

# Optimalidad de la Estrategia de Barrera en el Problema de Dividendos de De Finetti para Procesos de Lévy Espectralmente Negativos y Métodos Numéricos

Harold Moreno

## Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Procesos de Lévy espectralmente negativos</b>	<b>3</b>
2.1	Funciones $q$ -escala . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Planteamiento del problema</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Métodos numéricos</b>	<b>27</b>
4.1	Métodos numéricos y funciones $q$ -escala . . . . .	30
4.1.1	Método 1: Integral de Inversión de Bromwich . . . . .	30
4.1.2	Método 2: Inversión Post-Widder . . . . .	32
4.1.3	Algunos ejemplos . . . . .	35
4.1.4	Aplicación del Método Inversión Post Widder al problema de dividendos . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>52</b>
<b>A</b>	<b>Apéndice</b>	<b>53</b>

## 1 Introducción

Este trabajo estudia el problema de pago óptimo de dividendos que hace una compañía de seguros a sus accionistas a partir de su proceso de riesgo (o superávit) hasta el momento en que ésta queda en ruina, utilizando el modelo de De Finetti [Fin57].

En el modelo originalmente propuesto por De Finetti [Fin57] se plantea el problema de determinar la estrategia óptima de pagos de dividendos a partir de un proceso de riesgo que se modela como una caminata aleatoria de saltos  $\pm 1$ , demostrando [Fin57] que el pago de la estrategia de dividendos óptima es una estrategia de barrera. Es decir, existe una

constante mayor o igual a cero tal que el excedente entre el proceso de riesgo y la constante en cada tiempo es pagado a los poseedores de las acciones.

En el caso en que el proceso de riesgo es a tiempo continuo, el problema de encontrar una estrategia de barrera que sea la estrategia de dividendos óptima ha sido estudiado extensamente cuando el proceso de riesgo es un movimiento browniano estándar con deriva [Ger69, ZPS95, Tak00], un proceso de Cramer-Lundberg [AM05, Büh96, Ger69, Sch06, Zho05] o un proceso de difusión [AHT00, AT97].

Recientemente el problema de De Finetti ha sido estudiado cuando el proceso de riesgo es un proceso de Lévy espectralmente negativo [APP07, KP07, Loe08, RZ07, Zho06]. Dado que el superávit de una compañía de seguros varía a cada instante de tiempo hasta el momento en que paga las reclamaciones a sus clientes, el proceso de Lévy espectralmente negativo es una buena aproximación para modelar este superávit, ya que una de las características de éste es que sus trayectorias no son monótonas y tienen saltos no-positivos. Además, se puede ver que los dos primeros modelos mencionados en el párrafo anterior son procesos de Lévy espectralmente negativos [Fur98, HPŠV04, KP07].

En este trabajo se estudiarán condiciones suficientes para que la estrategia óptima de dividendos sea una estrategia de barrera, en el caso en que el proceso de riesgo es un proceso de Lévy espectralmente negativo, y veremos la relación que hay con las funciones  $q$ -escala, las cuales determinan a este proceso.

En los trabajos de R. L. Loeffen [Loe08], F. Avram, Z. Palmowski y M. R. Pistorius [APP07], J. -F. Renaud y X. Zhou [RZ07] y X. Zhou [Zho06], muestran la relación explícita que hay entre las funciones de valor y las funciones  $q$ -escala cuando la estrategia de pagos es una estrategia de barrera. Además, en los dos primeros trabajos definen una estrategia de barrera, cuyo nivel queda determinado por las funciones  $q$ -escala y estudian condiciones suficientes para que ésta sea la estrategia de dividendos óptima. Cabe mencionar que las definiciones de dicha estrategia de barrera en los dos trabajos son diferentes entre sí.

Como se verá posteriormente, las funciones  $q$ -escala están determinadas por su transformada de Laplace y en pocos casos se puede determinar explícitamente éstas. Se estudiarán dos métodos numéricos, Integral de Inversión de Bromwich e Inversión Post-Widder, que nos ayudarán a aproximarnos a estas funciones a partir de la inversión de la transformada de Laplace, y en consecuencia tener aproximaciones de la estrategia de barrera óptima y la función de valor correspondiente. Para hacer uso de estos métodos numéricos se debe estudiar primero la relación que hay entre la función de renovación de cierto subordinador y las funciones  $q$ -escala.

El resto de la tesina está organizada de la siguiente manera. En la sección 2 se definirá el proceso de Lévy espectralmente negativo, su exponente de Laplace y las funciones  $q$ -escala. Se mencionarán algunas de sus propiedades y se verá la relación que hay entre las funciones  $q$ -escala y las trayectorias del proceso de Lévy espectralmente negativo. Además, se darán algunas de las condiciones suficientes para que las funciones  $q$ -escala sean suficientemente suaves. Para el estudio de las funciones  $q$ -escala y las condiciones suficientes y necesarias para que éstas sean suficientemente suaves, el lector se puede referir a: [Kyp06], [Ber96] y [CKS09].

En la sección 3 se planteará el problema de dividendos. Se definirá una estrategia de dividendos, una estrategia de dividendo admisible, la función de valor y una estrategia de barrera al nivel de una constante mayor o igual a cero. Se verá que el problema de encontrar

una estrategia de dividendos óptima es un problema de control estocástico. Además, se tendrá la relación que hay entre las funciones  $q$ -escala y la función de valor de una estrategia de barrera. Por último, se estudiarán condiciones suficientes para que la estrategia de dividendos óptima sea una estrategia de barrera. Para esta parte seguimos los artículos de R. L. Loeffen [Loe08], F. Avram, Z. Palmowski, y M. R. Pistorius [APP07], J. -F. Renaud y X. Zhou [RZ07], y X. Zhou [Zho06].

Finalizando, en la sección 4, se hablará acerca de la relación que hay entre las funciones  $q$ -escala y la función de renovación de un subordinador conocido como de escala ascendente. Luego, se estudiarán dos métodos numéricos, Integral de Inversión de Bromwich e Inversión Post-Widder, que se aplicarán en la obtención de aproximaciones a las funciones  $q$ -escala, las cuales se ilustrarán en tres ejemplos. En dos de los ejemplos las funciones  $q$ -escala están dadas explícitamente, lo que nos da pie a compararlas con las aproximaciones que nos dan estos dos métodos numéricos.

En la última parte de esta sección se usarán dos de los tres ejemplos mencionados anteriormente para ver gráficamente las condiciones suficientes que se tratan en la sección 3 y tener una aproximación de la barrera óptima. Además, se obtendrán ilustraciones de estas condiciones suficientes y aproximaciones de la barrera óptima a partir del método de Post-Widder. Para esta sección se trabajó con los artículos de J. Abate, G. L. Choudhury y W. Whitt [ACW00], W. Feller [Fel71], trabajos que mencionan los métodos numéricos Integral de Inversión de Bromwich e Inversión Post-Widder; L. Chaumont, A. Kyprianou y J. C. Pardo [CKP09], A. E. Kyprianou y V. Rivero [KR08], estos estudian y dan ejemplos de funciones  $q$ -escala; y por último el de M. Veillette y M. S. Taquq [VT10], aplica los métodos numéricos mencionados antes para aproximar la función de renovación de un subordinador.

