Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

Representación de Medidas de Riesgo Monetario Dinámicas, Convexas y Consistentes en el Tiempo: Caso Discreto

T E S I N A

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias con Especialidad en Probabilidad y Estadística

P r e s e n t a

Juan Antonio Salazar Vargas

Director de Tesina:

Dr. Daniel Hernández Hernández

Guanajuato, Gto., Julio de 2010

A Aracely, Sofía y Diego

Agradecimientos

Mi más profunda gratitud vaya al Dr. Daniel Hernández por su guía, consejos y paciencia para la realización de este trabajo.

Le doy un agradecimiento infinito al pueblo mexicano, que a través del CONACYT solventó mis estudios de maestría con la beca número 224579, lo cual permitió que concentrara mis esfuerzos en el estudio.

Agradezco a toda la comunidad del CIMAT. En especial al cuerpo académico del área de probabilidad y estadística, por compartir sus conocimientos y enseñarme varias formas de deleitarme con estas disciplinas.

Agradezco cariñosamente a mis padres, quienes me han ayudado en todo momento, desde siempre.

Mi más amorosa gratitud a mi esposa, por su apoyo incondicional, su comprensión, su tiempo y por el amor que aún en la distancia me hace sentir.

A mi hija le doy el más enternecedor agradecimiento, pues sin importar su corta edad, supo comprenderme durante las largas ausencias.

Gracias a los amigos que hice en Guanajuato, por haber convergido nuestros caminos este tiempo, por compartir sus bríos y sus personas.

Contenido

1 Introducción 1

2 Medidas de riesgo dinámicas para variables aleatorias acotadas 5

2.1 Generadores 7

2.2 Dualidad 8

2.3 Ejemplos 21

2.3.1 Medida de Riesgo del Peor Caso Dinámica 21

2.3.2 Medida de Riesgo Entrópico Dinámica 22

2.3.1 Valor en Riesgo Promedio Dinámico 23

3 Medidas de riesgo dinámicas para procesos estocásticos acotados 26

3.1 Agregadores y generadores 27

3.2 Dualidad 29

3.3 Generadores compuestos 35

3.3.1 Medidas de riesgo que dependen solamente del valor final 37

3.3.2 Medidas de riesgo que dependen de un promedio ponderado sobre el tiempo 38

Apéndices

A. El supremo esencial de una familia de variables aleatorias 39

B. Esperanza condicional para variables aleatorias no negativas no necesariamente integrables 40

C. Intercambiando esperanza condicional e ínfimo esencial 44

D. Elementos necesarios de análisis convexo 44

Bibliografía y referencias 49

1 Introducción

Desde hace unos 60 años se ha estado desarrollando la teoría del riesgo financiero al observarse la pertinencia de no sólo estudiar el rendimento de una posición financiera sino también el riesgo que conlleva. Para su cuantificación confluyen las teorías de economía, actuaría, estadística y probabilidad, lo que ha proporcionado un ambiente fértil para el surgimiento de una multitud de medidas de riesgo. Además de las métricas clásicas heredadas de la teoría de inversión, tales como la desviación estándar del rendimiento, nuevas familias de medidas han surgido en la gestión del riesgo, como el valor en riesgo o déficit previsto. En el trabajo publicado en 2009 por Lleo [11], se presenta un estudio detallado del desarrollo de la gestión del riesgo así como de las medidas más comunes tanto en la literatura como en la práctica.

La importancia del análisis y medición del riesgo se volvió más evidente a partir de la crisis acontecida en 2008 en donde la sobreexposición al riesgo de ciertos agentes económicos desató un efecto demoledor en la economía mundial. Vale decir que también se retomó conciencia hacia una adecuada regulación del sector financiero que implicaría, entre otras muchas cosas, un eficaz funcionamiento de las instituciones supervisoras.

La manera más asequible para medir el riesgo en finanzas es a través de la modelación matemática del mercado financiero en primera instancia y, posteriormente, definir allí las medidas de riesgo para finalmente aplicarlas en la realidad.

Para ser más concisos, consideremos un mercado financiero con $d+1$ activos, mismos que pueden consistir, por ejemplo, de acciones, bonos, divisas o productos básicos. En el más simple de los modelos, el modelo de un periodo, estos activos son valuados al tiempo inicial $t=0$ y al tiempo final $t=1$. Suponemos que el i-ésimo activo tiene un precio inicial $\pi^i \geq 0$ al tiempo 0. Los precios al tiempo 1 usualmente son desconocidos al tiempo 0. Para modelar tal incertidumbre, fijamos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y describimos los precios de los activos al tiempo 1 como variables aleatorias no negativas $S^0, S^1, ..., S^d$. El espacio muestral Ω consiste de todos los posibles *escenarios* de la evolución del mercado.

En un mercado financiero real no sólo se tienen valores primarios, sino también activos secundarios o derivados, que resultan de combinaciones no lineales de los activos primarios. Para modelar estos valores decimos que un derivado C sobre $S^0, S^1, ..., S^d$ es una función $\sigma(S^0, S^1, ..., S^d)$-medible, es decir, $C = f(S^0, S^1, ..., S^d)$ donde f es función medible sobre $\mathbb{R}^{d+1}$.

Por otro lado, un agente económico es una persona que participa en el mercado financiero a través de un portafolio de inversiones, es decir, de la cantidad de valores primarios y derivados de cada tipo que compre o venda. Una *posición finaciera* para un agente económico será descrita por una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ donde X es el valor neto descontado de la posición al final de periodo; es decir, la variable aleatoria X modela el rendimiento traído a valor presente (o perfil de pago decontado) del portafolio del agente menos el precio que pagó inicialmente por el mismo. Aunque este rendimiento depende de los activos sobre los que se hace el portafolio, para nuestras metas, no nos detendremos en el comportamiento de sus respectivos precios, sino, emprenderemos nuestro estudio suponiendo que conocemos X.

El propósito de las medidas de riesgo monetario es precisamente cuantificar el riesgo de la posición financiera X por medio de una cantidad $\rho(X)$, donde X pertenece a cierta clase de posiciones $\mathcal{X}$. Generalmente se dice que una posición X es aceptable si $\rho(X)$ no supera cierta cota dada. Desde el punto de vista de una agencia supervisora esto tiene un significado monetario. Bajo su perspectiva, una medida de riesgo es vista como un requerimiento de capital: Buscámos la mínima cantidad de dinero que, si se añade a la posición y se invierte de manera no riesgosa, hace que la posición se vuelva aceptable. Esta interpretación monetaria es capturada en la *propiedad de traslación* que se verá en la Sección 2.

Las *medidas monetarias de riesgo coherentes* fueron presentadas por Artzner, Delbaen, Eber y Heath en 1999 [1], al enunciar cuatro propiedades básicas que debería cumplir cualquier medida de riesgo razonable. Al modificar uno de estos axiomas de coherencia, nacen las *medidas de riesgo monetario convexas*. Föllmer y Schied en 2002 [8] fueron pioneros en su estudio. Además, en el Capítulo 4 del texto de los mismos Föllmer y Schied [9] se hace un estudio de las medidas de riesgo monetario. En particular, la Sección 4.3 se enfoca a la clase de medidas convexas cuando $\mathcal{X}$ es el espacio $L^{\infty} := L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, llegándose a un resultado de representación robusta: Toda medida de riesgo convexa ρ continua por arriba cumple

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left(E_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha^{\min}(\mathbb{Q}) \right), \qquad X \in L^{\infty},$$

donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de medidas de probabilidad absolutamente continuas con respecto a $\mathbb{P}$ y la función $\alpha^{\min}$ está dada por

$$\alpha^{\min}(\mathbb{Q}) := \sup_{X\in L^{\infty}} \left(E_{\mathbb{Q}}[-X] - \rho(X) \right), \qquad \mathbb{Q} \in\mathcal{P}.$$

La función $\alpha^{\min}$ se conoce como función de penalización mínima.

La representación arriba mencionada está ligada al área del análisis funcional conocida como análisis convexo, en particular con la *transformación de Fenchel-Legendre* que se da para funciones duales, de allí que a veces se le determine como representación dual. La importancia de la misma es poder definir de manera sencilla medidas de riesgo a partir de otras funciones que son de interés particular. Ver por ejemplo Capítulo 4.4 de [9].

Sin embargo, el aspecto temporal en estos enfoques es estático, lo que significa que las medidas de riesgo no dan cabida a los posibles elementos dinámicos, como la disponibilidad de información adicional, la necesidad de un seguimiento permanente de los riesgos o la aparición de pagos intermedios. Lo anterior motiva naturalmente una generalización que permita tratar con dichos elementos.

El propósito del presente trabajo es estudiar de manera detallada una extensión dinámica de las medidas de riesgo en tiempo discreto propuesta en el trabajo de Cheridito y Kupper de 2009

[3]. Dicha extensión tiene la importancia de explicar cómo a partir de la información que se va teniendo con el tiempo, va cambiando la medida que se le da a una posición, además de incorporar funciones de penalización aleatorias de un paso. No nos enfocaremos en dar condiciones para la existencia de las medidas de riesgo, sino en hallar representaciones duales.

Si la información adicional en un tiempo intermedio t se describe por medio de una sub σ-álgebra $\mathcal{F}_t$ de la información total $\mathcal{F}$, entonces una *medida de riesgo monetario condicional* es una función que asocia a cada posición finaciera X una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible $\rho(X)$, que representa el riesgo condicional de X y es interpretado como un requerimiento de capital. Por sencillez vamos a tratar sólo con posiciones en L^∞. El conjunto de las *medidas de riesgo monetario convexas condicionales* se define de manera natural al generalizar los axiomas de convexidad. Una *medida de riesgo monetario dinámica convexa condicional* se define como una sucesión de medidas de riesgo monetario convexas condicionales. Después se define el concepto de consistencia en el tiempo para tales medidas. Se demuestra que existe una representación robusta para las medidas de riesgo monetario dinámicas, convexas, condicionales, consistentes en el tiempo y continuas por abajo en términos de composiciones de funciones de penalización de un paso y se desarrollan expícitamente dichas representaciones para el Valor en Riesgo promedio dinámico y la medida de riesgo entrópico dinámica. A diferencia del caso estático, dichas medidas de riesgo dinámicas no son funciones con dominio en los reales, lo que impide que los resultados de convexidad dual se apliquen de manera directa.

Posteriormente se trabaja con $\mathcal{R}^\infty$, el espacio de los procesos estocásticos esencialmente acotados adaptados con respecto a una filtración del espacio de probabilidad. Aquí las *medidas de riesgo monetario convexas para procesos estocásticos acotados* surgen al generalizar los axiomas de las medidas de riesgo monetario dinámicas convexas para variables aleatorias y tienen la particularidad que sólo dependen del riesgo presente y futuro. La ventaja que nos ofrece trabajar en este marco más general, es que ahora los objetos con riesgo son procesos estocásticos y esto permite modelar flujos de efectivo acumulado. Para este caso se generaliza en concepto de consistencia en el tiempo. Después se demuestra que también existe una representación dual en términos de funciones de penalización de un paso. Finalmente, al estudiar los generadores compuestos se obtienen representaciones de medidas que sólo dependen del último estado del proceso y otras que dependen de la trayectoria del mismo a partir del tiempo presente.

Muchos de los conceptos del presente trabajo no son nuevos. La idea de tomar sucesiones de medidas de riesgo monetario dinámicas condicionales como sucesiones de medidas de riesgo condicionales puede encontrarse, por ejemplo, en los trabajos de Cheridito, Delbaen y Kupper de 2004 [4] o de Detlefsen y Scandolo de 2005 [5]. El carácter innovador de las representaciones obtenidas en el trabajo abordado es que están dadas en términos de composiciones simples de funciones de penalización de un paso en el dual. La aportación propia consiste en el detallamiento de las demostraciones planteadas en [3], la inclusión de resultados adicionales para un mejor entendimiento, así como la anexión de nuevos ejemplos.

El trabajo está estructurado de la siguiente forma. En la Sección 2 se definen las medidas de riesgo monetario dinámicas convexas condicionales para posiciones financieras, se difine consistencia en el tiempo y se estudian las representaciones duales. Luego en la Sección 3, al modelar flujos de efectivo por procesos estocásticos esencialmente acotados se hace la generalización respectiva de medidas de riesgo y se obtienen representaciones duales para las medidas que cumplen ser consistentes en el tiempo. Los apéndices se incluyen para faciliar la lectura del trabajo y hacerlo autocontenible. En el Apéndice A se analiza el concepto de supremo esencial, primordial para el desarrollo de esta tesina. El Apéndice B está dedicado a un breve estudio de la generalización del concepto de esperanza condicional para variables aleatorias positivas pero que no cumplen la condición de integrabilidad, esencial en la definición clásica de esperanza condicional. El Apéndice C es breve; trata de una condición particular bajo la cual se puede realizar un intercambio entre esperanza condicional e ínfimo esencial. Por último, el Apéndice D está dedicado al estudio de conceptos y resultados de análisis funcional usados en las demostraciones del trabajo.

2 Medidas de riesgo monetario dinámicas para variables aleatorias acotadas

Fijemos un horizonte de tiempo finito $T \in \mathbb{N}$ y sea $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T}, \mathbb{P}\right)$ un espacio de probabilidad filtrado tal que $\mathbb{P}[A] \in \{0,1\}$ para todo $A \in \mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. La medida $\mathbb{P}$ no se entiende como una medida de probabilidad física, sino como la medida de referencia que especifica los eventos nulos. Igualdades y desigualdades entre variables aleatorias así como inclusiones de eventos son entendidos en el sentido $\mathbb{P}$ casi seguramente. Como es usual, $L^\infty(\mathcal{F}_t)$ es el espacio de variables aleatorias $\mathcal{F}_t$-medibles y esencialmente acotadas. Denotaremos por $\mathcal{P}$ al conjunto de todas las medidas de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ que son absolutamente continuas respecto a $\mathbb{P}$.

En esta sección los objetos con riesgo son posiciones financieras al tiempo T modeladas por el conjunto $L^\infty(\mathcal{F}_T)$. Asumiremos que hay una cuenta en el mercado de dinero y la usaremos como numeraire, esto es, el dinero en tiempos posteriores está expresado como múltiplos del valor de un peso puesto en el mercado de dinero al tiempo 0. Una medida de riesgo monetario condicional al tiempo t es un función $\rho_t : L^\infty(\mathcal{F}_T) \to L^\infty(\mathcal{F}_t)$, donde $\rho_t(X)$ es interpretado como un requerimiento de capital al tiempo t para la posición financiera X condicionado a la información contenida en $\mathcal{F}_t$. Por brevedad, de aquí en adelante omitiremos el calificativo condicional, quedándose sobrentendido.

Definición 1 *Sea $t \in \{0, ..., T\}$. Decimos que una función $\rho_t : L^\infty(\mathcal{F}_T) \to L^\infty(\mathcal{F}_t)$ es* medida de riesgo monetario al tiempo t*, si satisface las siguientes propiedades:*

***(N) Normalización**: $\rho_t(0) = 0$.*

***(M) Monotonía**: $\rho_t(Y) \leq \rho_t(X)$, para cualesquiera $X, Y \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$ tales que $X \leq Y$.*

***(T) Propiedad de traslación**: $\rho_t(X + m) = \rho_t(X) - m$, para todo $X \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$ y $m \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$.*

Decimos además que es $\mathcal{F}_t$-convexa (por brevedad convexa) si satisface

***(C) $\mathcal{F}_t$-Convexidad**: $\rho_t(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda \rho_t(X) + (1-\lambda)\rho_t(Y)$, con $X, Y \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$ y $\lambda \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$.*

Una medida de riesgo monetario dinámica *es una familia de medidas de riesgo monetario $(\rho_t)_{t=0}^{T}$.*

Las propiedades requeridas tienen los siguientes significados en términos financieros:

(N) Si un agente no se expone al riesgo y su inversión consiste en poner todo su capital en la cuenta de banco que se usa como numeraire, entonces su perfil de pago es idénticamente 0 y es natural que no se le requiera ningún capital.

(M) Para que una posición X tenga menor riesgo, basta aumentar su perfil de pago.

(T) Si a una posición X se le agrega capital y se invierte de manera no riesgosa, entonces el requerimiento de capital debe reducirse en ese mismo monto.

(C) Es el principio de diversificación: El invertir en diferentes activos no debe aumentar el riesgo.

Observación 1 *Las propiedades (M) y (T) implican la siguiente*
(PL) Propiedad local

$$\rho_t\left(\mathbf{1}_A X+\mathbf{1}_{A^\complement} Y\right)=\mathbf{1}_A \rho_t(X)+\mathbf{1}_{A^\complement} \rho_t(Y)$$

para todo $X, Y \in L^{\infty}(\mathcal{F}_T)$ *y* $A \in \mathcal{F}_t$.

En efecto, por las propiedades de traslación y monotonía tenemos para toda $Z \in L^{\infty}(\mathcal{F}_T)$

$$\begin{aligned}
\rho_t(\mathbf{1}_A Z)-\mathbf{1}_{A^\complement}\|Z\|_{\infty} &= \rho_t\left(\mathbf{1}_A Z+\mathbf{1}_{A^\complement}\|Z\|_{\infty}\right) \leq \rho_t(Z) \\
&\leq \rho_t\left(\mathbf{1}_A Z-\mathbf{1}_{A^\complement}\|Z\|_{\infty}\right)=\rho_t(\mathbf{1}_A Z)+\mathbf{1}_{A^\complement}\|Z\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Luego, multiplicando toda la expresión anterior por $\mathbf{1}_A$ obtenemos

$$\mathbf{1}_A \rho_t(Z)=\mathbf{1}_A \rho_t(\mathbf{1}_A Z).$$

Ahora, poniendo $Z=\mathbf{1}_A X+\mathbf{1}_{A^\complement} Y$ tenemos

$$\mathbf{1}_A \rho_t(Z)=\mathbf{1}_A \rho_t(\mathbf{1}_A X)=\mathbf{1}_A \rho_t(X).$$

Análogamente podemos concluir

$$\mathbf{1}_{A^\complement} \rho_t(Z)=\mathbf{1}_{A^\complement} \rho_t\left(\mathbf{1}_{A^\complement} Y\right)=\mathbf{1}_{A^\complement} \rho_t(Y),$$

y sumando las últimas dos igualdades implicamos (PL).

Definición 2 *Decimos que una medida de riesgo monetario dinámica* $(\rho_t)_{t=0}^{T}$ *es consistente en el tiempo* ***(CT)*** *si*

$$\rho_{t+1}(X) \geq \rho_{t+1}(Y) \qquad \textit{implica} \qquad \rho_t(X) \geq \rho_t(Y)$$

para todo $X, Y \in L^{\infty}(\mathcal{F}_T)$ *y* $t=0, \ldots, T-1$.

La definición anterior tiene la interpretación directa de que si al tiempo $t+1$ una posición X es preferible a otra posición Y entonces esto mismo debe ocurrir al tiempo t.

Debido a las propiedades (M),(T) y (N), la propiedad de consistencia en el tiempo es equivalente al *principio de programación dinámica*

$$\rho_t(X)=\rho_t\left(-\rho_{t+1}(X)\right) \qquad \text{para todo } X \in L^{\infty}(\mathcal{F}_T) \text{ y } t=0, \ldots, T-1. \tag{1}$$

En efecto, si $(\rho_t)_{t=0}^{T}$ es consistente en el tiempo, observando que $\rho_{t+1}(X) \in L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1})$ y usando (N) y (T)

$$\rho_{t+1}(X)=\rho_{t+1}(0)+\rho_{t+1}(X)=\rho_{t+1}\left(0-\rho_{t+1}(X)\right)=\rho_{t+1}(-\rho_{t+1}(X)).$$

Luego, se cumple $\rho_{t+1}(X) \geq \rho_{t+1}(-\rho_{t+1}(X))$ y por (CT)

$$\rho_t(X) \geq \rho_t(-\rho_{t+1}(X)).$$

Y análogamente con la desigualdad restante $\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(-\rho_{t+1}(X))$ se obtiene

$$\rho_t(X) \leq \rho_t(-\rho_{t+1}(X)).$$

Juntando las dos desigualdades obtenidas concluimos la necesidad.

Para la suficiencia, supongamos que $\rho_{t+1}(X) \geq \rho_{t+1}(Y)$. Entonces por (M)

$$\rho_t\left(-\rho_{t+1}(X)\right) \geq \rho_t\left(-\rho_{t+1}(Y)\right)$$

y usando el principio de programación dinámica llegamos a $\rho_t(X) \geq \rho_t(Y)$.

