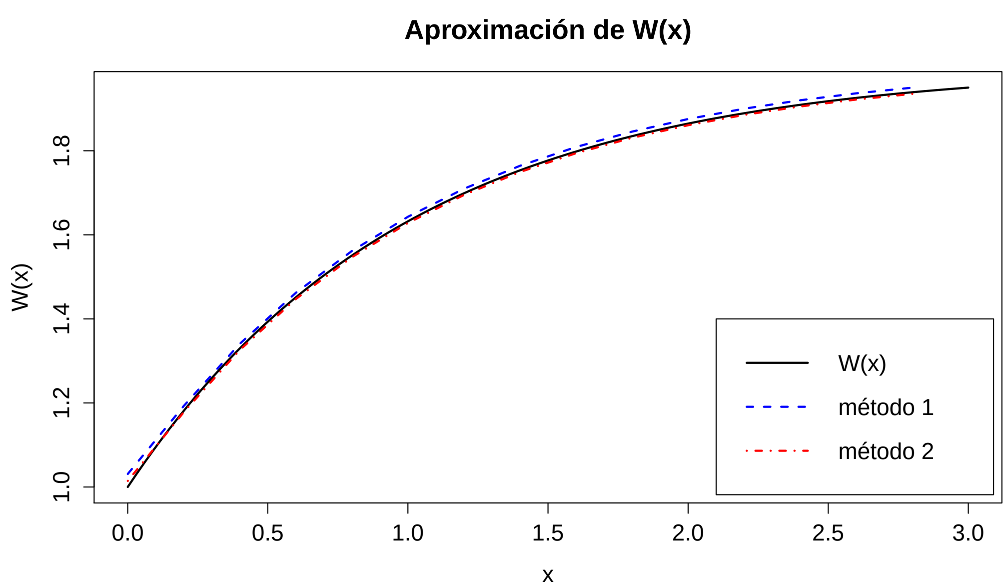


Figura 4.1: Gráfica de la aproximación de la función escala con $c = 10^{-2}$. Para el método 1 se tomó $m = 30000$ y para el método 2 se tomó $N = 30000$.

Podemos observar que el método dos aproxima mejor la función de interés, la desventaja es que es computacionalmente mas costoso comparado con el método uno.

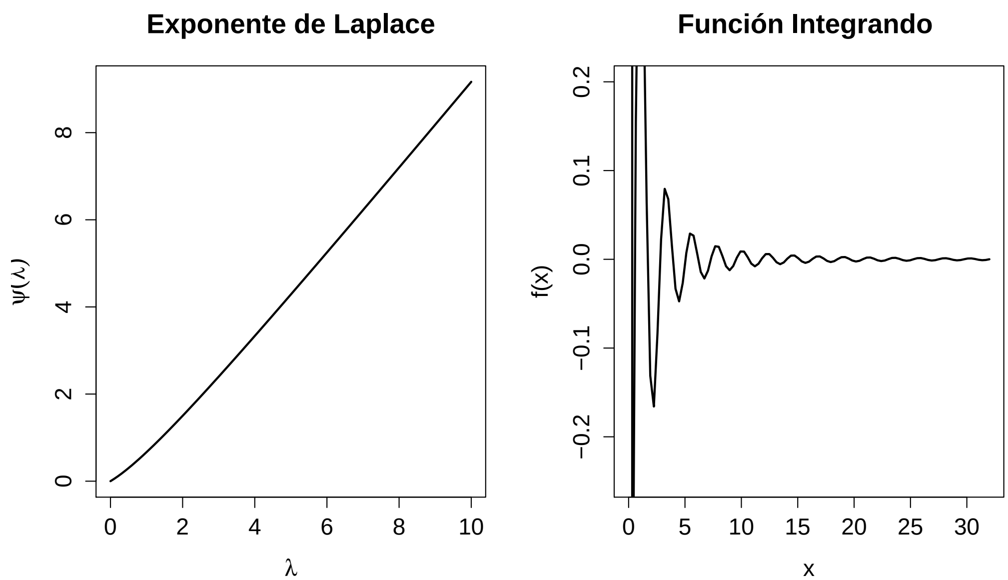


Figura 4.2: Gráficas correspondientes al proceso de Poisson compuesto (4.4.9).