## 2 Procesos de Lévy espectralmente negativos

Un proceso  $X = \{X_t : t \geq 0\}$  definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ , donde la filtración  $\mathbb{F}$  satisface las condiciones de completez y continuidad por la derecha, es un proceso de Lévy si cumple las siguientes propiedades:

1. Las trayectorias de  $X$  son continuas por la derecha con límites por la izquierda casi seguramente.
2.  $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$ .
3. Para todo  $0 \leq s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  es igual en distribución a  $X_{t-s}$ .
4. Para todo  $0 \leq s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  es independiente de  $\{X_u : u \leq s\}$ .

Definamos a  $\{\mathbb{P}_x : x \in \mathbb{R}\}$  como la familia de medidas de probabilidad correspondientes a la traslación de  $X$  con condición inicial  $X_0 = x$ , donde  $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}$ . El valor esperado con respecto a  $\mathbb{P}_x$  se denota por  $\mathbb{E}_x$ .

Los procesos de Lévy se pueden clasificar a partir de sus trayectorias, es decir, éstas pueden ser o bien monótonas o no-monótonas. Si las trayectorias de un proceso de Lévy  $X$  son no-decrescentes casi seguramente se le llama subordinador; si las trayectorias de este

proceso son no-monótonas con saltos no-positivos se le llama proceso de Lévy espectralmente negativo.

Por la fórmula de Lévy-Khintchine [Kyp06, Teorema 1.6], el proceso de Lévy  $X$  está determinado por la tripleta  $(\gamma, \sigma, \nu)$ , donde  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \geq 0$  y  $\nu$  es una medida en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (1 \wedge |x|^2) \nu(dx) < \infty. \quad (2.1)$$

Además, su exponente característico está dado por

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda) &= -\log(\mathbb{E}(e^{i\lambda X_1})) \\ &= i\gamma\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}}) \nu(dx), \end{aligned}$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Observe que la medida  $\nu$  es la medida de saltos del proceso de Lévy  $X$ . Quiere decir que si  $X$  es un subordinador,  $\nu((-\infty, 0)) = 0$ . Y si  $X$  es un proceso de Lévy espectralmente negativo,  $\nu((0, \infty)) = 0$ .

Salvo que se diga lo contrario, en lo que resta de esta sección se considerará al proceso  $X$  como un proceso de Lévy espectralmente negativo que está determinado por la tripleta  $(\gamma, \sigma, \nu)$ , donde  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \geq 0$  y  $\nu$  es una medida de saltos en  $(-\infty, 0)$  que satisface la ecuación (2.1). Quiere decir que su exponente de Laplace está dado por

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) &= \log(\mathbb{E}(e^{\lambda X_1})) \\ &= -\gamma\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{(-\infty, 0)} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{\{x > -1\}}) \nu(dx), \end{aligned} \quad (2.2)$$

para todo  $\lambda \geq 0$ . Entonces la función  $\psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tiene las siguientes propiedades, cuyas demostraciones se encuentran en el Apéndice A:

1. Es infinitamente diferenciable en  $[0, \infty)$ .
2. Es estrictamente convexa en  $[0, \infty)$ .
3.  $\psi(0) = 0$  y  $\psi(\infty) = \infty$ .

A partir de estas propiedades se sigue que  $\mathbb{E}(X_1) = \psi'(0+) \in [-\infty, \infty)$ . Definiendo a la función  $\Phi(q)$ , como la raíz más grande de la ecuación  $\psi(\lambda) = q$ , es decir

$$\Phi(q) = \sup\{\lambda \geq 0 : \psi(\lambda) = q\}, \text{ para todo } q \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

se afirma que:

1. Si  $\mathbb{E}(X_1) \geq 0$ , la función  $\Phi(q)$  es la única solución a la ecuación  $\psi(\lambda) = q$ , para todo  $q \geq 0$ .
2. Si  $\mathbb{E}(X_1) < 0$ , la función  $\Phi(q)$  es la única solución a la ecuación  $\psi(\lambda) = q$ , para todo  $q > 0$ . En el caso en que  $q = 0$ , la ecuación  $\psi(\lambda) = 0$  va a tener dos raíces, a saber 0 y  $\Phi(0)$ .

3. La función  $\psi$  es estrictamente creciente y la función  $\Phi$  es la inversa de  $\psi$  en el intervalo  $[\Phi(0), \infty)$ .

Otra manera de ver la expresión (2.2) es de la siguiente forma

$$\psi(\lambda) = \left( -\gamma\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 \right) + \left( \nu((-\infty, -1]) \int_{(-\infty, -1]} (e^{\lambda x} - 1) \frac{\nu(dx)}{\nu((-\infty, -1])} \right) + \left( \int_{(-1, 0)} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x) \nu(dx) \right),$$

para todo  $\lambda \geq 0$ . Observe que los tres sumandos de la ecuación anterior son los correspondientes exponentes de Laplace de ciertos procesos de Lévy independientes, lo cual nos sugiere que el proceso  $X$  está determinado por la suma de éstos. Es decir, por el Teorema de la Descomposición de Itô [Kyp06, Teorema 2.1], se tiene que

$$X_t = (\sigma B_t - \gamma t) + \left( \int_{[0, t]} \int_{(-\infty, -1]} x N(ds \times dx) \right) + \left( \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{[0, t]} \int_{(-1, -\varepsilon]} x (N(ds \times dx) - \nu(dx) ds) \right), \text{ para todo } t \geq 0, \quad (2.4)$$

donde  $\{B_t : t \geq 0\}$  es un movimiento browniano estándar y  $N$  es la medida aleatoria de Poisson en  $([0, \infty) \times (-\infty, 0)$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $dt \times \nu(dx)$ ), siendo  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}(-\infty, 0)$ . El segundo sumando de la ecuación anterior es un proceso de Poisson compuesto con tasa  $\nu((-\infty, -1])$  y distribución de saltos no positivos

$$\nu((-\infty, -1])^{-1} \nu(dx)|_{(-\infty, -1]}.$$

El último sumando de la ecuación es una martingala cuadrado integrable con un número de saltos denso de tamaño menor que uno en cada intervalo finito casi seguramente.

Otra de las propiedades que tiene el proceso  $X$ , es que sus trayectorias son de variación acotada o de variación no acotada.

Condiciones necesarias y suficientes para que el proceso  $X$  tenga trayectorias de variación acotada son que [Kyp06, Lema 2.12]

$$\sigma = 0 \quad \text{y} \quad \int_{(-\infty, 0)} (1 \wedge |x|) \nu(dx) < \infty.$$

Lo cual nos lleva a que el exponente de Laplace, ecuación (2.2), tome la forma

$$\psi(\lambda) = d\lambda - \int_{(-\infty, 0)} (1 - e^{\lambda x}) \nu(dx), \text{ para todo } \lambda \geq 0, \quad (2.5)$$

donde la deriva

$$d = -\gamma - \int_{-1}^0 x \nu(dx) > 0, \quad (2.6)$$

porque si no lo fuese, se sigue que  $\psi$  es el exponente de Laplace de un subordinador decreciente, es decir, un proceso de Lévy cuyas trayectorias son no-crecientes casi seguramente,

lo que nos lleva a perder la propiedad de no-monotonía de las trayectorias de un proceso de Lévy espectralmente negativo.