2.1 Generadores

Para una medida de riesgo monetario dinámica y consistente en el tiempo $(\rho_t)_{t=0}^T$, denotaremos por φ_t la restricción de ρ_t a $L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ y diremos que $(\varphi_t)_{t=0}^{T-1}$ es el generador de $(\rho_t)_{t=0}^T$.

Sean $(\rho_t)_{t=0}^T$ y $(\theta_t)_{t=0}^T$ dos medidas de riesgo monetario dinámicas y consistentes en el tiempo tales que tienen el mismo generador $(\varphi_t)_{t=0}^{T-1}$ y sea $X \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$.

- Por (T) y (N) tenemos
$$\rho_T(X) = \rho_T(0 + X) = -X.$$
Lo mismo cumple θ_T, y por lo tanto $\rho_T = \theta_T$.

- Supongamos que $\rho_{t+1} = \theta_{t+1}$ para $t+1 \leq T$. Luego por (1) y usando que $\rho_{t+1}(X), \theta_{t+1}(X) \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$
$$\begin{aligned} \rho_t(X) &= \rho_t\left(-\rho_{t+1}(X)\right) = \varphi_t\left(-\rho_{t+1}(X)\right) \\ &= \varphi_t\left(-\theta_{t+1}(X)\right) = \theta_t\left(-\theta_{t+1}(X)\right) = \theta_t(X). \end{aligned}$$

Se sigue de los puntos anteriores que una medida de riesgo monetario dinámica y consistente en el tiempo está unívocamente determinada por su generador.

Ahora, si se empieza con una familia arbitraria

$$\varphi_t : L^\infty(\mathcal{F}_{t+1}) \to L^\infty(\mathcal{F}_t)$$

de funciones de riesgo monetario (es decir, que cumplan (N),(T) y (M) pero con dominio restringido a $L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$) y se define inductivamente hacia atrás para $X \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$

$$\begin{aligned} \rho_T(X) &:= -X \\ \rho_t(X) &:= \varphi_t\left(-\rho_{t+1}(X)\right), \qquad t \leq T-1, \end{aligned}$$

se tiene que $(\rho_t)_{t=0}^T$ es medida de riesgo monetario dinámica y consistente en el tiempo. En efecto, se sigue de esta definición que $\rho_t : L^\infty(\mathcal{F}_T) \to L^\infty(\mathcal{F}_t)$ para todo $t = 0, ..., T$. Además se tiene que:

(N): $\rho_T(0) = 0$, y suponiéndolo cierto para $t + 1 \leq T$, entonces

$$\rho_t(0) = \varphi_t\left(-\rho_{t+1}(0)\right) = 0.$$

(M): Si $X, Y \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$ y $X \geq Y$, claramente $\rho_T(X) \leq \rho_T(Y)$. Si la afirmación es cierta para $t + 1 \leq T$, entonces

$$\rho_t(X) = \varphi_t\left(-\rho_{t+1}(X)\right) \leq \varphi_t\left(\rho_{t+1}(Y)\right) = \rho_t(Y).$$

(T): Si $X \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$ y $m \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$, por definición $\rho_T(X + m) = \rho_T(X) - m$. Supongamos que se cumple para $t + 1 \leq T$, luego

$$\begin{aligned} \rho_t(X + m) &= \varphi_t\left(-\rho_{t+1}(X + m)\right) = \varphi_t\left(-\rho_{t+1}(X) + m\right) \\ &= \varphi_t\left(-\rho_{t+1}(X)\right) - m = \rho_t(X) - m. \end{aligned}$$

(CT): Si $X \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$ y $t = 0, ..., T - 1$, se tiene

$$\begin{aligned} \rho_t\left(-\rho_{t+1}(X)\right) &= \varphi_t\left(-\rho_{t+1}\left(-\rho_{t+1}(X)\right)\right) \\ &= \varphi_t\left(-\rho_{t+1}\left(0 - \rho_{t+1}(X)\right)\right) = \varphi_t\left(-\rho_{t+1}(X)\right) = \rho_t(X). \end{aligned}$$

Por último, es claro que cada ρ_t es convexa si y sólo si cada ρ_t lo es.

2.2 Dualidad

Dado es un espacio vectorial E, se dice que una función convexa $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una *función convexa propia* si $f(x) < \infty$ para algún $x \in E$. Una transformación muy conocida en análisis funcional es la *transformada de Fenchel-Legendre* f^* sobre el espacio dual E' que se define por

$$f^*(l) := \sup_{x \in E} \left(l(x) - f(x)\right) \tag{2}$$

para todo $l \in E'$. Cuando f es una función convexa propia entonces es común decir que f^* es la *función conjugada* de f.

Se tiene también este resultado fundamental de dualidad

Teorema 3 *Sea f una función convexa propia sobre un espacio localmente convexo E. Si f es semicontinua por abajo con respecto a la topología $\sigma(E, E')$ entonces $f = f^{**}$.*

Refiérase, por ejemplo, a [15] Teorema 2.3.3, para su demostración. En el Apéndice D se encuentran los conceptos y resultados de análisis funcional usados en el trabajo.

En el desarrollo de esta sección se darán representaciones para medidas de riesgo monetario dinámicas en términos de funciones de penalización de un paso, que tendrán la forma (2) y además se verificará un resultado de dualidad semejante al Teorema 3, por ello el título de esta parte del trabajo.

Para realizar lo afirmado necesitamos de los conjuntos de densidades de transición de un paso

$$\mathcal{D}_t := \left\{\xi \in L^1_+(\mathcal{F}_t) : E_{\mathbb{P}}\left[\xi \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] = 1\right\}, \qquad t = 1, ..., T.$$

Toda sucesión $(\xi_1, ..., \xi_T) \in \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_T$ define una medida de probabilidad $\mathbb{Q}^\xi \in \mathcal{P}$ con densidad

$$\frac{d\mathbb{Q}^\xi}{d\mathbb{P}} = \xi_1 \cdots \xi_T.$$

Por otro lado, toda medida de probabilidad $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$ induce una martingala no negativa

$$M_t^{\mathbb{Q}} := E_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t\right], \qquad t = 0, ..., T.$$

Luego se tiene

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}\left[M_t^{\mathbb{Q}} \mathbf{1}_{\left\{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}=0\right\}}\right] &= E_{\mathbb{P}}\left[\mathbf{1}_{\left\{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}=0\right\}} E_{\mathbb{P}}\left[M_t^{\mathbb{Q}} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right]\right] \\ &= E_{\mathbb{P}}\left[\mathbf{1}_{\left\{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}=0\right\}} M_{t-1}^{\mathbb{Q}}\right] = 0. \end{aligned}$$

Concluimos por lo tanto que

$$\left\{M_{t-1}^{\mathbb{Q}} = 0\right\} \subset \left\{M_t^{\mathbb{Q}} = 0\right\}, \qquad t = 1, ..., T. \tag{3}$$

Definimos la sucesión

$$\xi_t^{\mathbb{Q}} := \frac{M_t^{\mathbb{Q}}}{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}} \mathbf{1}_{\left\{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}>0\right\}} + \mathbf{1}_{\left\{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}=0\right\}}, \qquad t = 1, ..., T.$$

El siguiente resultado nos dice que toda medida $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$ es generada por el mismo vector que ella induce en $\mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_T$. Es decir, hay una sobreyección de $\mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_T$ a $\mathcal{P}$.

Proposición 4 *Sean $\mathbb{Q} \in \mathbb{P}$ y $\xi_t^{\mathbb{Q}}$ definida como arriba. Entonces el vector $\left(\xi_1^{\mathbb{Q}}, ..., \xi_T^{\mathbb{Q}}\right)$ es elemento de $\mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_T$ y además genera a la medida $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Observamos que si $k > k' > 0$ tenemos

$$\frac{M_t^{\mathbb{Q}}}{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}} \mathbf{1}_{\left\{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}>k\right\}} \leq \frac{M_t^{\mathbb{Q}}}{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}} \mathbf{1}_{\left\{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}>k'\right\}}.$$

Entonces por el teorema de convergencia monótona y observando que $0 \leq \frac{M_t^{\mathbb{Q}}}{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}} \mathbf{1}_{\left\{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}>k\right\}} \leq \frac{1}{k} M_t^{\mathbb{Q}} \in$

$L^1_+(\mathcal{F}_t)$ se dan las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} 0 &\leq E_{\mathbb{P}}\left[\xi_t^{\mathbb{Q}}\right] = E_{\mathbb{P}}\left[\lim_{k\downarrow 0}\left(\frac{M_t^{\mathbb{Q}}}{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}}\mathbf{1}_{\left\{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}>k\right\}} + \mathbf{1}_{\left\{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}=0\right\}}\right)\right] \\ &= \lim_{k\downarrow 0} E_{\mathbb{P}}\left[\frac{M_t^{\mathbb{Q}}}{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}}\mathbf{1}_{\left\{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}>k\right\}}\right] + \mathbb{P}\left[M_{t-1}^{\mathbb{Q}} = 0\right] \\ &\leq \lim_{k\downarrow 0} E_{\mathbb{P}}\left[E_{\mathbb{P}}\left[\frac{M_t^{\mathbb{Q}}}{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}}\mathbf{1}_{\left\{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}>k\right\}}\right] \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] + 1 \\ &= \lim_{k\searrow 0} \mathbb{P}\left[M_{t-1}^{\mathbb{Q}} > k\right] + 1 \leq 2. \end{aligned}$$

Es decir, $\xi_t^{\mathbb{Q}} \in L^1_+(\mathcal{F}_t),\ t = 1, ..., T$. También es claro que $E_{\mathbb{P}}\left[\xi_t^{\mathbb{Q}} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] = 1$. Por lo tanto, concluimos

$$\left(\xi_1^{\mathbb{Q}}, ..., \xi_T^{\mathbb{Q}}\right) \in \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_T, \qquad \text{para toda } \mathbb{Q} \in \mathcal{P}.$$

Ahora veremos que $\xi := \left(\xi_1^{\mathbb{Q}}, ..., \xi_T^{\mathbb{Q}}\right)$ genera a la medida $\mathbb{Q}$. En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{Q}^{\xi}}{d\mathbb{P}} &= \xi_1^{\mathbb{Q}} \cdots \xi_T^{\mathbb{Q}} \\ &= \prod_{t=1}^{T}\left(\frac{M_t^{\mathbb{Q}}}{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}}\mathbf{1}_{\left\{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}>k\right\}} + \mathbf{1}_{\left\{M_{t-1}^{\mathbb{Q}}=0\right\}}\right) \\ &= \frac{M_T^{\mathbb{Q}}}{M_0^{\mathbb{Q}}}\mathbf{1}_{\left\{M_{T-1}^{\mathbb{Q}}>k\right\}} + \mathbf{1}_{\left\{M_0^{\mathbb{Q}}=0\right\}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Como $M_0^{\mathbb{Q}}$ es $\mathcal{F}_0$-medible y por hipótesis general $\mathcal{F}_0$ es σ-álgebra casi trivial con respecto a $\mathbb{P}$, entonces $M_0^{\mathbb{Q}} = c$ $\mathbb{P}$-c.s., para alguna constante c. Verificaremos que $c = 1$. Sea $A \in \mathcal{F}_0$, entonces

$$\int_A M_0^{\mathbb{Q}} d\mathbb{P} = \int_A E_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_0\right] d\mathbb{P} = \int_A \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} = \mathbb{Q}(A) \qquad \text{y} \qquad \int_A M_0^{\mathbb{Q}} d\mathbb{P} = c\mathbb{P}(A).$$

Es decir, se debe satisfacer

$$\mathbb{Q}(A) = c\mathbb{P}(A), \qquad \text{para todo } A \in \mathcal{F}_0.$$

Debido a que $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ para todo $A \in \mathcal{F}_0$ y al ser $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$, se tiene que si $\mathbb{P}(A) = 1$ entonces $\mathbb{Q}(A) = 1$, por lo tanto $c = 1$. Con esto y usando (3), la igualdad (4) toma la forma

$$\xi_1^{\mathbb{Q}} \cdots \xi_T^{\mathbb{Q}} = \frac{d\mathbb{Q}^{\xi}}{d\mathbb{P}} = M_T^{\mathbb{Q}} = E_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_T\right] = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}.$$

■

Trabajaremos con la convención

$$E_{\mathbb{Q}}\left[X \mid \mathcal{F}_t\right] := E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1}^{\mathbb{Q}} \cdots \xi_T^{\mathbb{Q}} X \mid \mathcal{F}_t\right], \qquad X \in L^{\infty}(\mathcal{F}_T), \qquad t = 0, ..., T-1. \tag{5}$$

Esta convención es consistente con la definición estándar de la esperanza condicional, pues para $A \in \mathcal{F}_t$

$$\begin{aligned}
E_{\mathbb{Q}}\left[X\mathbf{1}_A\right] &= E_{\mathbb{P}}\left[X\mathbf{1}_A\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right]=E_{\mathbb{P}}\left[X\mathbf{1}_A\xi_1^{\mathbb{Q}}\cdots\xi_T^{\mathbb{Q}}\right] \\
&= E_{\mathbb{P}}\left[\mathbf{1}_A\xi_1^{\mathbb{Q}}\cdots\xi_t^{\mathbb{Q}}E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1}^{\mathbb{Q}}\cdots\xi_T^{\mathbb{Q}}X \mid \mathcal{F}_t\right]\right] \\
&= E_{\mathbb{P}}\left[E_{\mathbb{P}}\left[\mathbf{1}_A\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t\right]E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1}^{\mathbb{Q}}\cdots\xi_T^{\mathbb{Q}}X \mid \mathcal{F}_t\right]\right] \\
&= E_{\mathbb{P}}\left[E_{\mathbb{P}}\left[\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1}^{\mathbb{Q}}\cdots\xi_T^{\mathbb{Q}}X \mid \mathcal{F}_t\right]\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t\right]\right] \\
&= E_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1}^{\mathbb{Q}}\cdots\xi_T^{\mathbb{Q}}X \mid \mathcal{F}_t\right]\right].
\end{aligned}$$

Es decir, $E_{\mathbb{P}}\left[X\xi_{t+1}^{\mathbb{Q}}\cdots\xi_T^{\mathbb{Q}} \mid \mathcal{F}_t\right]$ es una versión de $E_{\mathbb{Q}}\left[X \mid \mathcal{F}_t\right]$ que está definida $\mathbb{Q}$-c.s. Sin embargo $E_{\mathbb{P}}\left[X\xi_{t+1}^{\mathbb{Q}}\cdots\xi_T^{\mathbb{Q}} \mid \mathcal{F}_t\right]$ está definida $\mathbb{P}$-c.s. y esto será primordial en el trabajo que se desarrollará posteriormente.

Por $\overline{L}_+(\mathcal{F}_t)$ denotaremos todas las funciones $\mathcal{F}_t$-medibles $X : \Omega \to [0,\infty]$. La esperanza condicional de $X \in \overline{L}_+(\mathcal{F}_t)$ será entendida como

$$E_{\mathbb{P}}\left[X \mid \mathcal{F}_t\right] := \lim_{n\to\infty} E_{\mathbb{P}}\left[X \wedge n \mid \mathcal{F}_t\right],$$

y se convendrá para el mismo caso

$$E_{\mathbb{P}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] = -E_{\mathbb{P}}\left[X \mid \mathcal{F}_t\right].$$

En el Apéndice B se hace un estudio del teorema de convergencia monótona, propiedad de linealidad y regla del producto que son válidos para esta esperanza condicional. Por otro lado, en el Apéndice A se estudia el concepto de *supremo esencial de una familia de variables aletorias* y el consecuente concepto de *ínfimo esencial*, los cuales denotaremos respectivamente por esssup y essinf.

Definición 5 *Para $t \in \{0,...,T-1\}$, diremos que una función*

$$\psi_t : \mathcal{D}_{t+1} \to \overline{L}_+(\mathcal{F}_t)$$

es una función de penalización de un paso *si satisface las siguientes dos condiciones:*

(i) $\operatorname*{essinf}_{\xi\in\mathcal{D}_{t+1}} \psi_t(\xi) = 0$

(ii) $\psi_t\left(\mathbf{1}_A\xi + \mathbf{1}_{A^\complement}\xi'\right) = \mathbf{1}_A\psi_t(\xi) + \mathbf{1}_{A^\complement}\psi_t(\xi')$, *para todo $\xi, \xi' \in \mathcal{D}_{t+1}$ y $A \in \mathcal{F}_t$.*

Para $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$, definimos

$$\psi_t(\mathbb{Q}) := \psi_t\left(\xi_{t+1}^{\mathbb{Q}}\right).$$

Una función de penalización dinámica *consiste de una sucesión de funciones de penalización de un paso $(\psi_t)_{t=0}^{T-1}$.*

El siguiente teorema nos proporciona una representación dual a través de la cual una función de penalización dinámica induce una medida de riesgo monetario dinámica, convexa y consistente en el tiempo. Su importancia es que a partir de una función de penalización que sea de nuestro interés por alguna interpretación económica o financiera, podremos obtener una medida de riesgo dinámica que cumpla con las propiedades (M), (T), (N) y (C), las cuales son fundamentales en los mercados financieros.

Teorema 6 *Sea $(\psi_t)_{t=0}^{T-1}$ una función de penalización dinámica. Entonces*

$$\varphi_t(X) = \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left\{ E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q}) \right\}, \qquad t = 0, ..., T-1, \qquad X \in L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1}), \tag{6}$$

define el generador de una medida de riesgo monetario dinámica, convexa y consistente en el tiempo $(\rho_t)_{t=0}^{T}$ con las siguientes representaciones

$$\begin{aligned} \rho_t(X) &= \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} E_{\mathbb{Q}}\left[-X - \sum_{j=t+1}^{T} \psi_{j-1}(\mathbb{Q}) \mid \mathcal{F}_t \right] & (7) \\ &= \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} E_{\mathbb{Q}}\left[-X - \sum_{j=t+1}^{s} \psi_{j-1}(\mathbb{Q}) \mid \mathcal{F}_t \right] & (8) \end{aligned}$$

para $0 \leq t < s \leq T$ y $X \in L^{\infty}(\mathcal{F}_s)$.

Demostración. Veamos que φ_t define el generador de una medida de riesgo monetario dinámica, convexa y consistente en el tiempo al verificar las condiciones (N), (M), (T) y (C):
(N) Sea $\xi \in \mathcal{D}_{t+1}$ y definamos la sucesión

$$\xi_k = \begin{cases} \xi, & k = t+1, \\ 1, & e.o.c. \end{cases}$$

Entonces ξ define una medida de probabilidad $\mathbb{Q}^{\xi} \in \mathcal{P}$ por $\frac{d\mathbb{Q}^{\xi}}{d\mathbb{P}} = \xi$, y

$$\begin{aligned} \xi_{t+1}^{\mathbb{Q}^{\xi}} &= \frac{M_{t+1}^{\mathbb{Q}^{\xi}}}{M_t^{\mathbb{Q}^{\xi}}} \mathbf{1}_{\left\{M_t^{\mathbb{Q}^{\xi}}>0\right\}} + \mathbf{1}_{\left\{M_t^{\mathbb{Q}^{\xi}}=0\right\}} \\ &= \frac{E_{\mathbb{P}}\left[\xi \mid \mathcal{F}_{t+1}\right]}{E_{\mathbb{P}}\left[\xi \mid \mathcal{F}_t\right]} \mathbf{1}_{\{E_{\mathbb{P}}[\xi|\mathcal{F}_t]>0\}} + \mathbf{1}_{\{E_{\mathbb{P}}[\xi|\mathcal{F}_t]=0\}} \\ &= \xi, \end{aligned}$$

usando el hecho de que $E_{\mathbb{P}}\left[\xi \mid \mathcal{F}_t\right] = 1$. Es decir, para todo $\xi \in \mathcal{D}_{t+1}$ existe $\mathbb{Q}^{\xi} \in \mathcal{P}$ tal que $\xi = \xi_{t+1}^{\mathbb{Q}}$. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi_t(0) &= \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left(-\psi_t(\mathbb{Q})\right) \\ &= \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left(-\psi_t(\xi_{t+1}^{\mathbb{Q}})\right) = \operatorname*{esssup}_{\xi\in\mathcal{D}_{t+1}} \left(-\psi_t(\xi_{t+1})\right) = 0. \end{aligned}$$

(M) Sean $X, Y \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ tales que $X \geq Y$ $\mathbb{P}$-c.s. y por tanto $\mathbb{Q}$-c.s. para toda $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$. Luego

$$E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] \leq E_{\mathbb{Q}}\left[-Y \mid \mathcal{F}_t\right],$$

y consecuentemente para toda $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \varphi_t(Y) &= \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left\{E_{\mathbb{Q}}\left[-Y \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q})\right\} \\ &\geq E_{\mathbb{Q}}\left[-Y \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q}) \geq E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Enotnces, debido a las propiedades del supremo esencial concluimos que

$$\varphi_t(Y) = \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left\{E_{\mathbb{Q}}\left[-Y \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q})\right\} \geq \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left\{E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q})\right\} = \varphi_t(X).$$

(T) Sean $X \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ y $m \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$. Entonces

$$\begin{aligned} \varphi_t(X+m) &= \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left\{E_{\mathbb{Q}}\left[-\left(X+m\right) \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q})\right\} \\ &= \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left\{E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q})\right\} - m. \end{aligned}$$

Esto último se tiene pues

$$-m + \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left\{E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q})\right\} \geq -m + E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q}) \qquad \text{para todo } \mathbb{Q} \in \mathcal{P},$$

lo cual implica

$$-m + \varphi_t(X) \geq \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left\{E_{\mathbb{Q}}\left[-\left(X+m\right) \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q})\right\}.$$

Para la otra desigualdad se observa que

$$\varphi_t\left(X+m\right) = \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left\{E_{\mathbb{Q}}\left[-\left(X+m\right) \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q})\right\} \geq E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q}) - m \qquad \text{para todo } \mathbb{Q} \in \mathcal{P},$$

lo que nos lleva a

$$\varphi_t(X+m) + m \geq \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left\{E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q})\right\} = \varphi_t(X),$$

y se tiene al igualdad.