En la figura (4.2) mostramos las gráficas de $\psi(\lambda)$ y la de función integrando $f(u) = \mathrm{Re}(1/\psi(c + \mathrm{i}u))\cos(ux)$, con $x = 2.8$.

Ejemplo 4.4.3 Consideremos un proceso de Lévy meromorfo que pertenece a la familia theta, introducidos en [[2], [3]]. Los procesos de Lévy meromorfos son tal que la medida de Lévy, $\Pi(dx) = \pi(x)dx$, esencialmente, son una mezcla de distribuciones exponenciales, y en el caso de un proceso espectralmente negativo resulta ser

$$\pi(x) = \mathbb{1}_{\{x<0\}} \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{\rho_m x}, \tag{4.4.13}$$

donde los coeficientes b_m, ρ_m son positivos. Usando la fórmula de Lévy-Khintchine, se tiene que el exponente de Laplace está dado por

$$\psi(z) = \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \mu z + z^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{\rho_m^2(\rho_m + z)}, \tag{4.4.14}$$

y tiene las siguientes propiedades (ver [[5]]),

1. $\psi(z)$ tiene polos simples en los puntos $\{-\rho_m\}_{m=1}^{\infty}$.

2. Para $q \geq 0$, $\psi(z) - q$ tiene una infinidad de raíces simples negativos, $\{-\zeta_n(q)\}$.

3. Si $\zeta_n(q)$ están indexados de tal manera que es una sucesión creciente en n. Entonces, se tiene la siguiente desigualdad

$$0 < \zeta_1(q) < \rho_1 < \zeta_2(q) < \rho_2 < \dots . \tag{4.4.15}$$

También, tenemos el siguiente resultado [[4], Proposición 1].

Proposición 4.4.4 *Sea X un proceso meromorfo espectralmente negativo. Entonces para toda $q \geq 0$*

$$W^{(q)}(x) = \frac{e^{\Phi(q)x}}{\psi'(\Phi(q))} + \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\zeta_n x}}{\psi'(\zeta_n)}, \quad x > 0. \tag{4.4.16}$$

En el caso que el proceso pertenece a la familia theta con parámetro $\lambda = 3/2$, el exponente de Laplace se escribe como

$$\psi(z) = \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \mu z - c\sqrt{\alpha + z/\beta} \coth\left(\pi\sqrt{\alpha + z/\beta}\right) + c\sqrt{\alpha} \coth\left(\pi\sqrt{\alpha}\right), \tag{4.4.17}$$

y es un caso particular de los procesos meromorfos con

$$b_m = \frac{2}{\pi} c\beta m^{2\lambda - 1} \quad \text{y} \quad \rho_m = \beta\left(\alpha + m^2\right). \tag{4.4.18}$$

En la ecuación (4.4.17), tomemos

$$\sigma = 0, \quad \mu = 15, \quad c = 5.4, \quad \alpha = 0.5, \quad \text{y} \quad \beta = 0.35 . \tag{4.4.19}$$

Estos parámetros definen un proceso X, espectralmente negativo con trayectorias de variación acotada, con $\mathbb{E}[X_1] = 5$ y también, esta elección corresponde a un modelo de riesgo, donde la media de los reclamos es 3.33 por unidad de tiempo.

En este ejemplo, aproximamos la función de escala $W(x)$, usando los métodos presentados anteriormente, para el caso de un θ-proceso con $\lambda = 3/2$ y parámetros (4.4.19), comparando con los valores de $W(x)$ obtenidos de la ecuación (4.4.16), figura (4.3). Como antes, llamemos método uno a la ecuación (4.4.3) y método dos a la ecuación (4.4.5).