La ecuación (2.5) puede ser vista también como

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda) &= d\lambda - \int_{(-\infty,0)} (1 - e^{\lambda x}) \nu(dx) \\
&= d\lambda - \lambda \int_{(-\infty,0)} \int_{(x,0)} e^{\lambda y} dy \nu(dx) \\
&= d\lambda - \lambda \int_{(-\infty,0)} e^{\lambda y} \bar{\nu}(y) dy,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

para todo  $\lambda \geq 0$ , donde  $\bar{\nu}(y) = \int_{(-\infty,y)} \nu(dx)$ , para todo  $y \leq 0$ .

**Proposición 1.** (i) Sea la función  $\psi$  como en (2.2). Entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda^2} = \frac{\sigma^2}{2},$$

donde  $\sigma \geq 0$  es el coeficiente gaussiano.

(ii) Si  $X$  tiene trayectorias de variación acotada, entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} = d,$$

donde  $d$  es el coeficiente de deriva dado por (2.6).

**Demostración.** (i) Sea la función  $\psi$  como en (2.2). Tomando  $\lambda \rightarrow \infty$  se tiene que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda^2} = \frac{\sigma^2}{2} + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{(-\infty,0)} \frac{e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{\{x > -1\}}}{\lambda^2} \nu(dx).$$

Para usar el Teorema de Convergencia Dominada en la ecuación anterior, se debe acotar  $\frac{|e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{\{x > -1\}}|}{\lambda^2}$  por una función  $g(x)$  integrable.

Si  $x \leq -1$ ,

$$\frac{|e^{\lambda x} - 1|}{\lambda^2} \leq 1, \text{ para todo } \lambda > 1,$$

Observe que por (2.1) la función constante 1 es integrable en  $[-\infty, -1]$ .

Sea  $x \in (-1, 0)$ . Entonces, teniendo en cuenta las ecuaciones (A.2) y (A.3) se puede ver que

$$\left| \frac{e^{\lambda x} - 1 - \lambda x}{\lambda^2} \right| \leq \frac{1}{2} |x|^2, \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Por la ecuación (2.1) la función  $\frac{1}{2} |x|^2$  es integrable en  $(-1, 0)$ . Entonces,

$$\frac{|e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{\{x > -1\}}|}{\lambda^2} \leq \mathbb{1}_{\{x \leq -1\}} + \frac{1}{2} |x|^2 \mathbb{1}_{\{x > -1\}},$$

para todo  $\lambda > 1$ .

Por lo tanto, usando el Teorema de Convergencia Dominada tenemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda^2} = \frac{\sigma^2}{2} + \int_{(-\infty, 0)} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{\{x > -1\}}}{\lambda^2} \nu(dx) = \frac{\sigma^2}{2}.$$

- (ii) Teniendo en cuenta la manera en que está escrita  $\psi$  en la ecuación (2.7) y tomando el cociente entre ésta y  $\lambda$  se sigue que

$$\frac{\psi(\lambda)}{\lambda} = d - \int_{(-\infty, 0)} e^{\lambda y} \bar{\nu}(y) dy. \quad (2.8)$$

Entonces, tomando  $\lambda \rightarrow \infty$  en (2.8) tenemos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} = d - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{(-\infty, 0)} e^{\lambda y} \bar{\nu}(y) dy.$$

Como  $e^{\lambda y} \bar{\nu}(y) \downarrow 0$  cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ , por el Teorema de Convergencia Monótona se llega a que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} = d. \quad \square$$

Definiendo el proceso  $\xi(c) = \{\xi_t(c) : t \geq 0\}$ , con  $c \geq 0$ , como

$$\xi_t(c) = e^{cX_t - \psi(c)t}, \text{ para todo } t \geq 0,$$

es fácil verificar que éste es una  $\mathbb{P}$ -martingala con respecto a la filtración  $\mathbb{F}$ . Tomando  $s \leq t$  y  $c \geq 0$ , se sigue por definición de un proceso de Lévy espectralmente negativo que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{cX_t - \psi(c)t} | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(e^{c(X_t - X_s) + X_s - \psi(c)t} | \mathcal{F}_s) \\ &= e^{X_s - \psi(c)t} \mathbb{E}(e^{c(X_t - X_s)}) \\ &= e^{X_s - \psi(c)t} \mathbb{E}(e^{c(X_{t-s})}) \\ &= e^{X_s - \psi(c)t + \psi(c)(t-s)} \\ &= e^{X_s - \psi(c)s}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el proceso  $\xi(c)$ , con  $c \geq 0$ , es una  $\mathbb{P}$ -martingala con respecto a la filtración  $\mathbb{F}$ .

Como  $\mathbb{E}(\xi_t(c)) = 1$ , para todo  $t, c \geq 0$ , el proceso  $\xi(c)$  se puede usar para definir una nueva medida de probabilidad  $\frac{d\mathbb{P}^c}{d\mathbb{P}}$  sobre la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  de la siguiente manera

$$\left. \frac{d\mathbb{P}^c}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = \xi_t(c), \text{ para todo } t, c \geq 0. \quad (2.9)$$

A partir de esta medida de probabilidad se tiene que si  $X$  es un proceso de Lévy espectralmente negativo respecto a la medida de probabilidad  $\mathbb{P}$ , también lo es respecto a la medida de probabilidad  $\mathbb{P}^c$ , lo cual se sigue porque la medida de probabilidad  $\mathbb{P}^c$  es absolutamente continua con respecto a la medida de probabilidad  $\mathbb{P}$ . Por otro lado, el

exponente de Laplace en la nueva medida de probabilidad está dado por [Kyp06, Corolario 3.10]

$$\begin{aligned}
\psi_c(\lambda) &= \log(\mathbb{E}^c(e^{\lambda X_1})) = \psi(\lambda + c) - \psi(c) \\
&= -\gamma\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \sigma^2c\lambda - \int_{(-\infty,0)} \lambda x \mathbb{1}_{\{x > -1\}} \nu(dx) \\
&\quad + \int_{(-\infty,0)} ((e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{\{x > -1\}})e^{cx} + \lambda x e^{cx} \mathbb{1}_{\{x > -1\}}) \nu(dx) \\
&= \left( \sigma^2c - \gamma + \int_{(-\infty,0)} x(e^{cx} - 1) \mathbb{1}_{\{x > -1\}} \nu(dx) \right) \lambda \\
&\quad + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{(-\infty,0)} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{\{x > -1\}}) e^{cx} \nu(dx),
\end{aligned}$$

para todo  $\lambda \geq -c$ , donde  $\mathbb{E}^c$  es el valor esperado con respecto a la medida de probabilidad  $\mathbb{P}^c$ .