(**C**) Sean $X, Y \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ y $\lambda \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$ con $0 \leq \lambda \leq 1$. Por definición de supremo esencial tenemos

$$\lambda\varphi_t\left(X\right) + (1-\lambda)\varphi_t\left(Y\right) \geq \lambda\left(E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q})\right) + (1-\lambda)(E_{\mathbb{S}}\left[-Y \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{S})),$$

para cualesquiera $\mathbb{Q}, \mathbb{S} \in \mathcal{P}$, que en especial se cumple cuando $\mathbb{Q} = \mathbb{S}$. Luego

$$\begin{aligned} \lambda\varphi_t\left(X\right) + (1-\lambda)\varphi_t\left(Y\right) &\geq \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left\{\lambda(E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q})) + (1-\lambda)(E_{\mathbb{Q}}\left[-Y \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\mathbb{Q}))\right\} \\ &= \varphi_t(\lambda X + (1-\lambda)Y). \end{aligned}$$

Entonces la familia $(\varphi_t)_{t=0}^{T-1}$ induce una medida de riesgo monetario dinámica, convexa y consistente en el tiempo $(\rho_t)_{t=0}^{T}$.

Por lo anterior, resta demostrar (7) y (8) para $X \in L^\infty(\mathcal{F}_s)$. Con tal motivo, sea $\widetilde{\rho}_t : L^\infty(\mathcal{F}_T) \to L^\infty(\mathcal{F}_t)$ definida como en el lado derecho de (7). Mostraremos a continuación que

$$\widetilde{\rho}_t(X) = \operatorname*{esssup}_{(\xi_{t+1},...,\xi_T)\in\mathcal{D}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_T} E_{\mathbb{P}}\left[-\left(X + \sum_{j=t+1}^{T}\psi_{j-1}(\xi_j)\right)\xi_{t+1}\cdots\xi_T \mid \mathcal{F}_t\right]. \tag{9}$$

No debemos preocuparnos de que posiblemente suceda $E_{\mathbb{P}}\left[\psi_{j-1}(\xi_j)\xi_{t+1}\cdots\xi_T\right] = \infty$, pues como señalamos antes, en el Apéndice B se justifican las propiedades de la esperanza condicional para tal caso.

Para demostrar (9), vemos que por la convención (5) tenemos

$$E_{\mathbb{Q}}\left[-X - \sum_{j=t+1}^{T}\psi_{j-1}(\mathbb{Q}) \mid \mathcal{F}_t\right] := E_{\mathbb{P}}\left[-\left(X + \sum_{j=t+1}^{T}\psi_{j-1}(\xi_j^{\mathbb{Q}})\right)\xi_{t+1}^{\mathbb{Q}}\cdots\xi_T^{\mathbb{Q}} \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Luego, para $\mathbb{Q}\in\mathcal{P}$ es claro que $(\xi_{t+1}^{\mathbb{Q}},...,\xi_T^{\mathbb{Q}}) \in \mathcal{D}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_T$ y entonces

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{esssup}_{(\xi_{t+1},...,\xi_T)\in\mathcal{D}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_T} E_{\mathbb{P}}\left[-\left(X + \sum_{j=t+1}^{T}\psi_{j-1}(\xi_j)\right)\xi_{t+1}\cdots\xi_T \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&\qquad\qquad \geq E_{\mathbb{Q}}\left[-X - \sum_{j=t+1}^{T}\psi_{j-1}(\mathbb{Q}) \mid \mathcal{F}_t\right] \qquad \text{para todo } \mathbb{Q}\in\mathcal{P}.
\end{aligned}$$

Se concluye

$$\operatorname*{esssup}_{(\xi_{t+1},...,\xi_T)\in\mathcal{D}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_T} E_{\mathbb{P}}\left[-\left(X + \sum_{j=t+1}^{T}\psi_{j-1}(\xi_j)\right)\xi_{t+1}\cdots\xi_T \mid \mathcal{F}_t\right] \geq \widetilde{\rho}_t.$$

Para tratar la otra desigualdad, sea $\widehat{\xi} := (\xi_{t+1},...,\xi_T) \in \mathcal{D}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_T$. Este vector define una medida $\mathbb{Q}^{\widehat{\xi}} \in \mathcal{P}$ dada por

$$\frac{d\mathbb{Q}^{\widehat{\xi}}}{d\mathbb{P}} = \xi_{t+1}\cdots\xi_T.$$

Luego,

$$M_r^{\mathbb{Q}^{\widehat{\xi}}} = \begin{cases} \xi_{t+1}\cdots\xi_r, & t+1 \leq r \leq T \\ 1, & 0 \leq r \leq t \end{cases}.$$

De allí que

$$\xi_r^{\mathbb{Q}^{\widehat{\xi}}} = \begin{cases} \xi_r \mathbf{1}_{\{\xi_{t+1}\cdots\xi_{r-1}>0\}} + \mathbf{1}_{\{\xi_{t+1}\cdots\xi_{r-1}=0\}}, & t+2 \leq r \leq T \\ \xi_{t+1}, & r = t+1 \\ 1, & 1 \leq r \leq t \end{cases}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\xi_{t+1}^{\mathbb{Q}^{\widehat{\xi}}} \cdots \xi_T^{\mathbb{Q}^{\widehat{\xi}}} &= \xi_{t+1} \cdots \xi_T \mathbf{1}_{\{\xi_{t+1} \cdots \xi_{T-1} > 0\}} \\
&= \xi_{t+1} \cdots \xi_T \\
&= \xi_{t+1} \cdots \xi_T \mathbf{1}_{\{\xi_{t+1} \cdots \xi_T > 0\}}.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=t+1}^{T} \psi_{j-1}(\xi_j^{\mathbb{Q}^{\widehat{\xi}}}) &= \psi_t\left(\xi_{t+1}\right) + \sum_{j=t+2}^{T} \psi_{j-1}\left(\xi_j \mathbf{1}_{\{\xi_{t+1} \cdots \xi_{j-1} > 0\}} + \mathbf{1}_{\{\xi_{t+1} \cdots \xi_{j-1} = 0\}}\right) \\
&= \psi_t\left(\xi_{t+1}\right) + \sum_{j=t+2}^{T} \mathbf{1}_{\{\xi_{t+1} \cdots \xi_{j-1} > 0\}} \psi_{j-1}\left(\xi_j\right) + \sum_{j=t+2}^{T} \mathbf{1}_{\{\xi_{t+1} \cdots \xi_{j-1} = 0\}} \psi_{j-1}\left(1\right).
\end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo los cálculos anteriores tenemos

$$\begin{aligned}
E_{\mathbb{Q}^{\widehat{\xi}}}\left[-X - \sum_{j=t+1}^{T} \psi_{j-1}(\mathbb{Q}^{\widehat{\xi}}) \mid \mathcal{F}_t\right] &= E_{\mathbb{P}}\left[-\left(X + \sum_{j=t+1}^{T} \psi_{j-1}(\xi_j^{\mathbb{Q}^{\widehat{\xi}}})\right) \xi_{t+1}^{\mathbb{Q}^{\widehat{\xi}}} \cdots \xi_T^{\mathbb{Q}^{\widehat{\xi}}} \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= E_{\mathbb{P}}\left[-\left(X + \psi_t\left(\xi_{t+1}\right) + \sum_{j=t+2}^{T} \mathbf{1}_{\{\xi_{t+1} \cdots \xi_{j-1} > 0\}} \psi_{j-1}\left(\xi_j\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. \sum_{j=t+2}^{T} \mathbf{1}_{\{\xi_{t+1} \cdots \xi_{j-1} = 0\}} \psi_{j-1}\left(1\right)\right) \xi_{t+1} \cdots \xi_T \mathbf{1}_{\{\xi_{t+1} \cdots \xi_T > 0\}} \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= E_{\mathbb{P}}\left[-\left(X + \sum_{j=t+1}^{T} \psi_{j-1}\left(\xi_j\right)\right) \xi_{t+1} \cdots \xi_T \mid \mathcal{F}_t\right]. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Es decir, para todo $\widehat{\xi} := (\xi_{t+1}, ..., \xi_T) \in \mathcal{D}_{t+1} \times \cdots \times \mathcal{D}_T$ existe una medida $\mathbb{Q}^{\widehat{\xi}} \in \mathcal{P}$ tal que (10) se satisface. Entonces se cumple que

$$\widetilde{\rho}_t(X) \geq E_{\mathbb{Q}^{\widehat{\xi}}}\left[-X - \sum_{j=t+1}^{T} \psi_{j-1}(\mathbb{Q}^{\widehat{\xi}}) \mid \mathcal{F}_t\right] = E_{\mathbb{P}}\left[-\left(X + \sum_{j=t+1}^{T} \psi_{j-1}\left(\xi_j\right)\right) \xi_{t+1} \cdots \xi_T \mid \mathcal{F}_t\right],$$

y por lo tanto

$$\widetilde{\rho}_t \geq \underset{(\xi_{t+1}, \ldots, \xi_T) \in \mathcal{D}_{t+1} \times \cdots \times \mathcal{D}_T}{\text{esssup}} E_{\mathbb{P}}\left[-\left(X + \sum_{j=t+1}^{T} \psi_{j-1}(\xi_j)\right) \xi_{t+1} \cdots \xi_T \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Con ello se tiene la igualdad planteada en (9).

Ahora bien, es claro que

$$
\begin{aligned}
& \underset{(\xi_{t+1},\ldots,\xi_T)\in\mathcal{D}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_T}{\operatorname{esssup}} E_{\mathbb{P}}\left[-\left(X+\sum_{j=t+1}^{T}\psi_{j-1}(\xi_j)\right)\xi_{t+1}\cdots\xi_T \mid \mathcal{F}_t\right] \\
= & \underset{(\xi_{t+1},\ldots,\xi_s)\in\mathcal{D}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_s}{\operatorname{esssup}} \left\{E_{\mathbb{P}}\left[-\left(X+\sum_{j=t+1}^{s}\psi_{j-1}(\xi_j)\right)\xi_{t+1}\cdots\xi_s \mid \mathcal{F}_t\right]\right. \\
& \left. + \underset{(\xi_{s+1},\ldots,\xi_T)\in\mathcal{D}_{s+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_T}{\operatorname{esssup}} -\sum_{j=s+1}^{T} E_{\mathbb{P}}\left[\psi_{j-1}(\xi_j)\xi_{t+1}\cdots\xi_{j-1} \mid \mathcal{F}_t\right]\right\}. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Vamos a demostrar por inducción sobre T que (11) es igual a cero: Fijemos un vector $(\xi_{t+1},...,\xi_s)\in\mathcal{D}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_s$. Es claro que

$$
\begin{aligned}
& \underset{(\xi_{s+1},\ldots,\xi_T)\in\mathcal{D}_{s+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_T}{\operatorname{esssup}} -\sum_{j=s+1}^{T} E_{\mathbb{P}}\left[\psi_{j-1}(\xi_j)\xi_{t+1}\cdots\xi_{j-1} \mid \mathcal{F}_t\right] \\
= & \underset{(\xi_{s+1},\ldots,\xi_T)\in\mathcal{D}_{s+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_T}{\operatorname{essinf}} \sum_{j=s+1}^{T} E_{\mathbb{P}}\left[\psi_{j-1}(\xi_j)\xi_{t+1}\cdots\xi_{j-1} \mid \mathcal{F}_t\right]. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Si $T=s+1$, entonces (11) es igual a la expresión

$$\underset{\xi_{s+1}\in\mathcal{D}_{s+1}}{\operatorname{essinf}} E_{\mathbb{P}}\left[\psi_s(\xi_{s+1})\xi_{t+1}\cdots\xi_s \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Gracias a la condición (ii) de la Definición 5 vemos que para ξ, $\xi'\in\mathcal{D}_{s+1}$ se tiene

$$\psi_t(\xi)\wedge\psi_t(\xi') = \mathbf{1}_A\psi_t(\xi)+\mathbf{1}_{A^\complement}\psi_t(\xi') = \psi_t\left(\mathbf{1}_A\xi+\mathbf{1}_{A^\complement}\xi'\right),$$

con $A=\left\{\psi_t(\xi)\geq\psi_t(\xi')\right\}$. Es decir, la familia $\{\psi_t(\xi):\xi\in\mathcal{D}_{s+1}\}$ es dirigida hacia abajo, luego por la Proposición 34 del Apéndice C y usando la propiedad (i) de la Definición 5 llegamos a

$$\underset{\xi_{s+1}\in\mathcal{D}_{s+1}}{\operatorname{essinf}} E_{\mathbb{P}}\left[\psi_s(\xi_{s+1})\xi_{t+1}\cdots\xi_s \mid \mathcal{F}_t\right] = E_{\mathbb{P}}\left[\underset{\xi_{s+1}\in\mathcal{D}_{s+1}}{\operatorname{essinf}} \psi_s(\xi_{s+1})\xi_{t+1}\cdots\xi_s \mid \mathcal{F}_t\right] = 0.$$

Por lo tanto (11) es cero en el caso $T=s+1$.

Supongamos que $T\geq s+2$ y que

$$\underset{(\xi_{s+1},\ldots,\xi_{T-1})\in\mathcal{D}_{s+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_{T-1}}{\operatorname{essinf}} \sum_{j=s+1}^{T-1} E_{\mathbb{P}}\left[\psi_{j-1}(\xi_j)\xi_{t+1}\cdots\xi_{j-1} \mid \mathcal{F}_t\right] = 0.$$

Para probar que (11) es cero, bastará demostrar que para $(\xi_{t+1},...,\xi_{T-1})\in\mathcal{D}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_{T-1}$ fijo, el término

$$\underset{\xi_T\in\mathcal{D}_T}{\operatorname{essinf}} E_{\mathbb{P}}\left[\psi_{T-1}(\xi_T)\xi_{t+1}\cdots\xi_{T-1} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

es cero. Como arriba, lo anterior se sigue pues el conjunto $\left\{\psi_{T-1}(\xi) : \xi_T \in \mathcal{D}_T\right\}$ satisface ser dirigido hacia abajo y entonces el ínfimo esencial puede ser tomado dentro de la esperanza condicional. Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\rho}_t &= \operatorname*{esssup}_{(\xi_{t+1},\ldots,\xi_T)\in\mathcal{D}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_T} E_{\mathbb{P}}\left[-\left(X+\sum_{j=t+1}^{T}\psi_{j-1}(\xi_j)\right)\xi_{t+1}\cdots\xi_T \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \operatorname*{esssup}_{(\xi_{t+1},\ldots,\xi_s)\in\mathcal{D}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_s} E_{\mathbb{P}}\left[-\left(X+\sum_{j=t+1}^{s}\psi_{j-1}(\xi_j)\right)\xi_{t+1}\cdots\xi_s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} E_{\mathbb{Q}}\left[-X-\sum_{j=t+1}^{s}\psi_{j-1}(\mathbb{Q}) \mid \mathcal{F}_t\right]. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Para demostrar esta última igualdad se usan razonamientos análogos a los necesarios para demostrar la ecuación (9).

A continuación demostraremos que $\widetilde{\rho}_t = \rho_t$ haciendo inducción sobre s. Si $s = t+1$, entonces a partir de (13) obtenemos que

$$\rho_t(X) = \varphi_t(X) = \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}}\{E_{\mathbb{Q}}[-X \mid \mathcal{F}_t] - \psi_t(\mathbb{Q})\} = \widetilde{\rho}_t, \qquad \text{para todo } X \in L^\infty(\mathcal{F}_s).$$

Ahora, supongamos que $s \geq t+2$ y $\widetilde{\rho}_t(Y) = \rho_t(Y)$ para toda $Y \in L^\infty(\mathcal{F}_{s-1})$. Si $X \in L^\infty(\mathcal{F}_s)$, entonces $\varphi_{s-1}(X) \in L^\infty(\mathcal{F}_{s-1})$, y tenemos gracias a la propiedad de programación dinámica (1) que

$$\begin{aligned}
&\rho_t(X) \\
=\ &\rho_t\left(-\varphi_{s-1}(X)\right) = \widetilde{\rho}_t(-\varphi_{s-1}(X)) \\
=\ &\operatorname*{esssup}_{(\xi_{t+1},\ldots,\xi_{s-1})\in\mathcal{D}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_{s-1}} E_{\mathbb{P}}\left[-\xi_{t+1}\cdots\xi_{s-1}\left(-\varphi_{s-1}(X)+\sum_{j=t+1}^{s-1}\psi_{j-1}(\xi_j)\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
=\ &\operatorname*{esssup}_{(\xi_{t+1},\ldots,\xi_{s-1})\in\mathcal{D}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_{s-1}} E_{\mathbb{P}}\left[-\xi_{t+1}\cdots\xi_{s-1}\operatorname*{essinf}_{\xi_s\in\mathcal{D}_s}\left\{E_{\mathbb{P}}[\xi_s X \mid \mathcal{F}_{s-1}]+\sum_{j=t+1}^{s}\psi_{j-1}(\xi_j)\right\} \mid \mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}$$

Por la condición (ii) de la Definición 5 la familia

$$\left\{E_{\mathbb{P}}[\xi_s X \mid \mathcal{F}_{s-1}] + \sum_{j=t+1}^{s}\psi_{j-1}(\xi_j) : \xi_s \in \mathcal{D}_s\right\}$$

es dirigida hacia abajo. Entonces, en la última igualdad de arriba podemos tomar el ínfimo esencial fuera de la esperanza condicional y llegar a que

$$\rho_t(X) = \operatorname*{esssup}_{(\xi_{t+1},\ldots,\xi_s)\in\mathcal{D}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{D}_s} E_{\mathbb{P}}\left[-\left(X+\sum_{j=t+1}^{s}\psi_{j-1}(\xi_j)\right)\xi_{t+1}\cdots\xi_s \mid \mathcal{F}_t\right] = \widetilde{\rho}_t(X),$$

lo cual concluye la demostración. ■

Definición 7 *Para* $0 \leq t \leq s \leq T$*, decimos que una función* $I : L^{\infty}(\mathcal{F}_s) \to L^{\infty}(\mathcal{F}_t)$ *es* continua por abajo (arriba) *si*

$$I(X^n) \to I(X) \qquad \mathbb{P} - c.s.$$

para toda sucesión $(X^n)_{n\geq 1}$ *en* $L^{\infty}(\mathcal{F}_s)$ *que crece (decrece)* $\mathbb{P}$*-c.s.a* $X \in L^{\infty}(\mathcal{F}_s)$*. Decimos que un generador* $(\varphi_t)_{t=0}^{T-1}$ *o una medida de riesgo dinámica* $(\rho_t)_{t=0}^{T}$ *sobre* $L^{\infty}(\mathcal{F}_s)$ *es continuo por abajo si todo* φ_t *o* ρ_t *son continuos por abajo, respectivamente.*

A continuación demostraremos que toda medida de riesgo monetario dinámica consistente en el tiempo con generador continuo por abajo tiene una representación de la forma (7)-(8). Pero primero necesitamos la siguiente definición y un lema.