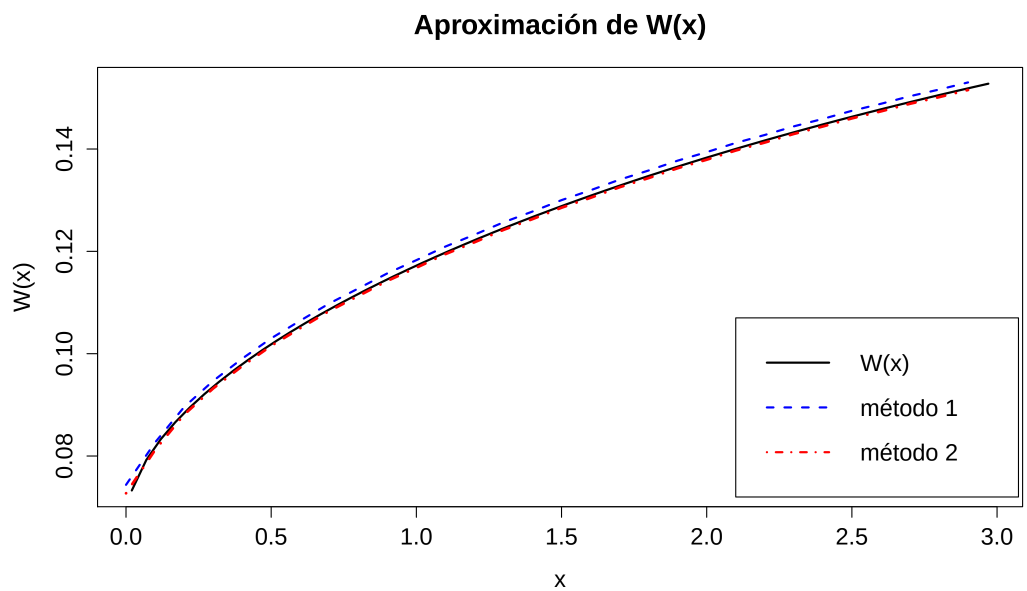


Figura 4.3: Gráfica de la aproximación de la función escala para el proceso de Lévy meromorfo con $c = 10^{-2}$. Se tomó $m = M = 30000$ para el método uno y dos correspondientemente.

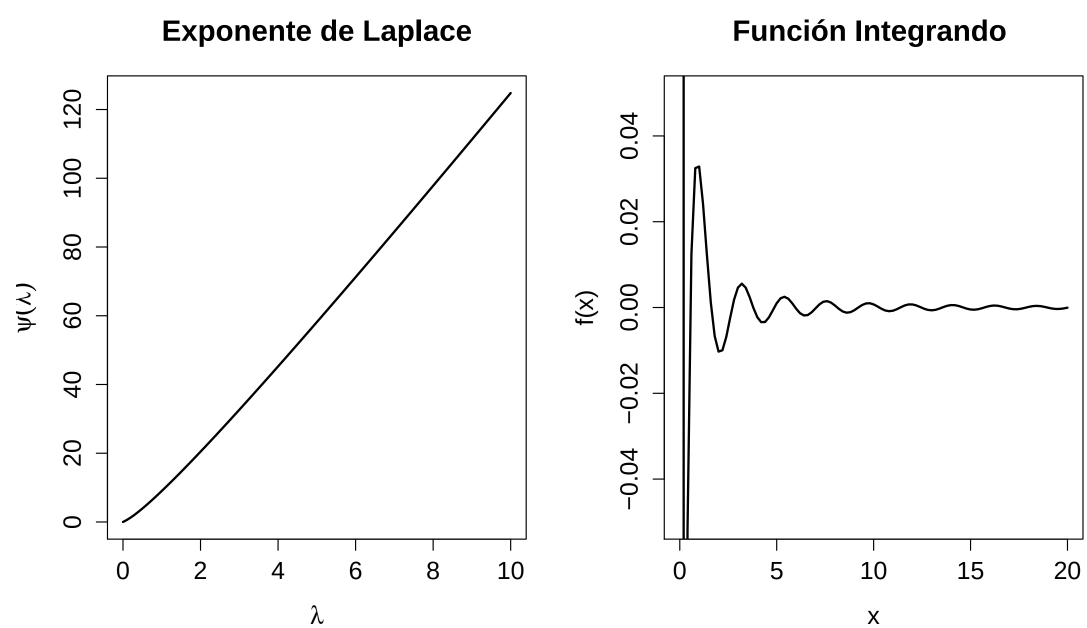


Figura 4.4: Gráficas correspondientes al proceso de Lévy meromorfo.