Esto quiere decir que el proceso de Lévy  $X$ , bajo la probabilidad  $\mathbb{P}^c$ , está determinado por la tripleta  $(\gamma^*, \sigma^*, \nu^*)$ , donde

$$\gamma^* = -\sigma^2c + \gamma + \int_{(-\infty,0)} x(1 - e^{cx}) \mathbb{1}_{\{x > -1\}} \nu(dx), \quad \sigma^* = \sigma, \quad \text{y} \quad \nu^*(dx) = e^{cx} \nu(dx).$$

Note que el proceso  $X$  es de variación acotada en  $\mathbb{P}$  si y sólo si  $X$  es de variación acotada en  $\mathbb{P}^c$ . Quiere decir que cuando  $\sigma = 0$ ,

$$\int_{(-\infty,0)} (1 \wedge |x|) \nu(dx) < \infty \text{ si y sólo si } \int_{(-\infty,0)} (1 \wedge |x|) e^{cx} \nu(dx) < \infty,$$

lo cual nos lleva a que

$$\psi_c(\lambda) = d\lambda - \int_{(-\infty,0)} (1 - e^{\lambda x}) e^{cx} \nu(dx).$$

Tomando  $c = \Phi(q)$ , con  $q \geq 0$ , donde  $\Phi(q)$  es definido como la ecuación (2.3), podemos ver que

$$\psi_{\Phi(q)}(\lambda) = \psi(\lambda + \Phi(q)) - q, \text{ para todo, } \lambda \geq -\Phi(q). \quad (2.10)$$

De aquí que

$$\psi'_{\Phi(q)}(0) = \psi'(\Phi(q)) \geq 0.$$

## 2.1 Funciones $q$ -escala

Una de las características que tiene el proceso  $X$  [Kyp06, Teorema 8.1] es que para todo  $q \geq 0$  existe una función  $W^{(q)} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ , tal que  $W^{(q)}(x) = 0$  si  $x < 0$ , y para  $x \in [0, \infty)$ ,  $W^{(q)}(x)$  es una función continua, no decreciente y cuya transformada de Laplace está dada por

$$\int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x} W^{(q)}(x) dx = \frac{1}{\psi(\lambda) - q}, \text{ para todo } \lambda > \Phi(q). \quad (2.11)$$

A la función  $W^{(q)}$  se le llama función  $q$ -escala de  $X$ ; la función  $W^{(0)}$  la denotaremos por  $W$ .

Al considerar la medida de probabilidad  $\mathbb{P}^{\Phi(q)}$ , con  $q > 0$ , se puede ver que

$$\psi_{\Phi(q)}(\lambda - \Phi(q)) = \psi(\lambda) - q, \text{ para todo } \lambda > 0, \quad (2.12)$$

lo cual nos lleva a que toda función  $q$ -escala la podemos representar mediante la función  $W_{\Phi(q)}$ , bajo la medida de probabilidad  $\mathbb{P}^{\Phi(q)}$ , cuya transformada de Laplace es

$$\int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x} W_{\Phi(q)}(x) dx = \frac{1}{\psi_{\Phi(q)}(\lambda)}, \text{ para todo } \lambda > 0. \quad (2.13)$$

En consecuencia, teniendo en cuenta las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13) se puede ver que

$$\int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x} W^{(q)}(x) dx = \int_{(0,\infty)} e^{-(\lambda - \Phi(q))x} W_{\Phi(q)}(x) dx.$$

Por lo tanto, la función  $q$ -escala bajo la medida de probabilidad  $\mathbb{P}$ , queda determinada bajo la medida  $\mathbb{P}^{\Phi(q)}$ , de la siguiente manera

$$W^{(q)}(x) = e^{x\Phi(q)} W_{\Phi(q)}(x), \quad (2.14)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  y para todo  $q > 0$ .

Una de las aplicaciones más interesantes que tienen las funciones  $q$ -escala es que aparecen en el cálculo de la transformada de Laplace del primer tiempo de salida de  $X$  por la parte superior del intervalo  $[0, a]$ , donde  $a > 0$  y  $x \in [0, a]$  es el valor inicial de  $X$ . Es decir, para  $a > 0$  fijo,  $x \in [0, a]$  y definiendo el primer tiempo de salida del proceso  $X$  del intervalo  $[0, a]$  como

$$\tau_{[0,a]} = \inf\{t \geq 0 : X(t) \notin [0, a]\},$$

entonces [Kyp06, Teorema 8.1]

$$\mathbb{E}_x \left( e^{-q\tau_{[0,a]}} \mathbb{1}_{\{X_{\tau_{[0,a]}} = a\}} \right) = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}, \text{ para todo } q \geq 0. \quad (2.15)$$

Consecuentemente, la probabilidad del primer tiempo de salida por la parte superior del intervalo  $[0, a]$ , está dada en terminos de la función  $W$ , es decir, cuando  $q = 0$  se tiene que

$$\mathbb{P}_x(X_{\tau_{[0,a]}} = a) = \frac{W(x)}{W(a)}.$$

**Lema 2.** Para todo  $a > 0$  y para todo  $q \geq 0$ , el proceso

$$\{e^{-q(t \wedge \tau_{[0,a]})} W^{(q)}(X_{t \wedge \tau_{[0,a]}}) : t \geq 0\},$$

es una  $\mathbb{P}_x$ -martingala.

**Demostración.** Sean  $a, t > 0$  y  $q \geq 0$ . Entonces, aplicando la Propiedad Fuerte de Markov, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left( e^{-q\tau_{[0,a]}} \mathbb{1}_{\{X_{\tau_{[0,a]}}=a\}} \middle| \mathcal{F}_{t \wedge \tau_{[0,a]}} \right) &= \mathbb{E}_x \left( e^{-q\tau_{[0,a]}} \mathbb{1}_{\{X_{\tau_{[0,a]}}=a\}} \mathbb{1}_{\{t \leq \tau_{[0,a]}\}} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &\quad + \mathbb{E}_x \left( e^{-q\tau_{[0,a]}} \mathbb{1}_{\{X_{\tau_{[0,a]}}=a\}} \mathbb{1}_{\{t > \tau_{[0,a]}\}} \middle| \mathcal{F}_{\tau_{[0,a]}} \right) \\ &= e^{-qt} \mathbb{E}_{X_t} \left( e^{-q\tau_{[0,a]}} \mathbb{1}_{\{X_{\tau_{[0,a]}}=a\}} \right) \mathbb{1}_{\{t \leq \tau_{[0,a]}\}} \\ &\quad + e^{-q\tau_{[0,a]}} \mathbb{1}_{\{X_{\tau_{[0,a]}}=a\}} \mathbb{1}_{\{t > \tau_{[0,a]}\}}. \end{aligned}$$

Como  $W^{(q)}(x) = 0$ , para todo  $x < 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} W^{(q)}(X_{\tau_{[0,a]}}) &= W^{(q)}(a) \mathbb{1}_{\{X_{\tau_{[0,a]}}=a\}} + W^{(q)}(X_{\tau_{[0,a]}}) \mathbb{1}_{\{X_{\tau_{[0,a]}} < 0\}} \\ &= W^{(q)}(a) \mathbb{1}_{\{X_{\tau_{[0,a]}}=a\}}. \end{aligned}$$

De la anterior igualdad y de la ecuación (2.15) se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left( e^{-q\tau_{[0,a]}} \mathbb{1}_{\{X_{\tau_{[0,a]}}=a\}} \middle| \mathcal{F}_{t \wedge \tau_{[0,a]}} \right) &= e^{-qt} \frac{W^{(q)}(X_t)}{W^{(q)}(a)} \mathbb{1}_{\{t \leq \tau_{[0,a]}\}} \\ &\quad + e^{-q\tau_{[0,a]}} \frac{W^{(q)}(X_{\tau_{[0,a]}})}{W^{(q)}(a)} \mathbb{1}_{\{t > \tau_{[0,a]}\}} \\ &= e^{-q(t \wedge \tau_{[0,a]})} \frac{W^{(q)}(X_{t \wedge \tau_{[0,a]}})}{W^{(q)}(a)}. \end{aligned}$$