Definición 8 *Para una medida de riesgo monetario dinámica, convexa y consistente en el tiempo* $(\rho_t)_{t=0}^{T}$ *con generador* $(\varphi_t)_{t=0}^{T-1}$ *que sea continuo por abajo definimos para todo* $t = 0, ..., T-1$*,*

$$\psi_t^{\min}(\xi_{t+1}) := \operatorname*{esssup}_{X \in L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1})} \left\{ E_{\mathbb{P}}\left[-\xi_{t+1} X \mid \mathcal{F}_t\right] - \varphi_t(X) \right\}, \qquad \xi_{t+1} \in \mathcal{D}_{t+1}.$$

Observación 2 *Usando las propiedades del supremo esencial de una familia de variables aleatorias, se verifica fácilmente que* $\psi_t^{\min}$ *es función de penalización de un paso para cada* $t = 0, ..., T-1$*.*

Al juntar el siguiente lema con el Teorema 6 se alcanza uno de los objetivos de la sección, la dualidad entre las funciones de penalización mínimas y los generadores cuando son continuos por abajo. Se obtiene entonces una generalización del Teorema 4.31 de Föllmer y Schied [9] que se enunció en la Introducción.

Lema 9 *Sea* $(\rho_t)_{t=0}^{T}$ *medida de riesgo monetario dinámica, convexa y consistente en el tiempo sobre* $L^{\infty}(\mathcal{F}_T)$ *con generador* $(\varphi_t)_{t=0}^{T-1}$ *continuo por abajo. Entonces* $\left(\psi_t^{\min}\right)_{t=0}^{T-1}$ *es la función de penalización dinámica más pequeña tal que*

$$\varphi_t(X) = \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}} \left\{ E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t^{\min}(\mathbb{Q}) \right\} \tag{14}$$

para todo $t = 0, ..., T-1$ *y* $X \in L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1})$*.*

Demostración. Sea $t \in \{0, ..., T-1\}$ fijo e introduzcamos los conjuntos

$$\mathcal{B}_t := \{X \in L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1}) : \varphi_t(X) \leq 0\}$$

y

$$\mathcal{C}_t := \left\{ X \in L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1}) : E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t^{\min}(\mathbb{Q}) \leq 0 \text{ para toda } \mathbb{Q} \in \mathcal{P} \right\}.$$

Se sigue directamente de la definición de $\psi_t^{\min}$ que

$$\varphi_t(X) \geq E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t^{\min}(\mathbb{Q})$$

para toda $X \in L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1})$ y $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$. Esto demuestra que $\mathcal{B}_t \subset \mathcal{C}_t$. En lo que sigue vamos a mostrar que $\mathcal{C}_t \subset \mathcal{B}_t$. Supongamos que este no es el caso. Entonces existe $X^* \in \mathcal{C}_t \backslash \mathcal{B}_t$. Luego el conjunto $A := \{\varphi(X^*) > 0\}$ cumple que $\mathbb{P}(A) > 0$ y además $\mathbf{1}_A X^* \in \mathcal{C}_t \backslash \mathcal{B}_t$. Se corrobora fácilmente que la correspondencia

$$X \mapsto I(X) := E\left[-\varphi_t(X)\right]$$

es una función cóncava, creciente y continua por arriba de $L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1})$ a $\mathbb{R}$. Ahora, definamos

$$\mathcal{B} := \{X \in L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1}) : I(X) \geq 0\}.$$

Es claro que $\mathcal{B}$ es un subconjunto convexo de $L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1})$, y debido a la Proposición 46 es también $\sigma\left(L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1}), L^1(\mathcal{F}_{t+1})\right)$-cerrado. Como $\mathbf{1}_A X^* \notin \mathcal{B}$ se sigue del teorema de hiperplanos separantes (Teorema 41) que

$$\gamma := E\left[\mathbf{1}_A X^* Y\right] < \inf_{X \in \mathcal{B}} E\left[XY\right] \tag{15}$$

para alguna variable aleatoria $Y \in L^1(\mathcal{F}_{t+1})$ distinta de cero. De hecho $Y \geq 0$. Para ver esto notemos que $\mathbf{1}_{\{Y<0\}} \in L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1})$ y $\mathbf{1}_{\{Y<0\}} \geq 0$; entonces por (M) y (N)

$$\varphi_t(\mathbf{1}_{\{Y<0\}}) \leq 0,$$

de allí que $E\left[-\varphi_t(\mathbf{1}_{\{Y<0\}})\right] \geq 0$ y por tanto $\mathbf{1}_{\{Y<0\}} \in \mathcal{B}$. Más aún, para cualquier $c \geq 0$ se tiene que $c\mathbf{1}_{\{Y<0\}} \in \mathcal{B}$. Entonces, por (15)

$$\gamma < E\left[c\mathbf{1}_{\{Y<0\}} Y\right] = cE\left[\mathbf{1}_{\{Y<0\}} Y\right], \qquad \text{para todo } c \geq 0. \tag{16}$$

Resulta obvio que $E\left[\mathbf{1}_{\{Y<0\}} Y\right] \leq 0$, sin embargo, no puede suceder que $E\left[\mathbf{1}_{\{Y<0\}} Y\right] < 0$, pues si así ocurriera tendría que existir $c \geq 0$ tal que $cE\left[\mathbf{1}_{\{Y<0\}} Y\right] < \gamma$ lo cual contradice a (16). Por lo tanto $E\left[\mathbf{1}_{\{Y<0\}} Y\right] = 0$, y concluimos que $Y \geq 0$. Entonces, dividiendo por $E[Y]$ la desigualdad (15) toma la forma

$$E_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_A X^*\right] < \inf_{X \in \mathcal{B}} E_{\mathbb{Q}}\left[X\right] \leq \inf_{X \in \mathcal{B}_t} E_{\mathbb{Q}}\left[X\right] \tag{17}$$

con $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{Y}{E[Y]}$.

Por otra parte, se observa que la familia $\{E_{\mathbb{Q}}\left[X \mid \mathcal{F}_t\right] : X \in \mathcal{B}_t\}$ es dirigida hacia abajo y se concluye por la Proposición 34 y la desigualdad (17) que

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}}\left[\operatorname*{essinf}_{X \in \mathcal{B}_t} E_{\mathbb{Q}}\left[X \mid \mathcal{F}_t\right]\right] &= E_{\mathbb{Q}}\left[\operatorname*{essinf}_{X \in \mathcal{B}_t} E_{\mathbb{Q}}\left[X \mid \mathcal{F}_t\right] \mid \{\emptyset, \Omega\}\right] \\ &= \operatorname*{essinf}_{X \in \mathcal{B}_t} E_{\mathbb{Q}}\left[X\right] = \inf_{X \in \mathcal{B}_t} E_{\mathbb{Q}}\left[X\right] > E_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_A X^*\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Además, $\psi_t^{\min}$ puede escribirse como

$$\psi_t^{\min}(\mathbb{Q}) = \operatorname*{esssup}_{X\in\mathcal{B}_t} E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right].$$

En efecto, es claro por la definición de $\psi_t^{\min}$ y de $\mathcal{B}_t$ que

$$\psi_t^{\min}(\mathbb{Q}) \geq -\varphi_t(X) + E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] \geq E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right], \qquad \text{para todo } X \in \mathcal{B}_t,$$

de allí que

$$\psi_t^{\min}(\mathbb{Q}) \geq \operatorname*{esssup}_{X\in\mathcal{B}_t} E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Debido a que $(X + \varphi_t(X)) \in \mathcal{B}_t$ para todo $X \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$, tambíen se tiene

$$\psi_t^{\min}(\mathbb{Q}) = \operatorname*{esssup}_{X\in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})} E_{\mathbb{Q}}\left[-\left(X + \varphi_t(X)\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \leq \operatorname*{esssup}_{X\in\mathcal{B}_t} E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Luego, se sigue de la desigualdad (18) que

$$E_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_A X^*\right] < E_{\mathbb{Q}}\left[\operatorname*{essinf}_{X\in\mathcal{B}_t} E_{\mathbb{Q}}\left[X \mid \mathcal{F}_t\right]\right] = E_{\mathbb{Q}}\left[-\psi_t^{\min}(\mathbb{Q})\right],$$

y entonces

$$E_{\mathbb{Q}}\left[E_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_A X^*\right] + \psi_t^{\min}(\mathbb{Q})\right] < 0.$$

Pero esto contradice que $\mathbf{1}_A X^* \in \mathcal{C}_t$. Entonces debemos tener $\mathcal{C}_t = \mathcal{B}_t$.

Ahora bien, es claro que para todo $X \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$, $\varphi_t(X) \in \{m \in L^\infty(\mathcal{F}_t) : X + m \in \mathcal{B}_t\}$, además para todo $m \in \{m \in L^\infty(\mathcal{F}_t) : X + m \in \mathcal{B}_t\}$ se cumple que $\varphi_t(X) \leq m$, lo cual nos dice que

$$\varphi_t(X) = \operatorname{essinf}\{m \in L^\infty(\mathcal{F}_t) : X + m \in \mathcal{B}_t\};$$

y por lo tanto se sigue que

$$\begin{aligned}
\varphi_t(X) &= \operatorname{essinf}\{m \in L^\infty(\mathcal{F}_t) : X + m \in \mathcal{C}_t\} \\
&= \operatorname{essinf}\left\{m \in L^\infty(\mathcal{F}_t) : E_{\mathbb{Q}}\left[X + m \mid \mathcal{F}_t\right] + \psi_t^{\min}(\mathbb{Q}) \geq 0 \text{ para todo } \mathbb{Q} \in \mathcal{P}\right\} \\
&= \operatorname{essinf}\left\{m \in L^\infty(\mathcal{F}_t) : E_{\mathbb{Q}}\left[X \mid \mathcal{F}_t\right] + \psi_t^{\min}(\mathbb{Q}) \geq -m \text{ para todo } \mathbb{Q} \in \mathcal{P}\right\} \\
&= \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left\{E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t^{\min}(\mathbb{Q})\right\} \\
&= \operatorname*{esssup}_{\xi_{t+1}\in\mathcal{D}_{t+1}} \left\{E_{\mathbb{P}}\left[-\xi_{t+1} X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t^{\min}\left(\xi_{t+1}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Para la penúltima igualdad se usó que

$$\operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left\{E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t^{\min}(\mathbb{Q})\right\} \in \left\{m \in L^\infty(\mathcal{F}_t) : E_{\mathbb{Q}}\left[X \mid \mathcal{F}_t\right] + \psi_t^{\min}(\mathbb{Q}) \geq -m \text{ para todo } \mathbb{Q} \in \mathcal{P}\right\}$$

y la definición de ínfimo esencial.

Entonces, en efecto se tiene la representación dual (14). Finalmente, observemos que para toda función ψ_t que va de $\mathcal{D}_{t+1}$ a $\overline{L}_+(\mathcal{F}_t)$ y que satisface

$$\varphi_t(X) = \underset{\xi_{t+1}\in\mathcal{D}_{t+1}}{\operatorname{esssup}} \left\{ E_{\mathbb{P}}\left[-\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t\left(\xi_{t+1}\right)\right\}$$

para todo $X \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$, se tiene

$$-\varphi_t(X) - E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] \leq \psi_t\left(\xi_{t+1}\right)$$

para todo $X \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ y todo $\xi_{t+1} \in \mathcal{D}_{t+1}$; luego por definición de $\psi_t^{\min}$ concluimos $\psi_t^{\min} \leq \psi_t$. ■

El siguiente teorema es consecuencia inmediata del Teorema 6 y del Lema 9. Su importancia radica en que a partir de una familia de generadores continuos por abajo, podemos construir medidas de riesgo y obtener explícitamente en términos de los mismos representaciones de las funciones de penalización mínimas que generan.

Teorema 10 *Sea $(\rho_t)_{t=0}^T$ una medida de riesgo monetario dinámica, convexa, consistente en el tiempo y continua por abajo. Entonces se cumple*

$$\begin{aligned}\rho_t(X) &= \underset{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}}{\operatorname{esssup}}\, E_{\mathbb{Q}}\left[-X - \sum_{j=t+1}^{T}\psi_{j-1}^{\min}(\mathbb{Q}) \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \underset{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}}{\operatorname{esssup}}\, E_{\mathbb{Q}}\left[-X - \sum_{j=t+1}^{s}\psi_{j-1}^{\min}(\mathbb{Q}) \mid \mathcal{F}_t\right]\end{aligned}$$

para $0 \leq t < s \leq T$ y $X \in L^\infty(\mathcal{F}_s)$.

2.3 Ejemplos

2.3.1 Medida de Riesgo del Peor Caso

En virtud del Teorema 10, cualquier medida de riesgo dinámica que satisfaga las hipótesis surge de la siguiente forma. Consideremos cualquier espacio de probabilidad sobre $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \mathbb{Q}\right)$ tal que $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$; estos modelos se toman más o menos en serio dependiendo de cómo los describa la función de penalización. Entonces $\rho_t(X)$ se obtiene como la peor situación, sobre todos esos modelos, de la pérdida esperada condicionada a la información hasta el tiempo t, $E_{\mathbb{Q}}[-X \mid \mathcal{F}_t]$, pero reducida por la penalización esperada condicionada $-E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=t+1}^T \psi_{j-1}(\mathbb{Q}) \mid \mathcal{F}_t\right]$.

Vamos a observar la representación que tiene la medida del peor caso, es decir, la medida de riesgo dinámico, convexa, consistente en el tiempo y continua por abajo que penaliza más que toda otra medida que cumpla las mismas hipótesis a cualquier posición financiera. Para ello, consideramos la función de penalización dinámica idénticamente cero, entonces, por el Teorema 6 la medida de riesgo dinámica que genera, que denataremos por $\rho_t^{\max}$, es

$$\rho_t^{\max}(X) = \underset{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}}{\operatorname{esssup}} E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right], \qquad t \in \{0, ..., T\}. \tag{19}$$

Por las propiedades del supremo esencial es fácil corroborar que esta medida es continua por abajo. Resulta inmediato a partir del Teorema 10 que cualquier otra medida de riesgo monetario dinámica, convexa, consistente en el tiempo y continua por abajo $(\rho_t)_{t=0}^T$, cumple

$$\rho_t^{\max}(X) \geq \rho_t(X), \qquad \text{para cualquier } X \in L^\infty\left(\mathcal{F}_t\right) \text{ y } t \in \{0, ..., T\}.$$

La medida del peor caso resulta ser muy conservadora y no es usada en la práctica.

2.3.2 Medida de Riesgo Entrópico Dinámica

Con el mismo espíritu que en el ejemplo anterior, vamos a encontrar la representación que se tiene cuando la medida de referencia $\mathbb{P}$ es la que se toma más seriamente, es decir, que la función de penalización ψ_t le asigne cero, y que para cualquier otra medida $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$, la función $\psi_t(\mathbb{Q})$ sea proporcional a su desviación de $\mathbb{P}$, medida por la entropía relativa. Las siguientes definiciones vienen del modelo estático o de un periodo.

Definición 11 *Si $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ la entropía relativa de $\mathbb{Q}$ con respecto a $\mathbb{P}$ se define por*

$$H(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) = E\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \log \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right].$$

Observación 3 *La desigualdad de Jensen aplicada a la función convexa $x \mapsto x \log x$ nos lleva a que $H(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) \geq 0$.*

Definición 12 *Sea $X \in L^\infty(\mathcal{F})$. Se define su medida de Riesgo Entrópico como*

$$\rho(X) := \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left(E_{\mathbb{Q}}[-X] - \frac{1}{\beta} H(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P})\right),$$

donde β es una constante mayor a cero.

Puede verificarse fácilmente (ver [9], Ejemplo 4.33) que se tiene la siguiente representación

$$\rho(X) = \frac{1}{\beta} \log E_{\mathbb{P}}\left[\exp\{-\beta X\}\right]. \tag{20}$$

Esta medida tiene la siguiente interpretación financiera: Supongamos que un inversionista con aversión al riesgo, que se indica con el término β, decide valuar el riesgo de una posición financiera X al encontrar el ínfimo de conjunto $\{m \in \mathbb{R} \mid E_{\mathbb{P}}[\exp\{\beta(m + X)\}] \leq 1\}$. En [9], Ejemplo 4.105, se demuestra que esta forma de medir el riesgo es equivalente a usar como medida a ρ representada como en (20).

Es entonces natural concebir para cada $t = 0, ..., T-1$, una variable $\alpha_t \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$ con $\alpha_t > 0$ y definir los generadores

$$\varphi_t(X) = \frac{1}{\alpha_t} \log E_{\mathbb{P}}\left[\exp\{-\alpha_t X\} \mid \mathcal{F}_t\right], \qquad X \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1}).$$

Luego φ_t es una medida de riesgo entrópico condicional sobre $L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ con parámetro de aversión α_t, según la Definición 4.2 de [5]. Además, se tiene que

$$\psi_t^{\min}(\xi_{t+1}) = \operatorname*{esssup}_{X \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})} \left\{E_{\mathbb{P}}\left[-\xi_{t+1} X \mid \mathcal{F}_t\right] - \varphi_t(X)\right\} = \frac{1}{\alpha_t} E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1} \log(\xi_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Definimos

$$\Psi(\mathbb{Q}) := \sum_{j=t+1}^{T} \psi_t^{\min}(\mathbb{Q}) = \sum_{j=t+1}^{T} \frac{1}{\alpha_t} E_{\mathbb{Q}}\left[\log\left(\xi_{t+1}^{\mathbb{Q}}\right) \mid \mathcal{F}_t\right],$$

y por lo tanto ρ_t se reescribe como

$$\rho_t(X) = \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}} E_{\mathbb{Q}}\left[-X - \Psi(\mathbb{Q}) \mid \mathcal{F}_t\right], \qquad X \in L^\infty(\mathcal{F}_T), t = 0, ..., T.$$

Es decir, ρ_t es una medida de riesgo entrópico con parámetro de aversión dinámico $(\alpha_0, ..., \alpha_{T-1})$ sobre $L^\infty(\mathcal{F}_T)$.

2.3.3 Valor en Riesgo Promedio Dinámico

Un enfoque común al problema de cuantificación del riesgo que conlleva una posición financiera X consiste en especificar un cuantil de la distribución de X bajo la medida de referencia $\mathbb{P}$. En el modelo de un periodo se estudia la siguiente medida de riesgo no convexa, llamada Valor en Riesgo y denotada por $V@R_\lambda$.

Definición 13 *Sea $\lambda \in (0,1)$ fijo. Para una posición financiera $X \in L^\infty(\mathcal{F})$, definimos su* Valor en Riesgo al nivel λ *como*

$$V@R_\lambda(X) := \inf\{m : \mathbb{P}[X + m < 0] \leq \lambda\}.$$

En términos financieros, $V@R_\lambda(X)$ es la cantidad más pequeña de capital que si se añade a la posición X y se invierte en la cuenta de banco, mantiene la probabilidad de un resultado negativo debajo de un nivel λ. Es por esta interpretación que en el acuerdo de Basilea II el Valor en Riesgo quedó establecido como una herramienta que se implementaría para designar la reserva necesaria que debe tener una compañía crediticia para poder operar. Sin embargo, el Valor en Riesgo no captura el tamaño de la pérdida cuando ésta ocurre. Además, debido a que $V@R_\lambda$ no cumple la propiedad de convexidad puede ocurrir que castigue la diversificación en lugar de premiarla; véase Ejemplo 4.44 de [9] para en ejemplo de este hecho o bien revísese el artículo de Albanese [2] para un estudio más completo en el mismo sentido. No obstante los inconvenientes señalados, el Valor en Riesgo es muy usado en la práctica. Véanse los trabajos de Marrison [12] y Jorion [10] para profundizar en las metodologías y técnicas de estimación de esta medida.

Para corregir la no convexidad que presenta $V@R_\lambda$, se define la siguiente medida de riesgo en términos de la medida anterior también en el modelo de un periodo:

Definición 14 *El Valor en Riesgo Promedio al nivel $\lambda \in (0,1]$ de una posición $X \in L^\infty(\mathcal{F})$ está dado por*

$$AV@R_\lambda(X) := \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda V@R_\gamma(X)\,d\gamma.$$

Se verifica fácilmente que esta función es medida de riesgo convexa. Además, se puede probar que tiene la siguiente representación

$$AV@R_\lambda(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_\lambda} E_{\mathbb{Q}}[-X] \tag{21}$$

donde $\mathcal{P}_\lambda$ es el conjunto de medidas de probabilidad absolutamente continuas con respecto a $\mathbb{P}$ cuya densidad $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ está acotada por $1/\lambda$, ver Teorema 4.46 de [9]. El problema con esta medida es que su implementación se vuelve más sofisticada y ardua. No obstante, ya se han desarrolado técnicas de optimización que facilitan su uso. Para ahondar en esas metodologías se puede consultar Rockafellar y Uryasev [13].