Observemos nuevamente, que el método dos aproxima mejor que el método uno. En la figura (4.4) mostramos las gráficas de $\psi(\lambda)$ y la de función integrando $f(u) = \mathrm{Re}(1/\psi(c + \mathrm{i}u))\cos(ux)$, con $x = 2.9$.

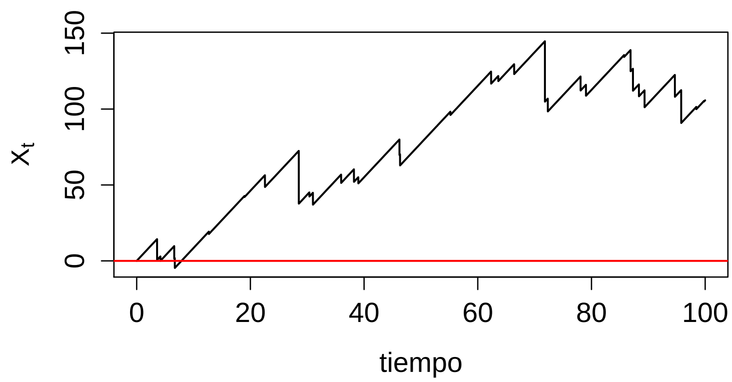
Ejemplo 4.4.5 Sea X_t es un proceso de Poisson compuesto con deriva, donde la tasa de llegada de los reclamos es $1/3$ y el monto de los reclamos sigue una ley exponencial con media 9 y con una prima de 4 por unidad de tiempo. En este caso se puede calcular explícitamente la probabilidad de ruina clásica, obteniendo que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 3/4$ con $\tau = \text{ínf}\,\{t \geq 0 \,:\, X_t < 0\}$.

Calcularemos la probabilidad de ruina tipo parisino para diferentes valores de T deterministas, para ello se realizaron $10,000$ repeticiones del procesos observando en un intervalo de tiempo de 0 a 300 unidades. Los resultados se observan en el cuadro (4.1). En el se observa que como era de esperarse la probabilidad de ruina disminuye al aumentar el capital inicial, así como permitir que el proceso pase mas tiempo por debajo del nivel cero. Es importante notar que la probabilidad disminuye considerablemente sin tener que esperar que el proceso pase por debajo del nivel cero mucho tiempo, la probabilidad disminuye un poco mas de la mitad con permitir 10 unidades de tiempo por debajo de cero.

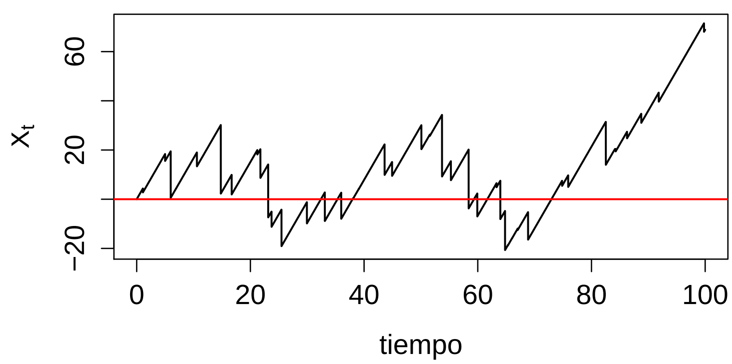
Capital	$T = 0$	$T = 5$	$T = 7$	$T = 10$
0	0.750	0.478	0.422	0.358
10	0.561	0.353	0.313	0.265
20	0.427	0.273	0.238	0.204
50	0.191	0.119	0.103	0.086

Cuadro 4.1: Estimación de la probabilidad de ruina tipo parisino

En la figura (4.5) se muestra dos ejemplos de las simulaciones del proceso, en la primera, (a), se observa como el proceso se va a la ruina con la definición de ruina clásico pero no con el tipo parisino y en la segundo ocurre la ruina tipo parisino.