Definiendo el proceso  $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$  como

$$Y_t = \mathbb{E}_x \left( e^{-q\tau_{[0,a]}} W^{(q)}(a) \mathbb{1}_{\{X_{\tau_{[0,a]}}=a\}} \middle| \mathcal{F}_{t \wedge \tau_{[0,a]}} \right), \text{ para todo } t \geq 0,$$

se puede ver que este proceso es una  $\mathbb{P}_x$ -martingala, por lo que se sigue que

$$\{e^{-q(t \wedge \tau_{[0,a]})} W^{(q)}(X_{t \wedge \tau_{[0,a]}}) : t \geq 0\},$$

es también una  $\mathbb{P}_x$ -martingala. □

Otra de las cosas que podemos ver acerca de las funciones  $q$ -escala, es que a partir de su origen podemos obtener información sobre las trayectorias del proceso de Lévy  $X$ . A saber [Kyp06, Lema 8.6]:

1. El proceso  $X$  es de variación no acotada si y sólo si

$$W^{(q)}(0) = 0. \tag{2.16}$$

2. El proceso  $X$  es de variación acotada si y sólo si

$$W^{(q)}(0) = \frac{1}{d}, \quad (2.17)$$

donde  $d > 0$  es la deriva definida en la ecuación (2.6).

En este trabajo consideraremos que las funciones  $q$ -escala son suficientemente suaves. A saber, una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = 0$  en  $x \in (-\infty, 0)$  es llamada suficientemente suave en el punto  $x > 0$  si  $f$  es continuamente diferenciable en  $x$  cuando  $X$  es de variación acotada y es dos veces continuamente diferenciable en  $x$  si  $X$  es de variación no acotada. Entonces, una función es suficientemente suave si es suficientemente suave en todo  $x > 0$ . La derivada de  $W^{(q)}$  la denotaremos por  $W^{(q)'}$ . Para ver condiciones suficientes y necesarias para que  $W^{(q)}$  sea suficientemente suave remítase a [CKS09].

**Lema 3.** Sea  $q \geq 0$ . Entonces

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} W^{(q)'}(z) dz = \frac{\lambda}{\psi(\lambda) - q} - W^{(q)}(0), \quad \text{para todo } \lambda > \Phi(q). \quad (2.18)$$

**Demostración.** Sea  $q \geq 0$ . Por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$W^{(q)}(x) = \int_{(0,x]} W^{(q)'}(z) dz + W^{(q)}(0), \quad \text{para todo } x > 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda x} W^{(q)}(x) dx &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \left( \int_{(0,x]} W^{(q)'}(z) dz + W^{(q)}(0) \right) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda z} W^{(q)'}(z)}{\lambda} dz + \frac{W^{(q)}(0)}{\lambda}, \end{aligned}$$

para todo  $\lambda > 0$ .

Por lo tanto, teniendo en cuenta la ecuación (2.11) y la igualdad anterior, se llega a que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} W^{(q)'}(z) dz = \frac{\lambda}{\psi(\lambda) - q} - W^{(q)}(0), \quad \text{para todo } \lambda > \Phi(q). \quad \square$$

La siguiente proposición está ligada a la siguiente sección de una manera explícita, ya que nos ayudará a ver que la función de valor está bien definida.

**Proposición 4.** Sea  $q \geq 0$ . Entonces,

- (i) Si  $X$  es de variación no acotada entonces  $W^{(q)'}(0) = \frac{2}{\sigma^2}$ , donde  $\sigma$  es el coeficiente gaussiano.
- (ii) Si  $X$  es de variación acotada entonces  $W^{(q)'}(0) = \frac{\bar{\nu}(0) + q}{d^2}$ , donde

$$\bar{\nu}(y) = \int_{(-\infty, y)} \nu(dy), \quad \text{para todo } y \leq 0.$$

**Demostración.** Sea  $q \geq 0$ . Por integración por partes se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\lambda x} W^{(q)'}(x) - W^{(q)'}(0) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} W^{(q)'}(dx) - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} W^{(q)'}(x) dx.$$

Como  $\int_0^\infty W^{(q)'}(z) e^{-\lambda z} dz$  es finita, ecuación (2.18), se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\lambda x} W^{(q)'}(x) = 0,$$

entonces

$$-W^{(q)'}(0) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} W^{(q)'}(dx) - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} W^{(q)'}(x) dx.$$

Por el Lema 3 se puede ver que

$$-W^{(q)'}(0) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} W^{(q)'}(dx) - \left( \frac{\lambda^2}{\psi(\lambda) - q} - \lambda W^{(q)}(0) \right).$$

Tomando el límite cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  en la igualdad anterior se llega a que

$$W^{(q)'}(0) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{\lambda^2}{\psi(\lambda) - q} - \lambda W^{(q)}(0) \right). \quad (2.19)$$

Usando el hecho anterior, se sigue que:

- (i) Si  $X$  es de variación no acotada entonces por la Proposición 1 y la ecuación (2.16), la ecuación (2.19) queda de la manera

$$W^{(q)'}(0) = \frac{2}{\sigma^2}.$$

- (ii) Si  $X$  es de variación acotada entonces por (2.7) y (2.17) tenemos que la ecuación (2.19) queda de la forma

$$\begin{aligned} W^{(q)'}(0) &= \frac{1}{d} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\infty}^0 \lambda e^{\lambda x} \bar{\nu}(x) dx + q}{d - \int_{-\infty}^0 e^{\lambda x} \bar{\nu}(x) dx - \frac{q}{\lambda}} \\ &= \frac{1}{d} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\infty}^0 (1 - e^{\lambda z}) \nu(dz) + q}{d - \int_{-\infty}^0 e^{\lambda x} \bar{\nu}(x) dx - \frac{q}{\lambda}} \\ &= \frac{\bar{\nu}(0) + q}{d^2}. \end{aligned} \quad \square$$

### 3 Planteamiento del problema

Como el superavit de una compañía de seguros varía a cada instante de tiempo hasta el momento en que paga las reclamaciones a sus clientes, modelaremos a éste como un proceso de Lévy espectralmente negativo  $X$ , con valor inicial  $X_0 = x$ , ya que una de las propiedades que tiene este proceso es que sus trayectorias son no monótonas con saltos no-positivos. Quiere decir que  $x$  es el capital inicial de la compañía. De ahora en adelante al proceso  $X$  le llamaremos proceso de riesgo.

Al proceso de riesgo le queremos descontar los dividendos que se les debe pagar a los inversionistas bajo cierta estrategia. Dicha estrategia debe ser de tal manera que la aseguradora no se vaya a la ruina.