Debido a la representación (21) resulta natural definir los siguientes generadores. Para cada $t = 0, ..., T-1$, sea λ_t un elemento de $L^\infty(\mathcal{F}_t)$ tal que $0 < \lambda_t \leq 1$ y consideremos los generadores continuos por abajo definidos para $X \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ como

$$\varphi_t(X) = \operatorname*{esssup}_{\xi_{t+1}\in\mathcal{D}_{t+1},\xi_{t+1}\leq\lambda_t^{-1}} E_{\mathbb{P}}\left[-\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Decimos entonces que φ_t es un Valor en Riesgo Promedio condicional sobre $L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ al nivel λ_t (ver Ejemplo 3.7. de [5] para esta definición). La función de penalización mínima $\left(\psi_t^{\min}\right)_{t=0}^T$ inducida está dada por

$$\psi_t^{\min}(\xi_{t+1}) = \operatorname*{esssup}_{X\in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})}\left\{-\varphi_t(X) - E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right]\right\} = \begin{cases} 0, & \text{sobre } \left\{\mathbb{P}\left[\xi_{t+1} > \lambda_t^{-1} \mid \mathcal{F}_t\right] = 0\right\} \\ \infty, & \text{sobre } \left\{\mathbb{P}\left[\xi_{t+1} > \lambda_t^{-1} \mid \mathcal{F}_t\right] > 0\right\} \end{cases}.$$

Entonces,

$$\sum_{j=t+1}^T \psi_{j-1}^{\min}(\mathbb{Q}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathbb{P}\left[\xi_j^{\mathbb{Q}} > \lambda_{j-1}^{-1} \mid \mathcal{F}_{j-1}\right] = 0 \text{ para todo } j = t+1, ..., T \\ \infty, & \text{de otra forma} \end{cases}.$$

Por el Teorema 10 la medida de riesgo monetario $(\rho_t)_{t=0}^T$ tiene la representación

$$\rho_t(X) = \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} E_{\mathbb{Q}}\left[-X - \sum_{j=t+1}^{T} \psi_{j-1}^{\min}(\mathbb{Q}) \mid \mathcal{F}_t\right] = \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} E_{\mathbb{Q}}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right],$$

donde

$$\mathcal{Q} := \left\{\mathbb{Q}\in\mathcal{P} : \xi_j^{\mathbb{Q}} \leq \lambda_{j-1}^{-1} \text{ para todo } j = t+1, ..., T\right\}.$$

Entonces $(\rho_t)_{t=0}^T$ es un Valor en Riesgo Promedio dinámico y consistente en el tiempo al nivel dinámico $(\lambda_0, ..., \lambda_{T-1})$.

3 Medidas de riesgo dinámicas para procesos estocásticos acotados

Denotemos por $\mathcal{R}^\infty$ el espacio de los procesos estocásticos adaptados y esencialmente acotados $(Z_t)_{t=0}^T$ sobre $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \mathbb{P}\right)$. La norma de un proceso $X \in \mathcal{R}^\infty$ será $\|X\| := \max_{0\le s\le T} |X_s|$. Se tomará por convención que para $X, Y \in \mathcal{R}^\infty$ se denota $X \ge Y$ siempre que $X_s \ge Y_s$ para toda $s = 0, ..., T$. Además, para $0 \le t \le r \le T$, se denotará por $\mathbf{1}_{[t,r]}$ al elemento de $\mathbb{R}^{T+1}$ definido por

$$\mathbf{1}_{[t,r]s} := \begin{cases} 1, & t \le s \le r \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases},$$

cuando $t = r$ se conviene en escribir $\mathbf{1}_{[t,t]} = \mathbf{1}_{[t]}$.

En esta sección los objetos con riesgo son los procesos estocásticos $X \in \mathcal{R}^\infty$, que modelan el proceso de valor descontado o el flujo de efectivo descontado acumulado; por ejemplo, el valor de mercado descontado de un portafolio, el valor descontado de las acciones de una firma o la reserva descontada de una compañía aseguradora. Como en la sección anterior, estamos interesados en las medidas de riesgo monetario ρ_t, sólo que ahora estarán definidas sobre procesos en $\mathcal{R}^\infty$. Generalizaremos los conceptos de la Sección 2 a este marco más amplio.

Definición 15 *Para $0 \le t \le s \le T$, definimos la proyección $\pi_{t,s} : \mathcal{R}^\infty \to \mathcal{R}^\infty$ por*

$$\pi_{t,s}(X)_r := \mathbf{1}_{\{t\le r\}} X_{r\wedge s}, \qquad r = 0, ..., T,$$

y denotamos

$$\mathcal{R}^\infty_{t,s} := \pi_{t,s}(\mathcal{R}^\infty).$$

Definición 16 *Sea $t \in \{0, ..., T\}$. Una* medida de riesgo monetario *sobre $\mathcal{R}^\infty_{t,T}$ es una función $\rho_t : \mathcal{R}^\infty_{t,T} \to L^\infty(\mathcal{F}_t)$ con las siguientes propiedades:*

***(N) Normalización**: $\rho_t(0) = 0$.*

***(M) Monotonía**: $\rho_t(X) \le \rho_t(Y)$ para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{R}^\infty_{t,T}$ tales que $X \ge Y$.*

***(T) Propiedad de traslación**: $\rho_t\left(X + m\mathbf{1}_{[t,T]}\right) = \rho_t(X) - m$ para cualesquiera $X \in \mathcal{R}^\infty_{t,T}$ y $m \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$.*

Decimos que ρ_t es $\mathcal{F}_t$-convexa (por brevedad convexa) si satisface

***(C) $\mathcal{F}_t$-Convexidad:** $\rho_t(\lambda X + (1-\lambda)Y) \le \lambda\rho_t(X) + (1-\lambda)\rho_t(Y)$, con $X, Y \in \mathcal{R}^\infty_{t,T}$ y $\lambda \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$ tal que $0 \le \lambda \le 1$.*

Para $X \in \mathcal{R}^\infty$ definimos

$$\rho_t(X) := \rho_t \circ \pi_{t,T}(X).$$

Una medida de riesgo monetario dinámica sobre $\mathcal{R}^\infty$ *es una familia $(\rho_t)_{t=0}^T$ tal que cada ρ_t es una medida de riesgo monetario sobre $\mathcal{R}^\infty_{t,T}$. Si cada ρ_t satisface (C), entonces decimos que $(\rho_t)_{t=0}^T$ es una* medida de riesgo monetario dinámica convexa sobre $\mathcal{R}^\infty$.

La interpretación financiera de las propiedades anteriores es análoga a la dada para la Definición 1 en la sección anterior, sólo cambiando el término posición financiera por el de proceso de valor descontado.

Observación 4 *De la misma forma que en la Observación 1 se deduce a partir de (M) y (T) que* ρ_t *satisface la*
(PL) Propiedad local: $\rho_t\left(\mathbf{1}_A X + \mathbf{1}_{A^\complement} Y\right) = \mathbf{1}_A \rho_t(X) + \mathbf{1}_{A^\complement}\rho_t(Y)$ *para cualesquiera* $X, Y \in \mathcal{R}^\infty$ *y* $A \in \mathcal{F}_t$*.*

Definición 17 *Decimos que una medida de riesgo monetario dinámica* $(\rho_t)_{t=0}^T$ *sobre* $\mathcal{R}^\infty$ *es consistente en el tiempo si para cualesquiera* $X, Y \in \mathcal{R}^\infty$ *y* $t = 0, ..., T-1$*,*

$$X_t = Y_t \qquad y \qquad \rho_{t+1}(X) \geq \rho_{t+1}(Y)$$

implican

$$\rho_t(X) \geq \rho_t(Y).$$

Observemos que por la Definición 16 tenemos

$$\rho_{t+1}\left(X_t \mathbf{1}_{[t]}\right) = \rho_{t+1}(0).$$

Entonces por las propiedades (T) y (N)

$$\rho_{t+1}(X) = \rho_{t+1}(0) + \rho_{t+1}(X) = \rho_{t+1}\left(X_t \mathbf{1}_{[t]}\right) + \rho_{t+1}(X) = \rho_{t+1}\left(X_t \mathbf{1}_{[t]} - \rho_{t+1}(X)\mathbf{1}_{[t+1,T]}\right).$$

Usando esta última igualdad y procediendo de manera análoga al caso de la sección anterior, ver (1), se demuestra a partir de (M) que la propiedad de consistencia en el tiempo para una medida de riesgo monetario dinámica sobre $\mathcal{R}^\infty$ es equivalente al siguiente *principio de programación dinámica*:

$$\rho_t(X) = \rho_t\left(X_t \mathbf{1}_{[t]} - \rho_t(X)\mathbf{1}_{[t+1,T]}\right) \qquad \text{para cualquier } X \in \mathcal{R}^\infty \text{ y } t = 0, ..., T-1. \tag{22}$$

3.1 Agregadores y generadores

Para una medida de riesgo monetario dinámica consistente en el tiempo $(\rho_t)_{t=0}^T$ sobre $\mathcal{R}^\infty$, definimos los *agregadores*

$$G_t : L^\infty(\mathcal{F}_t) \times L^\infty(\mathcal{F}_{t+1}) \to L^\infty(\mathcal{F}_t), \qquad t = 0, ..., T-1$$

por

$$G_t(X_t, X_{t+1}) := \rho_t(X),$$

donde X es el proceso en $\mathcal{R}^\infty_{t,t+1}$ dado por

$$X_r := \begin{cases} 0, & r < t \\ X_t, & r = t \\ X_{t+1}, & r > t \end{cases}.$$

A partir de las propiedades (N), (M) y (T) se deducen claramente las siguientes tres propiedades

(G1) $G_t(0,0) = 0$,

(G2) $G_t(X_t, X_{t+1}) \leq G_t(Y_t, Y_{t+1})$ si $X_t \geq Y_t$ y $X_{t+1} \geq Y_{t+1}$,

(G3) $G_t(X_t + m, X_{t+1} + m) = G_t(X_t, X_{t+1}) - m$ para cualquier $m \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$.

Ahora, si la familia $(\rho_t)_{t=0}^T$ es consistente en el tiempo, por (22) tenemos

$$\rho_t(X) = G_t(X_t, -\rho_t(X)), \text{ para cualquier } X \in \mathcal{R}^\infty \text{ y } t = 0, ..., T-1,$$

y por inducción hacia atrás se verifica fácilmente que $(\rho_t)_{t=0}^T$ está unívocamente determinada por los agregadores $(G_t)_{t=0}^{T-1}$. De hecho, es sencillo comprobar que toda sucesión de funciones $(G_t)_{t=0}^{T-1}$ que satisfagan (G1)-(G3) define una medida de riesgo monetario dinámica y consistente en el tiempo $(\rho_t)_{t=0}^T$ por

$$\begin{aligned} \rho_t(X) &= -X \\ \rho_t(X) &= G_t(X_t, -\rho_t(X)), \qquad t \leq T-1. \end{aligned}$$

Es claro que $(\rho_t)_{t=0}^T$ es convexa si y sólo si todo G_t satisface

(**G4**) $G_t(\lambda X_t + (1-\lambda)Y_t, \lambda X_{t+1} + (1-\lambda)Y_{t+1}) \leq \lambda G_t(X_t, X_{t+1}) + (1-\lambda) G_t(Y_t, Y_{t+1})$ para todo $X_t, Y_t \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$, $X_{t+1}, Y_{t+1} \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$, y $\lambda \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$.

Por (G3) podemos escribir

$$G_t(X_t, X_{t+1}) = -X_t + G_t(0, X_{t+1} - X_t) = -X_t + H(\Delta X_{t+1}),$$

donde la función $H_t : L^\infty(\mathcal{F}_{t+1}) \to L^\infty(\mathcal{F}_t)$ está dada por

$$H_t(X) := G_t(0, X),$$

y se conviene en usar la notación $\Delta X_{t+1} := X_{t+1} - X_t$.

Luego, a partir de (G1)-(G3) se tienen las siguientes propiedades para H_t:

(H1) $H_t(0) = 0$,

(H2) $H_t(X) \leq H_t(Y)$ si $X, Y \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ y $X \geq Y$,

(H3) $H_t(X + m) \geq H_t(X) - m$ para cualesquiera $X \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ y $m \in L_+^\infty(\mathcal{F}_t)$.

La propiedad (H1) viene de (G1) y (H2) se deduce directamente de (G2). Para ver (H3) tomemos $X \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ y $m \in L_+^\infty(\mathcal{F}_t)$, luego

$$H_t(X+m) = G_t(0, X+m) = G_t(-m, X) - m + \geq G_t(0, X) - m = H_t(X) - m.$$

Por otro lado, toda sucesión $(H_t)_{t=0}^{T-1}$ de funcionales que satisfagan (H1)-(H3) inducen agregadores $(G_t)_{t=0}^{T-1}$ de medidas de riesgo monetario dinámicas, convexas y consistentes en el tiempo $(\rho_t)_{t=0}^{T}$ sobre $\mathcal{R}^\infty$. En efecto, si H_t satisface (H1)-(H3) entonces

$$G_t(X_t, X_{t+1}) = -X_t + H_t(\Delta X_{t+1})$$

satisface (G1)-(G3). La propiedad (G1) se sigue de (H1) y la la propiedad (G3) se deduce de manera directa de (H3). Para ver (G2) sean $X_t, Y_t \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$ y $X_{t+1}, Y_{t+1} \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ tales que $X_t \geq Y_t$ y $X_{t+1} \geq Y_{t+1}$, entonces a partir de (H2) y (H3) tenemos que

$$\begin{aligned} G_t(X_t, X_{t+1}) &= -X_t + H_t(X_{t+1} - X_t) \leq -X_t + H_t(Y_{t+1} - X_t) \\ &\leq -X_t + H_t(Y_{t+1} - Y_t) + (X_t - Y_t) = -Y_t + H_t(Y_{t+1} - Y_t). \end{aligned}$$

Decimos que $(H_t)_{t=0}^{T-1}$ es el *generador* de $(\rho_t)_{t=0}^{T}$. Por último, es claro que G_t satisface (G4) si y sólo si H_t satisface

(**H4**) $H_t(\lambda X + (1-\lambda) Y) \leq \lambda H_t(X) + (1-\lambda) H_t(Y)$ para todo $\lambda \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$.

3.2 Dualidad

Al igual que en la Sección 2.2, el objetivo de la presente es dar una representación dual para las medidas de riesgo monetario convexas y consistentes en el tiempo de la forma de la transformada de Fenchel-Legendre (2).

Para alcanzar tal meta necesitamos introducir otros conceptos. Para $t = 1, ..., T$, definimos el conjunto

$$\mathcal{E}_t := \left\{ \xi \in L^1_+(\mathcal{F}_t) \mid E_{\mathbb{P}}[\xi \mid \mathcal{F}_{t-1}] \leq 1 \right\}.$$

Toda sucesión $(\xi_{t+1}, ..., \xi_T) \in \mathcal{E}_{t+1} \times \cdots \times \mathcal{E}_T$ induce una $\mathbb{P}$-supermartingala $\left(M_r^\xi\right)_{r=0}^{T}$ definida por

$$M_r^\xi := \begin{cases} 1, & r \leq t \\ \xi_{t+1} \cdots \xi_r, & r = t+1, ..., T \end{cases}.$$

Denotaremos por $\mathcal{E}$ al conjunto $\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_T$.

Definición 18 *Una* función de penalización de un paso sobre $\mathcal{E}_{t+1}$ *es una función*

$$\psi_t : \mathcal{E}_{t+1} \to \overline{L}_+(\mathcal{F}_t)$$

que satisface las siguientes dos condiciones:

(i) $\operatorname*{essinf}_{\xi \in \mathcal{E}_{t+1}} \psi_t(\xi) = 0$

(ii) $\psi_t\left(\mathbf{1}_A \xi + \mathbf{1}_{A^\complement} \xi'\right) = \mathbf{1}_A \psi_t(\xi) + \mathbf{1}_{A^\complement} \psi_t(\xi')$ *para todo* $\xi, \xi' \in \mathcal{E}_{t+1}$ *y* $A \in \mathcal{F}_t$.

Una función de penalización dinámica sobre $\mathcal{E}$ *es una sucesión* $(\psi_t)_{t=0}^{T-1}$ *de funciones de penalización de un paso.*

El siguiente teorema es la generalización de Teorema 6 de la sección anterior.

Teorema 19 *Sea* $(\psi_t)_{t=0}^T$ *una función de penalización dinámica sobre* $\mathcal{E}$*. Entonces*

$$H_t(X) := \underset{\xi_{t+1}\in\mathcal{E}_{t+1}}{\text{esssup}} \left\{ E_{\mathbb{P}}\left[-\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t(\xi_{t+1})\right\}, \qquad X \in L^\infty\left(\mathcal{F}_{t+1}\right),\ t = 0, ..., T-1, \tag{23}$$

define los generadores de una medida de riesgo monetario dinámica convexa y consistente en el tiempo $(\rho_t)_{t=0}^T$ *sobre* $\mathcal{R}^\infty$ *con la siguiente representación*

$$\rho_t(X) = -X_t + \underset{(\xi_{t+1},...,\xi_T)\in\mathcal{E}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{E}_T}{\text{esssup}} E_{\mathbb{P}}\left[-\sum_{j=t+1}^T M_j^\xi \Delta X_j + M_{j-1}^\xi \psi_{j-1}(\xi_j) \mid \mathcal{F}_t\right] \tag{24}$$

para $t \leq T-1$ *y* $X \in \mathcal{R}^\infty$*.*

Demostración. Se verifica fácilmente que para cada $t = 0, ..., T-1$, el funcional $H_t(X)$ definido en (23) cumple las propiedades (H1)-(H4), basta usar razonamientos análogos a los utilizados en la primera parte de la demostración del Teorema 6. Entonces la familia $(H_t)_{t=0}^{T-1}$ induce una medida de riesgo monetario dinámica y consistente en el tiempo $(\rho_t)_{t=0}^T$ sobre $\mathcal{R}^\infty$. Sea $X \in \mathcal{R}_{t,s}^\infty$ para algún $t < s \leq T$ y denotemos

$$\rho_{t,s}(X) = -X_t + \underset{(\xi_{t+1},...,\xi_s)\in\mathcal{E}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{E}_s}{\text{esssup}} E_{\mathbb{P}}\left[-\sum_{j=t+1}^s M_j^\xi \Delta X_j + M_{j-1}^\xi \psi_{j-1}(\xi_j) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Como para cualquier $\left(\xi_{t+1}, ..., \xi_s\right) \in \mathcal{E}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{E}_s$ tenemos que

$$\underset{(\xi_{s+1},...,\xi_T)\in\mathcal{E}_{s+1}\times\cdots\times\mathcal{E}_T}{\text{esssup}} E_{\mathbb{P}}\left[-\sum_{j=s+1}^T M_{j-1}^\xi \psi_{j-1}(\xi_j) \mid \mathcal{F}_t\right] = 0,$$