(a) No ocurre ruina tipo parisino



(b) Ocurre ruina tipo parisino

Figura 4.5: Simulaciones

Ejemplo 4.4.6 Para fines ilustrativos, supondremos nuevamente que X_t es un proceso Poisson compuesto,

$$X_t = at - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i,$$

donde N_t es un proceso Poisson con intensidad μ, ξ_i son variables aleatorias independientes con ley $\exp(\lambda)$, en este caso, recordemos que

$$\psi(\theta) = a\theta - \mu + \frac{\mu\lambda}{\theta + \lambda},$$

y

$$W(x) = \frac{1}{a}\Big(1 + \frac{\mu}{a\lambda - \mu}\big(1 - e^{-(\lambda - \mu a^{-1})x}\big)\Big).$$

También, la probabilidad de ruina tipo parisino es,

$$\mathbb{P}(\tau_d < \infty) = P_d(x) - H_d(x)\sigma_0.$$

Supongamos que la variable aleatoria de demora, e_d, es tal que $e_d \overset{L}{=} \exp(\beta)$, en consecuencia

$$\sigma_0 = \psi'(0+)\frac{\Phi(\beta)}{\beta} - 1.$$

Calculando H_d y P_d, obtenemos

$$H_d(x) = \beta \mathcal{T}_{\Phi(\beta)} W(x), \quad P_d(x) = 1 - H_d(x).$$

donde,

$$\mathcal{T}_{\Phi(\beta)} W(x) = \frac{1}{a\Phi(\beta)}\big(1 + \frac{\mu}{a\lambda - \mu}\big) - \frac{1}{a}\frac{\mu}{a\lambda - \mu}\frac{1}{\Phi(\beta) + \lambda - \mu a^{-1}} e^{-(\lambda - \mu a^{-1})}.$$

Tomemos $\mu = 1/3$, $\lambda = 1/9$, $a = 4$ y $\beta = 1/5, 1/7$ y $1/10$. En las siguientes tablas se muestran los resultados obtenidos, la última columna son las probabilidades teóricas, la columna $T\,(S)$ representa la probabilidad de ruina tipo parisino con tiempo de demora determinista obtenida a través de simulaciones, la columna $\exp(1/5)\,(A)$ representa las probabilidades de ruina tipo parisino con tiempo de demora $\exp(1/5)$ obtenidas a partir de la aproximación de W utilizando el método uno, la columna $\exp(1/5)\,(S)$ representa las probabilidades tipo parisino con tiempo de demora $\exp(1/5)$ obtenidas a través de simulación. Para la simulación, se realizaron $10,000$ repeticiones del procesos observando en un intervalo de tiempo de 0 a 300 unidades.

Capital	$T = 5$ (S)	$\exp(1/5)$ (S)	$\exp(1/5)$ (A)	$\exp(1/5)$
0	0.478	0.523	0.574	0.567
10	0.353	0.397	0.433	0.429
20	0.273	0.297	0.327	0.325
50	0.119	0.126	0.148	0.141

Cuadro 4.2: Probabilidades de ruina tipo parisino con demora $\exp(1/5)$

Capital	$T = 10$ (S)	$\exp(1/10)$ (S)	$\exp(1/10)$ (A)	$\exp(1/10)$
0	0.358	0.421	0.492	0.486
10	0.265	0.323	0.370	0.368
20	0.204	0.244	0.278	0.279
50	0.086	0.104	0.116	0.121

Cuadro 4.3: Probabilidades de ruina tipo parisino con demora $\exp(1/10)$

Capital	$T = 0$ (S)	$T = 0$
0	0.750	0.75
10	0.561	0.56
20	0.427	0.4303151
50	0.191	0.1870142

Cuadro 4.4: Probabilidades de ruina clásica (estimadas vía simuladas y teóricas).

La segunda tabla, es con tiempo de demora $\exp(1/10)$ y tiempo determinista $T = 10$.

Observemos que los valores aproximados ya sea por simulación o por el método uno son muy cercanos al valor teórico. Como se esperaba a mayor capital inicial la probabilidad de ruina disminuye. Por otro lado la probabilidad de ruina tipo parisino es menor que la ruina clásica.

Conclusiones

- La probabilidad de no arruinarse aumenta considerablemente al considerar la definición de ruina tipo parisino, comparado con la de ruina clásica. En los ejemplos, pudimos observar que si permitimos que la compañía aseguradora siga funcionado por un tiempo no muy grande, esto hace disminuir la probabilidad de ruina, lo cual es interés para una compañía aseguradora.

- Con la nueva definición de ruina, el modelo es mas razonable y real, y a pesar de que las identidades para la probabilidad de ruina parecen ser mas complicadas, estas se pueden calcular computacionalmente.