Una estrategia de dividendos  $\pi = \{L_t^\pi : t \geq 0\}$  es un proceso  $\mathbb{F}$ -adaptado, no decreciente, continuo a izquierda y cuyo valor inicial  $L_0 = 0$ , donde  $L_t^\pi$  representa los dividendos acumulados pagados hasta el tiempo  $t$ . Entonces, el proceso de riesgo con capital inicial  $x \geq 0$  que es controlado bajo la dinámica de  $\pi$  está dado por  $U^\pi = \{U_t^\pi : t \geq 0\}$ , donde

$$U_t^\pi = X_t - L_t^\pi, \text{ con } X_0 = x, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Sea  $\sigma^\pi = \inf\{t \geq 0 : U_t^\pi < 0\}$  el tiempo en que ocurre el primer tiempo de ruina del proceso de riesgo  $U^\pi$ . Como queremos tener estrategias de dividendos tales que la aseguradora no se vaya a la ruina al pagarlos, consideraremos estrategias  $\pi$  que cumplan la siguiente condición

$$L_{t+}^\pi - L_t^\pi \leq U_t^\pi, \text{ para todo } t < \sigma^\pi.$$

Tales estrategias se les llama estrategias de dividendos admisibles. Al conjunto de todas las estrategias que cumplan la anterior condición se le denotará por  $\Pi$ .

Definimos la función de valor de una estrategia de dividendos  $\pi$  por

$$v_\pi(x) = \begin{cases} \mathbb{E}_x \left( \int_0^{\sigma^\pi} e^{-qt} dL_t^\pi \right), & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

donde  $q > 0$  es la tasa de descuento. La función de valor es la utilidad que esperan obtener los inversionistas por haber invertido en la compañía aseguradora bajo la tasa de descuento  $q$ .

El problema de encontrar una estrategia óptima de dividendos termina siendo un problema de control estocástico, que consiste en encontrar una función de valor óptima  $v_*$  dada por

$$v_*(x) = \sup_{\pi \in \Pi} v_\pi(x), \text{ para todo } x \geq 0,$$

y una estrategia óptima  $\pi_* \in \Pi$  tal que

$$v_{\pi_*}(x) = v_*(x), \text{ para todo } x \geq 0.$$

Una de las tareas de este trabajo es estudiar condiciones suficientes para que la estrategia óptima de dividendos sea una estrategia de barrera. Es decir, consideremos la

estrategia de barrera al nivel  $a$ ,  $\pi_a = \{L_t^a : t \geq 0\}$ , definida por

$$L_t^a = \begin{cases} \sup_{0 < s \leq t} (X_s - a)^+, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

y denotemos como  $v_a$  a la función de valor de la estrategia de dividendos  $\pi_a$ . Entonces, queremos ver condiciones suficientes tales que  $v_*(x) = v_a(x)$ , para todo  $x \geq 0$ , para un cierto  $a$  específico. Note, además, que la estrategia de barrera  $\pi_a$  es un proceso  $\mathbb{F}$ -adptado, no decreciente, continuo y con valor inicial  $L_0^a = 0$ .

En la siguiente proposición se presentará de forma explícita la relación que hay entre la función de valor de una estrategia de barrera y las funciones  $q$ -escala.

**Proposición 5.** Asumamos que  $W^{(q)}$  es continuamente diferenciable en  $(0, \infty)$ . La función de valor de la estrategia de barrera al nivel  $a \geq 0$  está dada por

$$v_a(x) = \begin{cases} \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)'(a)}}, & \text{si } x \leq a, \\ x - a + \frac{W^{(q)}(a)}{W^{(q)'(a)}}, & \text{si } x > a. \end{cases}$$

**Demostración.** Sean  $a \geq 0$  y  $X_0 = x \geq 0$ .

La demostración de esta proposición se desprende en tres casos. A saber:  $a = x$ ,  $x \in (0, a)$  o  $x > a$ .

Supongamos que  $a = x$ .

Sea  $n \geq 1$  tal que  $\frac{1}{n} \leq a$ . Definiendo el tiempo de salida  $\sigma_n$  como

$$\sigma_n = \inf \left\{ t \geq 0 : X_t \notin \left( \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right) \right\},$$

se tiene que las únicas maneras en que el proceso  $X$  sale del intervalo  $\left( \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right)$  por primera vez, es cuando

$$X_{\sigma_n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{o} \quad X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n},$$

ya que este proceso tiene saltos negativos.

Entonces, la función de valor evaluada en  $a$  queda de la forma

$$v_a(a) = \mathbb{E}_a \left( \int_0^{\sigma^a} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} \leq \frac{1}{n}\}} \right) + \mathbb{E}_a \left( \int_0^{\sigma^a} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right). \quad (3.1)$$

Como  $\sigma_n$  es estrictamente menor que  $\sigma^a$  en el evento  $\left\{ X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n} \right\}$ , el segundo sumando de la anterior ecuación queda expresado como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a \left( \int_0^{\sigma^a} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) &= \mathbb{E}_a \left( \int_{[0, \sigma_n]} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) \\ &\quad + \mathbb{E}_a \left( \int_{(\sigma_n, \sigma^a]} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Haciendo un cambio de variable, el segundo sumando de la anterior ecuación queda de la forma

$$\mathbb{E}_a \left( \int_{(\sigma_n, \sigma^a]} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) = \mathbb{E}_a \left( \int_{(0, \sigma^a - \sigma_n]} e^{-q(t+\sigma_n)} dL_{t+\sigma_n}^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right). \quad (3.3)$$

Definiendo el proceso  $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t : t \geq 0\}$  como

$$\tilde{X}_t = X_{t+\sigma_n} - X_{\sigma_n} + a, \text{ para todo } t \geq 0,$$

se tiene que el proceso  $\tilde{X}$  es un proceso de Lévy espectralmente negativo, con la misma ley que nuestro proceso  $X$  e independiente de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_{\sigma_n}$  [Kyp06, Teorema 3.1]. Observe que este proceso es también un proceso de riesgo con valor inicial  $\tilde{X}_0 = a$ , quiere decir que a partir de él podemos definir un proceso de estrategia de barrera al nivel  $a$ ,  $\tilde{\pi}^a = \{\tilde{L}_t^a : t \geq 0\}$ , donde

$$\tilde{L}_t^a = \begin{cases} \sup_{0 < s \leq t} (\tilde{X}_s - a)^+, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

y el proceso de riesgo descontado,  $\tilde{U} = \{\tilde{U}_t : t \geq 0\}$ , de la siguiente manera

$$\tilde{U}_t = \tilde{X}_t - \tilde{L}_t^a, \text{ con } \tilde{X}_0 = a, \quad (3.5)$$

para todo  $t \geq 0$ .