(para demostrarlo basta seguir los mismos argumentos usados para encontrar que la expresión (11) era idénticamente cero en el Teorema 6 y aprovechando que $\Delta X_j = 0$ para $j = s+1, ..., T$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
&\underset{(\xi_{t+1},...,\xi_T)\in\mathcal{E}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{E}_T}{\text{esssup}} E_{\mathbb{P}}\left[-\sum_{j=t+1}^T M_j^\xi \Delta X_j + M_{j-1}^\xi \psi_{j-1}(\xi_j) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \underset{(\xi_{t+1},...,\xi_s)\in\mathcal{E}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{E}_s}{\text{esssup}} \left[E_{\mathbb{P}}\left[-\sum_{j=t+1}^s M_j^\xi \Delta X_j + M_{j-1}^\xi \psi_{j-1}(\xi_j) \mid \mathcal{F}_t\right]\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \underset{(\xi_{s+1},...,\xi_T)\in\mathcal{E}_{s+1}\times\cdots\times\mathcal{E}_T}{\text{esssup}} E_{\mathbb{P}}\left[-\sum_{j=s+1}^T M_j^\xi \Delta X_j + M_{j-1}^\xi \psi_{j-1}(\xi_j) \mid \mathcal{F}_t\right]\right] \\
&= \underset{(\xi_{t+1},...,\xi_s)\in\mathcal{E}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{E}_s}{\text{esssup}} E_{\mathbb{P}}\left[-\sum_{j=t+1}^s M_j^\xi \Delta X_j + M_{j-1}^\xi \psi_{j-1}(\xi_j) \mid \mathcal{F}_t\right],
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\rho_{t,s}(X) = -X_t + \operatorname*{esssup}_{(\xi_{t+1},\dots,\xi_T)\in\mathcal{E}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{E}_T} E_{\mathbb{P}}\left[-\sum_{j=t+1}^{T} M_j^{\xi}\Delta X_j + M_{j-1}^{\xi}\psi_{j-1}(\xi_j) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Así que basta demostrar $\rho_t(X) = \rho_{t,s}(X)$. Lo probaremos por inducción sobre s. Supongamos que $X \in \mathcal{R}_{t,t+1}^{\infty}$. Entonces

$$\begin{aligned}\rho_t(X) &= G_t\left(X_t, -\rho_{t+1}(X)\right) = G_t\left(X_t, X_{t+1}\right) = -X_t + H_t\left(\Delta X_{t+1}\right)\\ &= -X_t + \operatorname*{esssup}_{\xi_{t+1}\in\mathcal{E}_{t+1}} \left\{E_{\mathbb{P}}\left[-\xi_{t+1}\Delta X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t\left(\xi_{t+1}\right)\right\} = \rho_{t,t+1}(X).\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $X \in \mathcal{R}_{t,s}^{\infty}$ para $s \geq t+2$ y $\rho_t(Y) = \rho_{t,s-1}(Y)$ para cualquier $Y \in \mathcal{R}_{t,s-1}^{\infty}$. Aplicando reiteradamente el principio de programación dinámica (22), tenemos $\rho_t(X) = \rho_t(Y)$ para

$$Y = \mathbf{1}_{[t,s-1)}X - \mathbf{1}_{[s-1,T]}\rho_{s-1}(X) \in \mathcal{R}_{t,s-1}^{\infty},$$

y entonces haciendo las respectivas sustituciones tenemos

$$\begin{aligned}&\rho_t(X) = \rho_t(Y) = \rho_{t,s-1}(Y)\\
&\quad= -Y_t + \operatorname*{esssup}_{(\xi_{t+1},\dots,\xi_s)\in\mathcal{E}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{E}_s} E_{\mathbb{P}}\left[-\sum_{j=t+1}^{s-1} M_j^{\xi}\Delta Y_j + M_{j-1}^{\xi}\psi_{j-1}(\xi_j) \mid \mathcal{F}_t\right]\\
&\quad= -X_t + \operatorname*{esssup}_{(\xi_{t+1},\dots,\xi_s)\in\mathcal{E}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{E}_s} E_{\mathbb{P}}\left[-\sum_{j=t+1}^{s-2} M_j^{\xi}\Delta X_j - M_{s-1}^{\xi}\left[-\rho_{s-1}(X) - X_{s-2}\right]\right.\\
&\qquad\qquad\left. - \sum_{j=t+1}^{s-1} M_{j-1}^{\xi}\psi_{j-1}(\xi_j) \mid \mathcal{F}_t\right]\\
&\quad= X_t + \operatorname*{esssup}_{(\xi_{t+1},\dots,\xi_s)\in\mathcal{E}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{E}_s} E_{\mathbb{P}}\left[-\sum_{j=t+1}^{s-2} M_j^{\xi}\Delta X_j\right.\\
&\qquad\qquad - M_{s-1}^{\xi}\left[X_{s-1} + \operatorname*{essinf}_{\xi_s\in\mathcal{E}_s}\left\{E_{\mathbb{P}}\left[\xi_s\Delta X_s \mid \mathcal{F}_{s-1}\right] + \psi_{s-1}(\xi_s)\right\} - X_{s-2}\right]\\
&\qquad\qquad\left. + \sum_{j=t+1}^{s-1} M_{j-1}^{\xi}\psi_{j-1}(\xi_j) \mid \mathcal{F}_t\right],\end{aligned}$$

donde para la última igualdad se usó que como $X \in \mathcal{R}_{t,s}^{\infty}$ entonces $\rho_{s-1}(X) = \rho_{s-1,s}(X)$ y donde para $s = t+2$ el término $\sum_{j=t+1}^{s-2} M_j^{\xi}\Delta X_j$ se entiende igual a cero. Por la condición (ii) de la Definición 18, la familia

$$\left\{E_{\mathbb{P}}\left[\xi_s\Delta X_s \mid \mathcal{F}_{s-1}\right] + \psi_{s-1}(\xi_s) : \xi_s \in \mathcal{E}_s\right\}$$

es dirigida hacia abajo. Entonces podemos tomar el ínfimo esencial fuera de la esperanza condicional $E_{\mathbb{P}}\left[\cdot \mid \mathcal{F}_t\right]$ aplicando la Proposición 33 y llegar a

$$\rho_t\left(X\right) = -X_t + \underset{\left(\xi_{t+1},\ldots,\xi_s\right)\ \in \mathcal{E}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{E}_s}{\operatorname{esssup}} E_{\mathbb{P}}\left[-\sum_{j=t+1}^{s} M_j^{\xi}\Delta X_j + M_{j-1}^{\xi}\psi_{j-1}(\xi_j) \mid \mathcal{F}_t\right] = \rho_{t,s}\left(X\right).$$

■

Es fácil verificar que los agregadores de la forma (23) son continuos por abajo en el sentido de la Definición 7 y también que las medidas de riesgo monetario de la forma (24) son continuas por abajo en el siguiente sentido más general:

Definición 20 *Sea $0 \leq t \leq s \leq T$. Decimos que una función $I : \mathcal{R}^{\infty}_{t,s} \to L^{\infty}\left(\mathcal{F}_t\right)$ es continua por abajo si $I\left(X^n\right) \to I\left(X\right)$ $\mathbb{P}$-c.s. para toda sucesión $\left(X^n\right)_{n\geq 1}$ y X en $\mathcal{R}^{\infty}_{t,s}$, tales que X^n_r crece a X_r $\mathbb{P}$-c.s. para $r = t, ..., s$. Decimos que una medida de riesgo monetario dinámica $\left(\rho_t\right)_{t=0}^{T}$ sobre $\mathcal{R}^{\infty}$ es continua por abajo si cada ρ_t es continua por abajo.*

El siguiente lema nos permite hacer una conexión entre la definición de continuidad por abajo para procesos con la respectiva para variables aleatorias a través de los generadores y agregadores.

Lema 21 *Una medida de riesgo monetario dinámica consistente en el tiempo $\left(\rho_t\right)_{t=0}^{T}$ sobre $\mathcal{R}^{\infty}$ es continua por abajo si y sólo cada uno de sus correspondientes agregadores $\left(G_t\right)_{t=0}^{T-1}$ es continuo por abajo, lo cual sucede si y sólo si cada uno de sus generadores asociados $\left(H_t\right)_{t=0}^{T}$ es continuo por abajo.*

Demostración.
(a) Supongamos que $\left(\rho_t\right)_{t=0}^{T}$ es continua por abajo. Sea $\left(\left(X_t^n, X_{t+1}^n\right)\right)_{n\geq 1}$ sucesión en $L^{\infty}\left(\mathcal{F}_t\right) \times L^{\infty}\left(\mathcal{F}_{t+1}\right)$ que crece a $\left(X_t, X_{t+1}\right) \in L^{\infty}\left(\mathcal{F}_t\right) \times L^{\infty}\left(\mathcal{F}_{t+1}\right)$ $\mathbb{P}$-c.s. para algún $t \in \{0, .., T-1\}$. Luego

$$G_t\left(X_t^n, X_{t+1}^n\right) = \rho_t\left(X^n\right),$$

donde $X^n := \mathbf{1}_{[t]}X_t^n + \mathbf{1}_{[t+1,T]}X_{t+1}^n \in \mathcal{R}^{\infty}_{t,t+1}$. Claramente se cumple $X^n \nearrow X := \mathbf{1}_{[t]}X_t + \mathbf{1}_{[t+1,T]}X_{t+1}$ $\mathbb{P}$-c.s. y por lo tanto

$$G_t\left(X_t^n, X_{t+1}^n\right) = \rho_t\left(X^n\right) \to \rho_t\left(X\right) = G_t\left(X_t, X_{t+1}\right), \qquad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Por otro lado, supongamos que para cada $t = 0, ..., T-1$, se cumple que G_t es continuo por abajo. Procedamos por inducción hacia atrás. Sabemos que $\rho_T(X) = -X$, es obvio que entonces ρ_T es continua por abajo. Supongamos que ρ_t es continua por abajo para todo $t \geq k+1$. Demostremos entonces que ρ_k es continua por abajo. Sean $\left(X^n\right)_{n\geq 1}$ y X en $\mathcal{R}^{\infty}_{k,T}$, tales que $X_r^n \nearrow X_r$ $\mathbb{P}$-c.s. para $r = k, ..., T$. Por lo tanto, usando (M) tenemos que $\rho_{k+1}\left(X^n\right) \searrow \rho_{k+1}\left(X\right)$. Luego

$$\rho_k\left(X^n\right) = G_k(X_k^n, -\rho_{k+1}\left(X^n\right)) \searrow G_k(X_k, -\rho_{k+1}\left(X\right)) = \rho_k\left(X\right), \qquad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

(b) Ahora, para $t \in \{0, ..., T-1\}$ supongamos que G_t es continua por abajo. Si $(X^n)_{n\geq 1}$ y X están en $L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ tales que $(X^n)_{n\geq 1}$ crece a X $\mathbb{P}$-c.s., entonces usando la propiedad (G2) tenemos

$$H_t(X^n) = G_t(0, X^n) \searrow G_t(0, X) = H_t(X), \qquad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Luego H_t es continua por abajo. Ahora, supongamos que H_t es continua por abajo y $((X_t, X_{t+1}))_{n\geq 1}$ es sucesión en $L^\infty(\mathcal{F}_t) \times L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ que crece a $(X_t, X_{t+1}) \in L^\infty(\mathcal{F}_t) \times L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ $\mathbb{P}$-c.s., entonces usando (H2) tenemos

$$G_t\left(X_t^n, X_{t+1}^n\right) = -X_t^n + H_t\left(\Delta X_{t+1}^n\right) \leq -X_t^n + H_t\left(\Delta X_{t+1}^n\right) \searrow X_t + H_t(\Delta X_{t+1}) = G_t(X_t, X_{t+1}),$$

$\mathbb{P}$-c.s., lo cual muestra que G_t es continua por abajo. ∎

Definición 22 *Para una medida de riesgo monetario dinámica, convexa y consistente en el tiempo $(\rho_t)_{t=0}^T$ sobre $\mathcal{R}^\infty$ con generadores $(H_t)_{t=0}^{T-1}$ continuos por abajo, definimos para $\xi_{t+1} \in \mathcal{E}_{t+1}$ y $t = 0, ..., T-1$,*

$$\psi_t^{\min}(\xi_{t+1}) := \operatorname*{esssup}_{X\in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})} \left\{E_{\mathbb{P}}\left[-\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] - H_t(X)\right\}.$$

Observación 5 *Se verifica fácilmente que para cada $t = 0, ..., T-1$, la función $\psi_t^{\min}$ satisface las propiedades (i) y (ii) de la Definición 18 y entonces $\left(\psi_t^{\min}\right)_{t=0}^{T-1}$ es función de penalización dinámica sobre $\mathcal{E}$.*

El siguiente lema es una generalización del Lema 9 y aunado al Teorema 19 muestra la dualidad entre los generadores y las funciones de penalización mínima cuando las medidas de riesgo cumplen ser continuas por abajo.

Lema 23 *Sea $(\rho_t)_{t=0}^T$ una medida de riesgo monetario dinámica, convexa y consistente en el tiempo sobre $\mathcal{R}^\infty$ con generadores $(H_t)_{t=0}^{T-1}$ que son continuos por abajo. Entonces $\left(\psi_t^{\min}\right)_{t=0}^{T-1}$ es la función de penalización dinámica más pequeña sobre $\mathcal{E}$ tal que*

$$H_t(X) = \operatorname*{esssup}_{\xi_{t+1}\in\mathcal{E}_{t+1}} \left\{E_{\mathbb{P}}\left[-\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t^{\min}(X)\right\}$$

para todo $t = 0, ..., T-1$ y $X \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$.

Demostración. Fijemos $t \in \{0, ..., T-1\}$. Consideremos un nuevo espacio muestral $\widehat{\Omega} := \{t, t+1\} \times \Omega$ con la σ-álgebra $\widehat{\mathcal{F}}_{t+1}$ generada por todos los conjuntos de la forma $\{j\} \times A_j$ para $j = t, t+1$ y $A_j \in \mathcal{F}_j$. Sea $\widehat{\mathbb{P}}$ la medida de probabilidad sobre $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}_{t+1}\right)$ dada por $\widehat{\mathbb{P}}[\{j\} \times A_j] := \frac{1}{2}\mathbb{P}[A_j]$ para $j = t, t+1$ y $A_j \in \mathcal{F}_j$. Por $\widehat{\mathcal{F}}_t$ vamos a denotar la σ-álgebra sobre $\widehat{\Omega}$ generada por los conjuntos de la forma $\{t, t+1\} \times A_t$ para $A_t \in \mathcal{F}_t$. Entonces, para cada $(X_t, X_{t+1}) \in L^\infty(\mathcal{F}_t) \times L^\infty(\mathcal{F}_{t+1})$ defimos $X^{(X_t, X_{t+1})} \in L^\infty\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}_{t+1}, \widehat{\mathbb{P}}\right)$ por

$$X^{(X_t, X_{t+1})}(j, \omega) := \begin{cases} X_t(\omega), & j = t \\ X_{t+1}(\omega), & j = t+1 \end{cases}.$$

Recíprocamente, para cada $X \in L^{\infty}\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}_{t+1}, \widehat{\mathbb{P}}\right)$ definimos $\left(X_t^X, X_{t+1}^X\right) \in L^{\infty}(\mathcal{F}_t) \times L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1})$ por

$$\left(X_t^X, X_{t+1}^X\right)(\omega) := \left(X(t,\omega), X(t+1,\omega)\right).$$

Es fácil verificar que $X = X^{(X_t, X_{t+1})}$ si y sólo si $(X_t, X_{t+1}) = \left(X_t^X, X_{t+1}^X\right)$. Entonces podemos hacer la siguiente identificación

$$L^{\infty}(\mathcal{F}_t) \times L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1}) = L^{\infty}\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}_{t+1}, \widehat{\mathbb{P}}\right).$$

Por otra parte, para cada $X_t \in L^{\infty}(\mathcal{F}_t)$ definimos $X^{X_t} \in L^{\infty}\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}_t, \widehat{\mathbb{P}}\right)$ por

$$X^{X_t}(j,\omega) := X_t(\omega), \qquad j = t, t+1,$$

entonces podemos identificar a $L^{\infty}(\mathcal{F}_t)$ como un subconjunto de $L^{\infty}\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}_t, \widehat{\mathbb{P}}\right)$. Debido a tales consideraciones y usando las propiedades (G1)-(G4) se tiene que G_t puede ser vista como una medida de riesgo monetario convexa de $L^{\infty}\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}_{t+1}, \widehat{\mathbb{P}}\right)$ a $L^{\infty}\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}_t, \widehat{\mathbb{P}}\right)$. Es claro que esta función es continua por abajo en el sentido de la Definición 7. Entonces se sigue del Lema 9 que

$$G_t(X) = \underset{\widehat{\xi}_{t+1} \in \widehat{\mathcal{D}}_{t+1}}{\operatorname{esssup}} \left\{ E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left[-X \mid \widehat{\mathcal{F}}_t\right] - \psi_t^{\min}(\widehat{\xi}_{t+1}) \right\},$$

donde

$$\psi_t^{\min}(\widehat{\xi}_{t+1}) := \underset{X \in L^{\infty}\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}_{t+1}, \widehat{\mathbb{P}}\right)}{\operatorname{esssup}} \left\{ E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left[-\widehat{\xi}_{t+1} X \mid \widehat{\mathcal{F}}_t\right] - G_t(X) \right\}, \qquad \widehat{\xi}_{t+1} \in \widehat{\mathcal{D}}_{t+1},$$

y con

$$\widehat{\mathcal{D}}_{t+1} := \left\{ \widehat{\xi} \in L^1_+(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}_{t+1}, \widehat{\mathbb{P}}) : E_{\mathbb{P}}\left[\widehat{\xi} \mid \widehat{\mathcal{F}}_t\right] = 1 \right\}.$$

Gracias a la forma de las σ-álgebras $\widehat{\mathcal{F}}_t$ y $\widehat{\mathcal{F}}_{t+1}$ y las consecuentes propiedades que tienen las variables aleatorias medibles con respecto a ellas, se puede concluir que

$$G_t(X_t, X_{t+1}) = \underset{\left(\alpha, \xi_{t+1}\right) \in L_{[0,1]}(\mathcal{F}_t) \times \mathcal{D}_{t+1}}{\operatorname{esssup}} \left\{ -E_{\mathbb{P}}\left[(1-\alpha) X_t + \alpha \xi_{t+1} X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] - \zeta\left(\alpha, \xi_{t+1}\right) \right\}, \quad (25)$$

donde

$$L_{[0,1]}(\mathcal{F}_t) := \{\alpha \in L^{\infty}(\mathcal{F}_t) : 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

y

$$\begin{aligned}
\zeta\left(\alpha, \xi_{t+1}\right) \; &: = \underset{(X_t, X_{t+1}) \in L^{\infty}(\mathcal{F}_t) \times L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1})}{\operatorname{esssup}} \left\{ -G_t(X_t, X_{t+1}) - E_{\mathbb{P}}\left[(1-\alpha) X_t + \alpha \xi_{t+1} X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] \right\} \\
&= \underset{(X_t, X_{t+1}) \in L^{\infty}(\mathcal{F}_t) \times L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1})}{\operatorname{esssup}} \left\{ -G_t(0, \Delta X_{t+1}) - E_{\mathbb{P}}\left[\alpha \xi_{t+1} \Delta X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] \right\} \\
&= \underset{X \in L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1})}{\operatorname{esssup}} \left\{ E_{\mathbb{P}}\left[-\alpha \xi_{t+1} X \mid \mathcal{F}_t\right] - H_t(X) \right\} \\
&= \psi_t^{\min}\left(\alpha \xi_{t+1}\right).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} H_t(X) &= G_t(0,X) = \underset{(\alpha,\xi_{t+1})\ \in L_{[0,1]}(\mathcal{F}_t)\ \times \mathcal{D}_{t+1}}{\operatorname{esssup}} \left\{ E_{\mathbb{P}}\left[-\alpha\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t^{\min}\left(\alpha\xi_{t+1}\right)\right\} \\ &= \underset{\xi_{t+1}\in\mathcal{E}_{t+1}}{\operatorname{esssup}} \left\{ E_{\mathbb{P}}\left[-\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t^{\min}\left(\xi_{t+1}\right)\right\} \end{aligned}$$

para todo $X \in L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1})$. La minimalidad de $\psi_t^{\min}$ se tiene debido a que toda función $\psi_t : \mathcal{E}_{t+1} \to \overline{L}_+(\mathcal{F}_t)$ que satisfaga

$$H_t(X) = \underset{\xi_{t+1}\in\mathcal{E}_{t+1}}{\operatorname{esssup}} \left\{ E_{\mathbb{P}}\left[-\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi_t\left(\xi_{t+1}\right)\right\} \qquad \text{para cualquier } X \in L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1}),$$

deberá satisfacer también

$$-H_t(X) - E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] \le \psi_t\left(\xi_{t+1}\right) \qquad \text{para } X \in L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1}) \text{ y } \xi_{t+1} \in \mathcal{E}_{t+1},$$

y entonces,

$$\psi_t^{\min} \le \psi_t.$$

■

El siguiente resultado es la genaralización del Teorema 10 de la sección anterior. Al igual que el resultado citado, tiene la virtud de mostrar que toda medida de riesgo que cumple sus hipótesis se interpreta como el peor caso de tomar la pérdida descontada acumulada condicional pero reducida por el factor de la función penalización condicionada a la información al tiempo presente. Su demostración es consecuencia inmediata del Teorema 21 y del Lema 23.