- También, presentamos las expresiones de la transformada de Laplace para el tiempo de ruina tipo parisino, así como la de la variable aleatoria que representa el tiempo en que el proceso alcanza una barrera positiva, y de ahí obtenemos los tiempos esperados, tanto el de la ruina como el de alcanzar un cierto capital positivo.

- Cabe mencionar que, el hecho de que las identidades estén en términos de funciones q-escala, hace mas complicado la obtención de los cálculos explícitos, ya que, como se mencionó anteriormente, no es una tarea fácil, en muchos casos, encontrar expresiones explicitas para dichas funciones q-escala, pero no está del todo mal, ya que estas funciones siempre se pueden aproximar.

Bibliografía

[1] A.M. Cohen. *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion.* vol 5 of Numerical Methods and Algorithms. Springer, 2007.

[2] A. Kuznetsov. *Wiener-Hopf factorization and distribution of extreme for a family of Lévy processes.* Ann. Appl. Prob., 20(5):1801-1830, 2010.

[3] A. Kuznetsov. *Wiener-Hopf factorization for a family of Lévy processes related to theta functions.* J. Appl. Prob., 47(4):1023-1033, 2010.

[4] A. Kuznetsov, M. Morales. *Computing the finite-time expected discounted penalty function for a family of Lévy risk processes.* Appl. Probab., 2011.

[5] A. Kuznetsov, A.E. Kyprianou, and J.C. Pardo. *Meromorphic Lévy processes and their fluctuation identities.* Ann. Appl. Probab., to appear, 2010.

[6] A. kuznetsov, A.E. Kyprianou and V. Rivero. *The Theory of Scale Functions for Spectrally Negative Lévy Processes.* Lecture Notes in Mathematics 2013, pp 97-186. Springer, 2012.

[7] A.E. Kyprianou. *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications.* Springer, 2006.

[8] A.E. Kyprianou. *Notes on Gerber-Shiu Risk Theory.* University of Bath, 2012.

[9] E. Biffis and A.E. Kyprianou. *A note on scale functions and the time value of ruin for Lévy insurance risk processes.* Insurance Math. Econom., 46(1):85–91, 2010.

[10] B. De Finetti. *Su Un'impostazione Alternativa dell Teroia Collettiva del Rischio.* Transactions of the XVth International Congress of Actuaries 2, 433-443, 1957.

[11] D. Hernández Rangel. *Métodos Combinatorios en la Teoría de Ruina.* Trabajo Presentado para el III Premio de la Investigación en Seguros y Fianzas, 1996.

[12] K. Borch. *The Mathematical Theory of Insurance.* Lexington Books. London, 1974.

[13] D. Landriault, J. Renaud, X. Zhou. *Insurance Risk Models whit Parisian Implementation Delays.* Methodol Comput Appl Probab, 2012.

[14] E. T. Kolkovska, J. A. López-Mimbela, J. Villa Morales. *Occupation Measure and Local Time of Classical Risk Processes.* Centro de Investigación en Matemáticas. Insurance Math. Econom., 2005

[15] H. Cramér. *On the Mathematical Theory of Risk.* Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1930.

[16] Li and J. Garrido. *On Ruin for the Erlang(n) Risk Process .* Insurance Math. Econom., 2004.

[17] M. Chesney, M. Jeanblanc-Picqué, and M. Yor. Brownian excursions and Parisian barrier options. Adv. in Appl. Probab., 29(1):165–184, 1997.

[18] M. Metivier, J. Pellaumail. *Stochastic Integration.* Academic Press, 1980.

[19] H. Moreno. *Optimalidad de la Estrategia de Barrera en el Problema de Dividendos de De Finetti para Procesos de Lévy Espectralmente Negativos y Métodos Numéricos.* Tesis de Maestría, CIMAT, 2010.

[20] J.C. Pardo. *Notas de Introducción a Medidas Aleatorias de Poisson.* CIMAT, 2012.

[21] K. Sato. *Lévy processes and infinite divisibility.* Cambridge University Press, 1999.

[22] Core Team (2013). *R: A language and environment for statistical computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL http://www.R-project.org/.