Entonces, bajo el evento  $\left\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\right\}$  y tomando  $t \geq 0$  fijo se tiene la siguiente igualdad en distribución

$$\begin{aligned} L_{t+\sigma_n}^a &= \sup_{0 < s \leq \sigma_n} (X_s - a)^+ \vee \sup_{\sigma_n < s \leq t+\sigma_n} (X_s - a)^+ \\ &= \frac{1}{n} \vee \sup_{0 < s \leq t} (X_{s+\sigma_n} - a)^+ \\ &\stackrel{d}{=} \tilde{L}_t^a + \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Además, a partir de la igualdad anterior y el primer tiempo de ruina del proceso descontado  $\tilde{U}$ , es decir

$$\tilde{\sigma}^a = \inf\{t \geq 0 : \tilde{U}_t < 0\}, \quad (3.7)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma^a &= \inf\{t > \sigma_n : X_t - L_t^a < 0\} \\ &= \sigma_n + \inf\{t > 0 : X_{t+\sigma_n} - L_{t+\sigma_n}^a < 0\} \\ &\stackrel{d}{=} \sigma_n + \tilde{\sigma}^a. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.6) y (3.8), la ecuación (3.3) queda de la forma

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_a \left( \int_{(\sigma_n, \sigma^a]} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) &= \mathbb{E}_a \left( e^{-q\sigma_n} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \mathbb{E}_a \left( \int_{(0, \tilde{\sigma}^a]} e^{-qt} d\tilde{L}_t^a \middle| \mathcal{F}_{\sigma_n} \right) \right) \\
&= \mathbb{E}_a \left( e^{-q\sigma_n} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \mathbb{E}_a \left( \int_{(0, \tilde{\sigma}^a]} e^{-qt} d\tilde{L}_t^a \right) \right) \\
&= \mathbb{E}_a \left( e^{-q\sigma_n} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) \mathbb{E}_a \left( \int_{(0, \tilde{\sigma}^a]} e^{-qt} d\tilde{L}_t^a \right) \\
&= \mathbb{E}_a \left( e^{-q\sigma_n} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) v_a(a). \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.2) y (3.9), la función valor  $v_a$  evaluada en  $a$  queda de la forma

$$\begin{aligned}
v_a(a) &= \mathbb{E}_a \left( \int_{[0, \sigma^a]} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} \leq \frac{1}{n}\}} \right) \\
&\quad + \mathbb{E}_a \left( \int_{[0, \sigma_n]} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) + \mathbb{E}_a \left( e^{-q\sigma_n} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) v_a(a). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Usando integración por partes en el segundo sumando de la ecuación anterior y recordando la ecuación (2.15) se sigue que

$$\begin{aligned}
v_a(a) &= \mathbb{E}_a \left( \int_0^{\sigma^a} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} \leq \frac{1}{n}\}} \right) + \frac{1}{n} \mathbb{E}_a \left( e^{-q\sigma_n} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) \\
&\quad + \mathbb{E}_a \left( q \int_0^{\sigma_n} e^{-qt} L_t^a dt \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) + \mathbb{E}_a \left( e^{-q\sigma_n} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) v_a(a) \\
&\geq \frac{1}{n} \mathbb{E}_a \left( e^{-q\sigma_n} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) + \mathbb{E}_a \left( e^{-q\sigma_n} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) v_a(a) \\
&= \frac{W^{(q)}(a)}{nW^{(q)}\left(a + \frac{1}{n}\right)} + \frac{W^{(q)}(a)}{W^{(q)}\left(a + \frac{1}{n}\right)} v_a(a). \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Ahora, definiendo el tiempo de salida  $\sigma'_n$ , con  $n \geq 0$ , como

$$\sigma'_n = \inf \left\{ t \geq 0 : X_t \notin \left( 0, a + \frac{1}{n} \right) \right\},$$

y bajo el mismo argumento de la ecuación (3.1) tenemos que

$$v_a(a) = \mathbb{E}_a \left( \int_0^{\sigma^a} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma'_n} \leq 0\}} \right) + \mathbb{E}_a \left( \int_0^{\sigma^a} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma'_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right).$$

Puesto que  $\sigma^a \leq \sigma'_n$  en el evento  $\{X_{\sigma'_n} \leq 0\}$ , entonces, argumentando como las líneas anteriores, se llega a que

$$\begin{aligned} v_a(a) &\leq \mathbb{E}_a \left( \int_0^{\sigma'_n} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma'_n} \leq 0\}} \right) + \mathbb{E}_a \left( \int_0^{\sigma^a} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma'_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) \\ &= \mathbb{E}_a \left( \int_0^{\sigma'_n} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma'_n} \leq 0\}} \right) + \frac{1}{n} \mathbb{E}_a \left( e^{-q\sigma'_n} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma'_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) \\ &\quad + \mathbb{E}_a \left( q \int_0^{\sigma'_n} e^{-qt} L_t^a dt \mathbb{1}_{\{X_{\sigma'_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) + \mathbb{E}_a \left( e^{-q\sigma'_n} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma'_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) v_a(a). \end{aligned}$$

Por otro lado, se sabe que  $e^{-qt} \leq 1$ , para todo  $t \geq 0$ , y  $X_t \leq a + \frac{1}{n}$  en el evento  $\left\{ X_{\sigma'_n} = a + \frac{1}{n} \right\}$ , se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a \left( \int_0^{\sigma'_n} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma'_n} \leq 0\}} \right) &\leq \mathbb{E}_a \left( L_{\sigma'_n}^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma'_n} \leq 0\}} \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \mathbb{P}_a(X_{\sigma'_n} \leq 0) \\ &= \frac{1}{n} \left( 1 - \mathbb{P}_a \left( X_{\sigma'_n} = a + \frac{1}{n} \right) \right), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a \left( q \int_0^{\sigma'_n} e^{-qt} L_t^a dt \mathbb{1}_{\{X_{\sigma'_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) &\leq \frac{1}{n} \mathbb{E}_a \left( (1 - e^{-q\sigma'_n}) \mathbb{1}_{\{X_{\sigma'_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \mathbb{P}_a \left( X_{\sigma'_n} = a + \frac{1}{n} \right) - \mathbb{E}_a \left( e^{-q\sigma'_n} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma'_n} = a + \frac{1}{n}\}} \right) \right). \end{aligned}$$

Entonces, por las últimas dos desigualdades y la ecuación (2.15) se llega a que

$$v_a(a) \leq \frac{1}{n} + \frac{W^{(q)}(a)}{W^{(q)}\left(a + \frac{1}{n}\right)} v_a(a).$$

Por lo tanto, considerando la anterior estimación y la desigualdad (3.11) tenemos que

$$v_a(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W^{(q)}(a)}{n \left( W^{(q)}\left(a + \frac{1}{n}\right) - W^{(q)}(a) \right)} = \frac{W^{(q)}(a)}{W^{(q)'}(a)}. \quad (3.12)$$

Supongamos que  $x \in [0, a)$ . Definamos el tiempo de salida  $\sigma_{(0,a)}$  como

$$\sigma_{(0,a)} = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin (0, a)\},$$

tenemos que  $L_t^a = 0$ , para todo  $t < \sigma_{(0,a)}$ . Entonces, recordando la ecuación (2.15) y la ecuación (3.12)

$$\begin{aligned} v_a(x) &= \mathbb{E}_x \left( \int_{\sigma_{(0,a)}}^{\sigma^a} e^{-qt} dL_t^a \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_{(0,a)}}=a\}} \right) \\ &= \mathbb{E}_x \left( e^{-q\sigma_{(0,a)}} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_{(0,a)}}=a\}} \right) v_a(a) \\ &= \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)'}(a)}. \end{aligned}$$

Por último supongamos que  $x > a$ . Quiere decir que el proceso de dividendos  $\pi^a$  al tiempo cero tiene un salto de tamaño  $x - a$ , llevando al proceso  $U^a$  al nivel  $a$  y para todo  $t > 0$  el proceso de dividendos  $\pi^a$  va a tener una estructura de la forma

$$\begin{aligned} L_t^a &= \sup_{s \leq t} ((X_s - x) + (x - a))^+ \\ &= (x - a) \mathbb{1}_{\{t > 0\}} + \sup_{0 < s \leq t} (X_s - x)^+. \end{aligned}$$