Teorema 24 *Sea $(\rho_t)_{t=0}^{T}$ una medida de riesgo monetario dinámica, convexa y consistente en el tiempo continua por abajo. Entonces*

$$\rho_t(X) = -X_t + \underset{(\xi_{t+1},\ldots,\xi_T)\in\mathcal{E}_{t+1}\times\cdots\times\mathcal{E}_T}{\operatorname{esssup}} E_{\mathbb{P}}\left[-\sum_{j=t+1}^{T} M_j^{\xi}\Delta X_j + M_{j-1}^{\xi}\psi_t^{\min}(\xi_j) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

para $t \le T+1$ y $X \in \mathcal{R}^{\infty}$.

3.3 Generadores compuestos

En esta subsección consideraremos generadores de la forma

$$H_t(X) = h_t\left(-\varphi_t(X)\right), \tag{26}$$

donde $\varphi_t : L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1}) \to L^{\infty}(\mathcal{F}_t)$ es una medida de riesgo monetario de $L^{\infty}(\mathcal{F}_{t+1})$ a $L^{\infty}(\mathcal{F}_t)$ y $h_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que satisface (h1) $h_t(0) = 0$,

(h2) $h_t(x) \geq h_t(y)$ para $x \leq y$,

(h3) $|h_t(x) - h_t(y)| \leq |x - y|$ para $x, y \in \mathbb{R}$.

Entonces $H_t = h_t \circ (-\varphi_t) : L^\infty(\mathcal{F}_{t+1}) \to L^\infty(\mathcal{F}_t)$ satisface las propiedades (H1)-(H3). Luego $(h_t, \varphi_t)_{t=0}^T$ induce una medida de riesgo monetario dinámica y consistente en el tiempo $(\rho_t)_{t=0}^T$ sobre $\mathcal{R}^\infty$. Si además se cumple que h_t es convexa y φ_t es $\mathcal{F}_t$-convexa, entonces H_t satisface (H4) y $(\rho_t)_{t=0}^T$ es una medida de riesgo monetario dinámica, convexa y consistente en el tiempo sobre $\mathcal{R}^\infty$.

Aplicando el Teorema 3, toda función convexa $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puede ser representada como

$$h(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} (xy - h^*(y)),$$

donde h^* está dada por

$$h^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (xy - h(x)).$$

Como consecuencia de lo anterior, se tienen el siguiente resultado:

Proposición 25 *Sea $\varphi_t : L^\infty(\mathcal{F}_{t+1}) \to L^\infty(\mathcal{F}_t)$ dada por*

$$\varphi_t(X) = \operatorname*{esssup}_{\xi_{t+1} \in \mathcal{D}_{t+1}} \left\{ E_{\mathbb{P}}\left[-\xi_{t+1} X \mid \mathcal{F}_t\right] - \eta_t(\xi_{t+1}) \right\},$$

para una función de penalización η_t sobre $\mathcal{D}_{t+1}$ y $h_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa que satisface (h1)-(h3). Entonces $H_t = h_t \circ \varphi_t$ puede ser representada como

$$H_t(X) = \operatorname*{esssup}_{\xi_{t+1} \in \mathcal{E}_{t+1}} \left\{ E_P\left[-\xi_{t+1} X \mid \mathcal{F}_t\right] - \psi(\xi_{t+1}) \right\}, \qquad X \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+1}), \tag{27}$$

para la función de penalización de un paso ψ_t sobre $\mathcal{E}_{t+1}$ dada por

$$\psi_t(\xi_{t+1}) = E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] \eta_t \left(\frac{\xi_{t+1}}{E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]} \right) - (-h_t)^* \left(E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] \right).$$

Demostración. Aclaremos que por $\frac{\xi_{t+1}}{E_{\mathbb{P}}[\xi_{t+1} | \mathcal{F}_t]}$ entenderemos la función

$$\frac{\xi_{t+1}}{E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]} \mathbf{1}_{\{E_{\mathbb{P}}[\xi_{t+1} | \mathcal{F}_t] > 0\}} + \mathbf{1}_{\{E_{\mathbb{P}}[\xi_{t+1} | \mathcal{F}_t] = 0\}} \in \mathcal{D}_{t+1}.$$

Ahora, es sencillo verificar que ψ_t es función de penalización. Por lo tanto basta verificar (27).

Notemos que $(-h_t)^*(y) = -\infty$ para $y \notin [0,1]$ debido a que h_t satisface (h2) y (h3). Luego

$$
\begin{aligned}
& H_t(X) \\
= \; & h_t(-\varphi_t(X)) \\
= \; & h_t\left(\operatorname*{essinf}_{\xi_{t+1}\in\mathcal{D}_{t+1}} \left\{E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] + \eta_t\left(\xi_{t+1}\right)\right\}\right) \\
= \; & -\inf_{0\le y\le 1}\left(y\left[\operatorname*{essinf}_{\xi_{t+1}\in\mathcal{D}_{t+1}} \left\{E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] + \eta_t\left(\xi_{t+1}\right)\right\}\right] - (-h_t)^*(y)\right) \\
= \; & -\inf_{0\le y\le 1}\operatorname*{essinf}_{\xi_{t+1}\in\mathcal{D}_{t+1}} \left\{y\left[E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] + \eta_t\left(\xi_{t+1}\right)\right] - (-h_t)^*(y)\right\} \\
= \; & \operatorname*{esssup}_{\xi_{t+1}\in\mathcal{E}_{t+1}} \left\{E_{\mathbb{P}}\left[-\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] - E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]\eta_t\left(\frac{\xi_{t+1}}{E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]}\right) + (-h_t)^*\left(E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Para la última igualdad usamos que $y \mapsto yx - (-h_t)^*(y)$ es función continua. Entonces

$$
\inf_{0\le y\le 1}\left(yx - (-h_t)^*(y)\right) = \inf_{y\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}\left(yx - (-h_t)^*(y)\right).
$$

De lo anterior se sigue para cualquier variable aleatoria X que cumple ser finita $\mathbb{P}$-c.s.:

$$
\inf_{0\le y\le 1}\left(yX - (-h_t)^*(y)\right) = \inf_{y\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}\left(yX - (-h_t)^*(y)\right) = \operatorname*{essinf}_{y\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}\left(yX - (-h_t)^*(y)\right).
$$

Finalmente se observa que

$$
\begin{aligned}
& \inf_{0\le y\le 1}\operatorname*{essinf}_{\xi_{t+1}\in\mathcal{D}_{t+1}} \left\{y\left[E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] + \eta_t\left(\xi_{t+1}\right)\right] - (-h_t)^*(y)\right\} \\
= \; & \operatorname*{essinf}_{y\in[0,1]\cap\mathbb{Q},\xi_{t+1}\in\mathcal{D}_{t+1}} \left\{y\left[E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] + \eta_t\left(\xi_{t+1}\right)\right] - (-h_t)^*(y)\right\} \\
= \; & \operatorname*{essinf}_{\alpha_t\in\mathcal{F}_t,0\le\alpha_t\le 1,\xi_{t+1}\in\mathcal{D}_{t+1}} \left\{\alpha_t\left[E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] + \eta_t\left(\xi_{t+1}\right)\right] - (-h_t)^*(\alpha_t)\right\} \\
= \; & \operatorname*{essinf}_{\xi_{t+1}\in\mathcal{E}_{t+1}} \left\{E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1}X \mid \mathcal{F}_t\right] + E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]\eta_t\left(\frac{\xi_{t+1}}{E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]}\right) - (-h_t)^*\left(E_{\mathbb{P}}\left[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

■

En lo que resta del trabajo vamos a especificar distintas formas de h_t, dándonos cuenta que su elección es crucial para determinar la forma que tiene la medida de riesgo, pudiendo depender sólo del estado final o de la toda la trayectoria del proceso a partir del tiempo presente.

3.3.1 Medidas de riesgo que dependen solamente del valor final

Si $h_t(x) = -x$, entonces los generadores se reducen a

$$
G_t(X_t, X_{t+1}) = -X_t + h_t(-\varphi_t(X_{t+1} - X_t)) = \varphi_t(X_{t+1}).
$$

Así llegamos a

$$\rho_t(X) = G_t(X_t, -\rho_t(X_{t+1})) = \varphi_t(-\rho_t(X_{t+1})) = \varphi_t \circ \left(-\varphi_{t+1}\right) \circ \cdots \circ \left(-\varphi_{T-1}\right)(X_T),$$

por lo que, $(\rho_t)_{t=0}^T$ es una medida de riesgo monetario dinámica y consistente en el tiempo que depende sólo del valor final X_T de X.

3.3.2 Medidas de riesgo que dependen de un promedio ponderado sobre el tiempo

Si $h_t(x) = -\gamma_t x$ para algún γ_t constante que satisface $0 < \gamma_t \leq 1$, entonces

$$G_t(X_t, X_{t+1}) = -X_t + h_t(\varphi_t(X_{t+1} - X_t)) = (\gamma_t - 1)X_t + \gamma_t \varphi_t(X_{t+1}).$$

Por otro lado, definamos

$$\delta_j^t = \begin{cases} 1-\gamma_t, & j = t \\ \gamma_t \cdots \gamma_{j-1}(1-\gamma_j), & t < j < T \\ \gamma_t \cdots \gamma_{T-1}, & j = T \end{cases}.$$

Consideremos las correspondencias $\phi_t^\gamma : L^\infty(\mathcal{F}_T) \to L^\infty(\mathcal{F}_t)$ dadas por

$$\phi_t^\gamma(X) = -\gamma_t(-\varphi_t) \circ \gamma_{t+1}\left(-\varphi_{t+1}\right) \circ \cdots \circ \gamma_{T-1}\left(-\varphi_{T-1}\right)\left(\frac{X}{\gamma_t \cdots \gamma_{T-1}}\right).$$

Es fácil verificar que la medida de riesgo monetario dinámica y consistente en el tiempo $(\rho_t)_{t=0}^T$ sobre $\mathcal{R}^\infty$ inducida por los agregadores $(G_t)_{t=0}^{T-1}$ está dada por

$$\rho_t(X) = \phi_t^\gamma\left(\sum_{j=t}^T \delta_j^t X_j\right), \qquad t = 0, ..., T-1.$$

En particular, para $\gamma_t = \frac{T-t}{T-t+1}$, obtenemos

$$\rho_t(X) = \phi_t^\gamma\left(\frac{1}{T-t+1}\sum_{j=t}^T X_j\right).$$

Por último, observemos que hay un caso especial cuando $\varphi_t(c_t X) = c_t \varphi_t(X)$ se cumple para cada $t = 0, ..., T-1$, pues la correspondencia ϕ_t^γ toma la forma

$$\phi_t^\gamma = -(-\varphi_t) \circ \cdots \circ \left(-\varphi_{T-1}\right).$$

Apéndices

A. El supremo esencial de una familia de variables aleatorias

Expondremos en este apéndice el supremo esencial y el ínfimo esencial de una familia arbitraria Φ de varibles aleatorias sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Consideremos primero el caso en el que el conjunto Φ es contable. Entonces $\varphi^*(\omega) := \sup_{\varphi\in\Phi} \varphi(\omega)$ sabemos que será también una variable aleatoria, es decir, φ^* es medible. Sin embargo, la medibilidad del supremo puntual no está garantizada si Φ no es contable.

Ejemplo 1 *Sea* $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ *espacio de probabilidad con* λ *la medida de Lebesgue en* $[0,1]$. *Sabemos que existe un conjunto* $A \subset [0,1]$ *tal que* $A \notin \mathcal{B}([0,1])$ *y por tanto no contable. Sea*

$$\Phi = \left\{ \mathbf{1}_{\{x\}} : x \in A \right\},$$

es claro que entonces $\varphi^* := \sup_{\varphi\in\Phi} \varphi = \mathbf{1}_A$ *no es medible.*

Ahora, aún si el supremo puntual de una familia de variables aleatorias es medible tal vez no sea un concepto adecuado. Esto se ilustra retomando el ejemplo anterior, pero con $\Phi = \left\{ \mathbf{1}_{\{x\}} : x \in [0,1] \right\}$. En este caso $\sup_{\varphi\in\Phi} \varphi = 1$, mientras que $\varphi = 0$ λ-c.s. para cada $\varphi \in \Phi$. Esto sugiere el siguiente concepto de *supremo esencial* definido en términos de desigualdades que se dan $\mathbb{P}$-c.s.

El siguiente teorema está tomado del Apéndice A de [9].

Teorema 26 *Sea* Φ *cualquier conjunto de varibles aleatorias sobre* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Entonces*
(a) Existe una variable aleatoria φ^* *tal que*

$$\varphi^* \geq \varphi \qquad \mathbb{P}\text{-}c.s. \text{ para todo } \varphi \in \Phi. \tag{28}$$

Además, φ^* *es única casi seguramente en el siguiente sentido: Cualquier otra variable aleatoria* ψ *con la propiedad (28) satisface* $\psi \geq \varphi^*$ $\mathbb{P}$*-c.s.*
(b)Suponga que Φ *es dirigido hacia arriba, es decir, para* $\varphi, \widetilde{\varphi} \in \Phi$ *existe* $\psi \in \Phi$ *con* $\psi \geq \varphi \vee \widetilde{\varphi}$. *Luego existe una sucesión creciente* $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots$ *en* Φ *tal que* $\varphi^* = \lim_n \varphi_n$.

Definición 27 *La variable aleatoria* φ^* *del Teorema 26 se denomina el* supremo esencial *de* Φ *con respecto a* $\mathbb{P}$, *y escribimos*

$$\operatorname{esssup} \Phi = \operatorname*{esssup}_{\varphi\in\Phi} \varphi := \varphi^*.$$

El ínfimo esencial *de* Φ *con respecto a* $\mathbb{P}$ *se define como*

$$\operatorname{essinf} \Phi = \operatorname*{essinf}_{\varphi\in\Phi} \varphi := -\operatorname*{esssup}_{\varphi\in\Phi} (-\varphi)$$

Demostración del Teorema 26. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada $\varphi \in \Phi$ toma valores en $[0,1]$; en otro caso podemos considerar $\widetilde{\Phi} := \{f \circ \varphi : \varphi \in \Phi\}$ con $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ estrictamente creciente.

Si $\Psi \subset \Phi$ es contable, sea $\varphi_\Psi(\omega) := \sup_{\varphi \in \Psi} \varphi(\omega)$. Luego φ_Ψ es medible. Afirmamos que la cota superior

$$c := \sup\{E[\varphi_\Psi] : \Psi \subset \Phi \text{ contable}\}$$

es alcanzada por algún subconjunto contable $\Psi^* \subset \Phi$. Para ver esto, tomemos Ψ_n con $E\left[\varphi_{\Psi_n}\right] \to c$ y sea $\Psi^* = \bigcup_n \Psi_n$. Entonces Ψ^* es contable y $E[\varphi_{\Psi^*}] = c$.

Demostremos ahora que $\varphi^* := \varphi_{\Psi^*}$ satisface la condición (28). Lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que (28) no ocurre. Entonces existe $\varphi \in \Phi$ tal que $\mathbb{P}[\varphi > \varphi^*] > 0$. Luego $\Psi' := \Psi^* \cup \{\varphi\}$ satisface

$$E[\varphi_{\Psi'}] > E[\varphi_{\Psi^*}] = c,$$

lo cual contradice la definición de c. Además, si ψ es otra variable aleatoria que satisface (28), entonces obviamente al ser φ^* el supremo contable de elementos de Φ, se tiene $\psi \geq \varphi^*$ $\mathbb{P}$-c.s

Finalmente, la construcción muestra que φ_{Ψ^*} puede ser aproximado por una sucesión creciente si Φ es dirigido hacia arriba. ■

B. Esperanza condicional para variables aletorias no negativas no necesariamente integrables

En la mayoría de los textos de probabilidad avanzados se estudia el concepto y las propiedades de la esperanza condicional en el sentido de Kolmogorov. Sin embargo, para su definición se hace la suposición que la variable aleatoria X a la cual se le toma la esperanza condicional con respecto a una sub σ-álgebra $\mathcal{F}$, es integrable, es decir, se define $E[X \mid \mathcal{F}]$ sólo cuando $E[X] < \infty$.

No obstante, la definición y algunas de las propiedades de la esperanza condicional pueden extenderse cuando X es variable aleatoria no negativa, sin importar que sea o no integrable. Dedico este apéndice a su estudio, pues la correcta definición y uso de las propiedades de esta extensión son primordiales para las representaciones planteadas en el trabajo. La estructura del apéndice y las demostraciones de los resultados están basadas en las notas de Uribe [14].

Definición 28 *Sea X una variable aleatoria no negativa en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sub σ-álgebra. Definimos una versión de la* esperanza condicional de X dada $\mathcal{G}$, *denotada por $\widehat{E}[X \mid \mathcal{G}]$ como la variable aleatoria*

$$\widehat{E}[X \mid \mathcal{G}] := \lim_{n \to \infty} E[X \wedge n \mid \mathcal{G}]. \tag{29}$$

Observación 6 *Usando convergencia monótona para esperanza condicional, es claro que si $E[X] < \infty$, entonces $\widehat{E}[X \mid \mathcal{G}] = E[X \mid \mathcal{G}]$.*

Proposición 29 ***(Monotonía).*** *Sean X, Y dos variables aleatorias no negativas y $X \leq Y$, entonces $\widehat{E}[X \mid \mathcal{G}] \leq \widehat{E}[Y \mid \mathcal{G}]$.*
Demostración. *Es claro que $X \wedge n \leq Y \wedge n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces por monotonía de la esperanza condicional usual sucede $E[X \wedge n \mid \mathcal{G}] \leq E[Y \wedge n \mid \mathcal{G}]$ para toda n. Luego basta tomar el límite.* ■

Proposición 30 *Sean X_n, X variables aleatorias no negativas tales que $X_n \nearrow X$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{E}[X_n \mid \mathcal{G}] = \widehat{E}[X \mid \mathcal{G}].$$

Demostración. Por monotonía se sigue que

$$\widehat{E}[X_n \mid \mathcal{G}] \leq \widehat{E}[X \mid \mathcal{G}] \qquad \text{para toda } n \in \mathbb{N},$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{E}[X_n \mid \mathcal{G}] \leq \widehat{E}[X \mid \mathcal{G}].$$

Ocupémonos ahora de la desigualdad contraria. Definamos $Y_n = X_n \wedge n$. Es claro que $Y_n \nearrow X$. Sea Z variable aleatoria no negativa, acotada y tal que $Z(\omega) \leq X(\omega)$ para toda $\omega \in \Omega$. Sea $\alpha \in (0,1)$. Luego definamos

$$A_n := \{Y_n \geq \alpha Z\}.$$

Como $X_n \wedge n \leq X_{n+1} \wedge (n+1)$, es claro que $A_n \subseteq A_{n+1}$. Además $\bigcup_n A_n = \Omega$. Por tanto

$$\alpha E[Z\mathbf{1}_{A_n} \mid \mathcal{G}] = E[\alpha Z\mathbf{1}_{A_n} \mid \mathcal{G}] \leq E[Y_n\mathbf{1}_{A_n} \mid \mathcal{G}] \leq E[Y_n \mid \mathcal{G}] = \widehat{E}[Y_n \mid \mathcal{G}] \leq \widehat{E}[X_n \mid \mathcal{G}].$$

Demostraremos en un momento que

$$\lim_{n\to\infty} E[Z\mathbf{1}_{A_n} \mid \mathcal{G}] = E[Z \mid \mathcal{G}], \tag{30}$$

de donde se deduce que

$$\alpha E[Z \mid \mathcal{G}] \leq \lim_{n\to\infty} \widehat{E}[X_n \mid \mathcal{G}]$$

y como $\alpha \in (0,1)$ es arbitrario, entonces

$$E[Z \mid \mathcal{G}] \leq \lim_{n\to\infty} \widehat{E}[X_n \mid \mathcal{G}].$$

Al ser Z arbitrario, podemos sustituirlo por $X \wedge m$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$, pues esta función cumpliría las condiciones solicitadas a Z. Es decir:

$$E[X \wedge m \mid \mathcal{G}] \leq \lim_{n\to\infty} \widehat{E}[X_n \mid \mathcal{G}] \qquad \text{para toda } m \in \mathbb{N},$$

y tomando el límite sobre m tenemos

$$\widehat{E}[X \mid \mathcal{G}] = \lim_{m\to\infty} E[X \wedge m \mid \mathcal{G}] \leq \lim_{n\to\infty} \widehat{E}[X_n \mid \mathcal{G}],$$

que era la desigualdad deseada. Entonces basta verificar (30).
Tenemos que $E\left[Z \mid \mathcal{G}\right] = E\left[Z\mathbf{1}_{A_n} \mid \mathcal{G}\right] + E\left[Z\mathbf{1}_{A_n^\complement} \mid \mathcal{G}\right]$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como Z acotada, digamos por M, entonces

$$E\left[Z\mathbf{1}_{A_n^\complement} \mid \mathcal{G}\right] \leq ME\left[\mathbf{1}_{A_n^\complement} \mid \mathcal{G}\right].$$

Notemos que $\mathbb{P}(A_n^\complement)$ decrece a cero, por lo cual

$$\mathbb{P}\left(E\left[\mathbf{1}_{A_n^\complement} \mid \mathcal{G}\right] \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}(A_n^\complement) \to 0.$$

Como

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} E\left[\mathbf{1}_{A_n^\complement} \mid \mathcal{G}\right] \geq \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(E\left[\mathbf{1}_{A_n^\complement} \mid \mathcal{G}\right] \geq \varepsilon\right) = 0$$

y

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} E\left[\mathbf{1}_{A_n^\complement} \mid \mathcal{G}\right] > 0\right) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} E\left[\mathbf{1}_{A_n^\complement} \mid \mathcal{G}\right] \geq \varepsilon\right) = 0,$$

se sigue (30). ■

Proposición 31 *Sean X, Y y Z variables aleatorias no negativas. Supongamos que Z es $\mathcal{G}$-medible. Entonces*

$$\widehat{E}\left[ZX + Y \mid \mathcal{G}\right] = Z\widehat{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] + \widehat{E}\left[Y \mid \mathcal{G}\right].$$

Demostración. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ y $(Y_n)_{n\geq 1}$ sucesiones aproximantes para X y Y (es decir, sucesiones de variables aleatorias no negativas y acotadas tales que $X_n \nearrow X$ y $Y_n \nearrow Y$). Notemos que $(Z \wedge n)\, X_n$ es sucesión aproximante para ZX. Usando que para cada n la variable aleatoria $(Z \wedge n)\, X_n + Y_n$ es acotada y por tanto integrable, el teorema de convergencia monótona nos lleva a

$$\begin{aligned}
\widehat{E}\left[ZX + Y \mid \mathcal{G}\right] &= \lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[(Z \wedge n)\, X_n + Y_n \mid \mathcal{G}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} E\left[(Z \wedge n)\, X_n + Y_n \mid \mathcal{G}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left((Z \wedge n)\, E\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] + E\left[Y_n \mid \mathcal{G}\right]\right) \\
&= Z \lim_{n\to\infty} E\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] + \lim_{n\to\infty} E\left[Y_n \mid \mathcal{G}\right] \\
&= Z \lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] + \lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[Y_n \mid \mathcal{G}\right] \\
&= Z\widehat{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] + \widehat{E}\left[Y \mid \mathcal{G}\right].
\end{aligned}$$

■

Corolario 32 *Sean X y Y variables aleatorias no negativas tales que $X \geq Y$. Entonces*

$$\widehat{E}\left[(X - Y)\, \mathbf{1}_{\{Y<\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] = \widehat{E}\left[X\mathbf{1}_{\{Y<\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] - \widehat{E}\left[Y\mathbf{1}_{\{Y<\infty\}} \mid \mathcal{G}\right].$$

Proposición 33 *Sean* $(X_n)_{n\geq 1}, X$ *variables aleatorias no negativas tales que* $X_n \searrow X$*. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] = \widehat{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right].$$

Demostración. Vamos a realizar la demostración por partes.
(a) Supongamos que $X_n \searrow 0$. Entonces $(X_1 - X_n)\mathbf{1}_{\{X_n<\infty\}} \nearrow X_1$. De allí usando el Teorema 30

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[(X_1 - X_n)\mathbf{1}_{\{X_n<\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] = \widehat{E}\left[X_1 \mid \mathcal{G}\right].$$

Por el Corolario 32 y usando que $X_1\mathbf{1}_{\{X_n<\infty\}} \nearrow X_1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[(X_1 - X_n)\mathbf{1}_{\{X_n<\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] &= \lim_{n\to\infty}\left(\widehat{E}\left[X_1\mathbf{1}_{\{X_n<\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] - \widehat{E}\left[X_n\mathbf{1}_{\{X_n<\infty\}} \mid \mathcal{G}\right]\right) \\
&= \widehat{E}\left[X_1 \mid \mathcal{G}\right] - \lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[X_n\mathbf{1}_{\{X_n<\infty\}} \mid \mathcal{G}\right],
\end{aligned}$$

por lo tanto concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[X_n\mathbf{1}_{\{X_n<\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] = 0. \tag{31}$$

Ahora, como $\widehat{E}\left[X_n\mathbf{1}_{\{X_n=\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] = \infty\widehat{E}\left[\mathbf{1}_{\{X_n=\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] = \infty E\left[\mathbf{1}_{\{X_n=\infty\}} \mid \mathcal{G}\right]$, ocupando convergencia dominada para la esperanza condicional usual obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[X_n\mathbf{1}_{\{X_n=\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] = \infty \cdot \lim_{n\to\infty} E\left[\mathbf{1}_{\{X_n=\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] = \infty \cdot E\left[\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] = 0 \tag{32}$$

Sumando (31) y (32) se tiene el resultado.
(b) En el caso general, es decir cuando $X_n \searrow X$, tenemos que $(X_n - X)\,\mathbf{1}_{\{X<\infty\}} \searrow 0$. Por el inciso anterior

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[(X_n - X)\,\mathbf{1}_{\{X<\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] = 0.$$

Por el Corolario 32 tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[(X_n - X)\,\mathbf{1}_{\{X<\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] = \lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[X_n\mathbf{1}_{\{X<\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] - \lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[X\mathbf{1}_{\{X<\infty\}} \mid \mathcal{G}\right],$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[X_n\mathbf{1}_{\{X<\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] = \widehat{E}\left[X\mathbf{1}_{\{X<\infty\}} \mid \mathcal{G}\right].$$

Ahora, sobre el cojunto $\{X = \infty\}$ es obvio que $X_1 = X_2 = \cdots = \infty = X$, y así

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[X_n\mathbf{1}_{\{X=\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] = \lim_{n\to\infty} \widehat{E}\left[X\mathbf{1}_{\{X=\infty\}} \mid \mathcal{G}\right] = \widehat{E}\left[X\mathbf{1}_{\{X=\infty\}} \mid \mathcal{G}\right].$$

Sumando las últimas dos igualdades tenemos el resultado. ∎

Observación 7 *Dado que tanto la definición tradicional de esperanza condicional como la definición extendida para variables aleatorias no negativas tienen similitud en cuanto a que cumplen el Teorema de Convergencia Monótona, la linealidad de la suma y la regla del producto, en el resto del trabajo no se hace la distinción caligráfica de una u otra, es decir ambas se denotarán de la misma forma, pues de la segunda no se usarán más propiedades que las vistas arriba.*

C. Intercambiando esperanza condicional e ínfimo esencial

En varias demostraciones del trabajo se tiene la necesidad de verificar igualdades de la siguiente forma

$$E\left[\operatorname*{essinf}_{\varphi\in\Phi}\varphi \mid \mathcal{G}\right] = \operatorname*{essinf}_{\varphi\in\Phi} E\left[\varphi \mid \mathcal{G}\right], \tag{33}$$

donde Φ es una familia de variables aleatorias y $\mathcal{G}$ es una sub σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Vamos a garantizar una condición suficiente para que la igualdad (33) sea válida.

Proposición 34 *Sean Φ cualquier conjunto de varibles aleatorias sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dirigido hacia abajo y $\mathcal{G}$ una sub σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Entonces*

$$E\left[\operatorname*{essinf}_{\varphi\in\Phi}\varphi \mid \mathcal{G}\right] = \operatorname*{essinf}_{\varphi\in\Phi} E\left[\varphi \mid \mathcal{G}\right].$$

Demostración. Usando monotonía de la esperanza condicional

$$E\left[\operatorname*{essinf}_{\varphi\in\Phi}\varphi \mid \mathcal{G}\right] \leq E\left[\varphi \mid \mathcal{G}\right] \qquad \text{para todo } \varphi \in \Phi.$$

De esto concluimos

$$E\left[\operatorname*{essinf}_{\varphi\in\Phi}\varphi \mid \mathcal{G}\right] \leq \operatorname*{essinf}_{\varphi\in\Phi} E\left[\varphi \mid \mathcal{G}\right].$$

Ahora, por el Teorema 26, sabemos que existe una sucesión decreciente $(\varphi_n)_{n\geq 1} \subset \Phi$, tal que $\operatorname{essinf}_{\varphi\in\Phi}\varphi = \lim_{n\to\infty}\varphi_n$. Luego usando la Proposición 33 tenemos

$$\begin{aligned} E\left[\operatorname*{essinf}_{\varphi\in\Phi}\varphi \mid \mathcal{G}\right] &= E\left[\lim_{n\to\infty}\varphi_n \mid \mathcal{G}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[\varphi_n \mid \mathcal{G}\right]. \end{aligned}$$

Pero ahora, como

$$\operatorname*{essinf}_{\varphi\in\Phi} E\left[\varphi \mid \mathcal{G}\right] \leq E\left[\varphi \mid \mathcal{G}\right] \qquad \text{para todo } \varphi \in \Phi,$$

entonces se concluye que

$$\operatorname*{essinf}_{\varphi\in\Phi} E\left[\varphi \mid \mathcal{G}\right] \leq \lim_{n\to\infty} E\left[\varphi_n \mid \mathcal{G}\right] = E\left[\operatorname*{essinf}_{\varphi\in\Phi}\varphi \mid \mathcal{G}\right].$$

■

D. Elementos necesarios de análisis convexo

En esta sección enunciaremos, en su mayoría sin demostración, algunos resultados de análisis funcional que son utilizados en el trabajo. Pueden encontrarse en cualquier libro avanzado de análisis funcional o de optimización.

Definición 35 *Un espacio lineal* $(E,+,\cdot)$ *sobre* $\mathbb{R}$ *que también tenga una topología* τ*, se dice espacio vectorial topológico si para todo* $x \in E$ *el conjunto* $\{x\}$ *es cerrado, y si las aplicaciones*

$$+ : E \times E \to E, \qquad (x,y) \longmapsto x+y$$

y

$$\cdot : \mathbb{R}\times E \to E, \qquad (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$$

son continuas (usando en los productos cartesianos las respectivas topologías producto) respecto a la topología τ*.*

Definición 36 *Un espacio vectorial topológico* E *se dice que es un espacio localmente convexo si su topología tiene una base consistente de conjuntos convexos.*

Si E es un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$, entonces las bolas abiertas

$$\{y \in Y : \|y-x\| < r\}, \qquad x \in E, r > 0,$$

forman por definición una base para la topología de E generada por la norma. Como tales bolas son conjuntos convexos, entonces todo espacio de Banach es localmente convexo.
El siguiente teorema es una variante del teorema clásico de Hahn-Banach sobre la existencia de "hiperplanos separantes".

Teorema 37 *(Hahn-Banach). Suponga que* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{C}$ *son dos subconjuntos convexos, no vacíos y ajenos de un espacio localmente convexo* E*. Entonces, si* $\mathcal{B}$ *es compacto y* $\mathcal{C}$ *es cerrado, existe un funcional lineal continuo* f *sobre* E *tal que*

$$\sup_{x\in\mathcal{C}} f(x) < \inf_{y\in\mathcal{B}} f(y).$$

Demostración. Ver [7], Teorema V.2.10. ■

Un corolario del resultado anterior es que, sobre un espacio localmente convexo E, el conjunto

$$E' := \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ es lineal y continuo}\}$$

separa los puntos de E, es decir, para dos puntos distintos $x, y \in E$ existe algún $f \in E'$ tal que $f(x) \neq f(y)$. El espacio E' es llamado el *espacio dual* de E.
Por ejemplo, es bien sabido que el espacio de Banach $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es el dual de L^1; es más, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 38 *Si* F *es funcional lineal y continuo sobre* $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, entonces existe* $\mathbb{P}$*-c.s. una única función* $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *que cumple*

$$F(g) = E[gf] \qquad \text{para todo } g \in L^1.$$

Demostración. Ver Teorema IX.9 de [6] ■

Definición 39 *Sea E un espacio lineal, y supongamos que F es una clase lineal de funcionales lineales sobre E que separa los puntos de E. La F-topología sobre E, que se denota por $\sigma(E, F)$, es la topología sobre E que se obtiene al tomar como base a todos los conjuntos de la forma*

$$\{y \in E : |f_i(y) - f_i(x)| < r, i = 1, ..., n\},$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x \in E$, $f_i \in F$ y $r > 0$. Si E ya tiene una topología localmente convexa, entonces la E'-topología $\sigma(E, E')$ es llamada la topología débil sobre E.

Proposición 40 *Considérense las hipótesis de la definición anterior. Entonces*
(a) E es espacio localmente convexo para la F-topología.
(b) El dual de E para la F-topología es igual a F.

Demostración. Ver Sección V.3 de [7]. ■

Para un espacio localmente convexo E dado, podemos voltear las cosas y considerar E como un conjunto de funcionales lineales sobre el espacio dual E' poniendo $x(f) := f(x)$ para $f \in E'$ y $x \in E$. La E-topología $\sigma(E', E)$ obtenida de esta manera es llamada *topología débil** sobre E'. Por ejemplo, se tiene que en general L^1 no es el dual de L^∞. Sin embargo, L^1 se vuelve el dual de L^∞ si dotamos a L^∞ con la topología débil* $\sigma\left(L^\infty, L^1\right)$

Observación 8 *A partir de la Proposiciones 40 y 38, tenemos que dotando a L^∞ con la topología $\sigma\left(L^\infty, L^1\right)$, para todo funcional lineal acotado $F : L^\infty \to \mathbb{R}$ existe un único ($\mathbb{P}$-c.s.) $Y \in L^1$ que cumple*

$$F(X) = E[XY] \qquad \text{, para todo } X \in L^\infty.$$

Entonces, combinando el Teorema 37, la Proposición 40 y la observación anterior se obtiene fácilmente el siguiente teorema

Teorema 41 *(Hiperplanos separantes). Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son dos subconjuntos convexos, no vacíos y ajenos de L^∞. Entonces, si $\mathcal{B}$ es $\sigma\left(L^\infty, L^1\right)$-compacto y $\mathcal{C}$ es $\sigma\left(L^\infty, L^1\right)$-cerrado, existe un único ($\mathbb{P}$-c.s.) $Y \in L^1$ tal que*

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} E[XY] < \inf_{Z \in \mathcal{B}} E[ZY].$$

Una de las razones para considerar la topología débil en un espacio de Banach, o más generalmente, sobre un espacio localmente convexo es que típicamente más conjuntos son compactos para la topología débil que para la topología original. Finalmente, tenemos la siguiente caracterización de los conjuntos débil* cerrados en L^∞.

Proposición 42 *Un subconjunto convexo $\mathcal{C}$ de L^∞ es débil* cerrado si para cada $r > 0$*

$$\mathcal{C}_r := \mathcal{C} \cap \{X \in L^\infty : \|X\|_\infty \leq r\}$$

es cerrado en L^1.

Demostración. Ver Lema A.64 en [9]. ∎

Para finalizar este apéndice, daremos algunos resultados que se ocuparon en la demostración del Lema 9 en la Sección 1. Son tomados de [4], dándoseles algunas modificaciones.

Definición 43 *Una función cóncava $\phi : L^\infty \to \mathbb{R}$ se dice que tiene la* propiedad de Fatou *si cualquier sucesión acotada $(X_n)_{n\geq 1} \subset L^\infty$ que convege en probabilidad a $X \in L^\infty$ cumple que*

$$\phi(X) \geq \limsup_{n\to\infty} \phi(X_n).$$

Lema 44 *Sea $\phi : L^\infty \to \mathbb{R}$ una función cóncava, creciente y continua por arriba en el sentido de la Definición 7. Entonces ϕ satisface la propiedad de Fatou.*

Demostración. Haremos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que existe una sucesión acotada $(X_n)_{n\geq 1} \subset L^\infty$ y $X \in L^\infty$ tales que X_n converge en probabilidad a X y

$$\limsup_{n\to\infty} \phi(X_n) > \phi(X).$$

Entonces existe una subsucesión $\left(X_{n_j}\right)_{j\geq 1}$ que converge $\mathbb{P}$-c.s. a X y

$$\limsup_{j\to\infty} \phi\left(X_{n_j}\right) > \phi(X). \tag{34}$$

La sucesión $(Y_j)_{j\geq 1}$ definida por

$$Y_j := \sup_{m\geq j} \left(X_{n_j} \vee X\right),$$

decrece $\mathbb{P}$-c.s. a X y por continuidad por arriba

$$\lim_{j\to\infty} \phi(Y_j) = \phi(X).$$

Dado que $Y_j \geq X_{n_j}$ y ϕ es creciente se tiene que

$$\lim_{j\to\infty} \phi(Y_j) \geq \limsup_{j\to\infty} \phi\left(X_{n_j}\right),$$

lo cual contradice a (34) y se llega al resultado. ∎

Lema 45 *Sea $\phi : L^\infty \to \mathbb{R}$ una función cóncava que satisface la propiedad de Fatou. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{C} := \{X \in L^\infty \mid \phi(X) \geq 0\}$$

es $\sigma\left(L^\infty, L^1\right)$-cerrado.

Demostración. Es claro que $\mathcal{C}$ es convexo. Sea $r > 0$, y definamos el conjunto

$$\mathcal{C}_r := \mathcal{C} \cap \{X \in L^\infty : \|X\|_\infty \leq r\}.$$

Sean $(X_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}_r$ y $X \in L^1$ tales que $X_n \to X$ en L^1. Usando que existe una subsucesión $\left(X_{n_j}\right)_{j\geq 1}$ que converge a X $\mathbb{P}$-c.s., es inmediato que $\|X\|_\infty \leq r$. Además, por la propiedad de Fatou

$$\phi(X) \geq \limsup_{n\to\infty} \phi(X_n) \geq 0.$$

Luego, usando la Proposición 42 se sigue el resultado. ■

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de los lemas anteriores:

Proposición 46 *Sea $\phi : L^\infty \to \mathbb{R}$ una función cóncava, creciente y continua por arriba en el sentido de la Definición 7. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{C} := \{X \in L^\infty \mid \phi(X) \geq 0\}$$

es $\sigma\left(L^\infty, L^1\right)$-cerrado.

Bibliografía y referencias

[1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J., Heath, D., *Coherent Risk Measures*, Mathematical Finance Vol. 9, 1999, Págs. 203-228.

[2] Albanese, C., *Credit Exposure, Diversification Risk and Coherent VaR.* Working paper, Departament of Mathematics, University of Toronto, 1997.

[3] Cheridito, P., Kupper, M., *Composition of Time-Consistent Dynamic Monetary Risk Measures in Discrete Time.* Preprint, 2009.

[4] Cheridito, P., Delbaen, F., Kupper, M., *Coherent and Convex Monetary Risk Measures for Bounded Càdlàg Processes.* Stochastic Processes and their Applications, Vol. 112, No. 1, 2004, Págs. 1–22.

[5] Detlefsen, K., Scandolo, G., *Conditional and dynamic convex risk measures.* Finance and Stochastics, Vol.6, No. 4, 2005, Págs. 429-447.

[6] Doob, J. L., *Measure Theory.* Springer-Verlang, New York, 1994.

[7] Dunford, N., Schwartz, J., *Linear Operators. Part I: General Theory.* Interscience Publishers, New York, 1958.

[8] Föllmer, H., Schied, A., *Robust Representation of Convex Measures of Risk*, Advances in Finance and Stochastics. Essays in Honour of Dieter Sondermann, Springer-Verlag, 2002, Págs. 39–56.

[9] Föllmer, H., Schied, A., *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*, Second Edition. Walter de Gruyter, Berlín, 2004.

[10] Jorion, P., *Value-at-Risk: The New Brenchmark for Managing Financial Risk.* Third Edition. McGraw-Hill, New York, 2007.

[11] Lleo, S., *Risk Management: A Review.* The Research Foundation of CFA Institute, 2009.

[12] Marrison, C., *The Fundamentals of Risk Measurement.* McGraw-Hill, New York, 2002.

[13] Rockafellar, T., Uryasev, S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk.* Journal of Risk, 2000, Vol. 2, No. 3, Págs. 21-41.

[14] Uribe, G., *Esperanza y Esperanza Condicional, Una Primera Aproximación.* Notas del Primer Verano de Probabilidad y Estadística de CIMAT. Versión Electrónica.

[15] Zălinescu, C., *Convex Analysis in General Vector Spaces.* World Scientific Publishing Co. late. Ltd, Singapur, 2002.