Entonces la función de valor queda de la forma

$$v_a(x) = \mathbb{E}_x \left( \int_0^{\sigma^a} e^{-qt} dL_t^a \right) = x - a + \mathbb{E}_x \left( \int_{(0, \sigma^a]} e^{-qt} d \left( \sup_{0 < s \leq t} (X_s - x)^+ \right) \right). \quad (3.13)$$

Definiendo el proceso  $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t : t \geq 0\}$  de la siguiente manera

$$\tilde{X}_t = X_t - (x - a), \text{ para todo } t \geq 0,$$

se sigue que éste es un proceso de Lévy espectralmente negativo con la misma ley que el proceso  $X$  [Kyp06, Teorema 3.1]. Observe que el proceso  $\tilde{X}$ , con valor inicial  $\tilde{X}_0 = a$ , es un proceso de riesgo. Entonces definiendo la estrategia de barrera al nivel  $a$ ,  $\tilde{\pi}^a = \{\tilde{L}_t^a : t \geq 0\}$ , y el proceso de riesgo descontado,  $\tilde{U} = \{\tilde{U}_t : t \geq 0\}$ , como en las ecuaciones (3.4) y (3.5) respectivamente, se tiene que

$$\tilde{L}_t^a = \begin{cases} \sup_{0 < s \leq t} (X_s - x)^+, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Además, definiendo  $\tilde{\sigma}^a$  como en la ecuación (3.7) y teniendo en cuenta la anterior igualdad, se puede ver que

$$\tilde{\sigma}^a = \inf \left\{ t > 0 : \tilde{X}_t - \sup_{0 < s \leq t} (X_s - x)^+ < 0 \right\} = \inf \{ t > 0 : X_t - L_t^a < 0 \} = \sigma^a. \quad (3.15)$$

Entonces, a partir de las ecuaciones (3.14) y (3.15), se tiene que la ecuación (3.13) queda de la siguiente manera

$$v_a(x) = x - a + \mathbb{E} \left( \int_{(0, \tilde{\sigma}^a]} e^{qt} d\tilde{L}_t^a \mid \tilde{X}_0 = a \right) = x - a + v_a(a) = x - a + \frac{W^{(q)}(a)}{W^{(q)'}(a)}.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta los casos vistos anteriormente concluimos que la función de valor para cualquier barrera  $a \geq 0$  es de la forma

$$v_a(x) = \begin{cases} \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)'(a)}}, & \text{si } x \leq a, \\ x - a + \frac{W^{(q)}(a)}{W^{(q)'(a)}}, & \text{si } x > a. \end{cases} \quad \square$$

Por la Proposición 4 vemos que cuando la estrategia de barrera es cero, la función de valor  $v_0$  está bien definida. Además, a pesar de que  $W^{(q)}$  es una función continuamente diferenciable, no es cierto que para todo  $a \geq 0$  la función de valor  $v_a$  sea continuamente diferenciable cuando  $x = a$ .

Una de las herramientas que se usará en lo que resta de esta sección es el generador infinitesimal que actúa sobre una función  $f$  suficientemente suave. Éste es definido de la siguiente manera

$$\Gamma f(x) = -\gamma f'(x) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x) + \int_{(-\infty, 0)} (f(x+y) - f(x) - f'(x)y \mathbb{1}_{\{y \in (-1, 0)\}}) \nu(dy),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lema 6.** Si  $W^{(q)}$  es suficientemente suave en  $(0, \infty)$ , entonces para todo  $a > 0$  se cumple

$$(\Gamma - q)v_a(x) = 0, \text{ para todo } x \in (0, a).$$

**Demostración.** Sea  $t \geq 0$ . Aplicando Integración por Partes a  $e^{-qt}W^{(q)}(X_t)$  sobre el evento  $\{t < \sigma_{(0,a)}\}$  tenemos que

$$e^{-qt}W^{(q)}(X_t) - W^{(q)}(X_0) = \int_0^t e^{-qs} dW^{(q)}(X_s) - \int_0^t qe^{-qs}W^{(q)}(X_{s-}) ds. \quad (3.16)$$

Por otro lado, aplicando la Fórmula de Itô [Pro05, Teorema 2.32] a  $W^{(q)}(X_t)$  se tiene que

$$\begin{aligned} W^{(q)}(X_t) - W^{(q)}(X_0) &= \int_0^t W^{(q)'(X_{s-})} dX_s + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t W^{(q)''(X_{s-})} ds \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t} (W^{(q)}(X_s) - W^{(q)}(X_{s-}) - W^{(q)'(X_{s-})} \Delta X_s). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.4) se puede ver que

$$\begin{aligned} \int_0^t W^{(q)'(X_{s-})} dX_s &= \int_0^t \sigma W^{(q)'(X_{s-})} dB_t + \int_0^t \gamma W^{(q)'(X_{s-})} ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{(-\infty, -1]} W^{(q)'(X_{s-})} x N(ds \times dx) \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^t \int_{(-1, \varepsilon)} W^{(q)'(X_{s-})} x (N(ds \times dx) - \nu(dx) ds). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\sum_{0 < s \leq t} (W^{(q)}(X_s) - W^{(q)}(X_{s-}) - W^{(q)'}(X_{s-})\Delta X_s) = \\
\sum_{0 < s \leq t} (W^{(q)}(X_{s-} + \Delta X_s) - W^{(q)}(X_{s-}) - W^{(q)'}(X_{s-})\Delta X_s \mathbb{1}_{\{|\Delta X_s| < 1\}}) \\
- \sum_{0 < s \leq t} W^{(q)'}(X_{s-})\Delta X_s \mathbb{1}_{\{|\Delta X_s| \geq 1\}}. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Como bien sabemos el proceso de Lévy espectralmente negativo  $X$  tiene asociado una medida aleatoria de Poisson  $N$ , quiere decir que la ecuación (3.19) se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\sum_{0 < s \leq t} (W^{(q)}(X_s) - W^{(q)}(X_{s-}) - W^{(q)'}(X_{s-})\Delta X_s) = \\
\int_0^t \int_{(-\infty, 0)} (W^{(q)}(X_{s-} + y) - W^{(q)}(X_{s-}) - W^{(q)'}(X_{s-})y \mathbb{1}_{\{|y| < 1\}}) N(ds \times dy) \\
- \int_0^t \int_{(-\infty, 0)} W^{(q)'}(X_{s-})y \mathbb{1}_{\{|y| \geq 1\}} N(ds \times dy). \quad (3.20)
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (3.17), (3.18) y (3.20) se llega a que

$$\begin{aligned}
W^{(q)}(X_t) - W^{(q)}(X_0) = \int_0^t \Gamma W^{(q)}(X_{s-}) ds + \int_0^t \sigma W^{(q)'}(X_{s-}) dB_s \\
+ \int_0^t \int_{(-\infty, 0)} (W^{(q)}(X_{s-} + y) - W^{(q)}(X_{s-}) \\
- W^{(q)'}(X_{s-})y \mathbb{1}_{\{|y| < 1\}}) (N(ds \times dy) - \nu(dy) ds) \\
+ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^t \int_{(-\infty, \varepsilon)} W^{(q)'}(X_{s-})y (N(ds \times dy) - \nu(dy) ds).
\end{aligned}$$

Entonces, a partir de la anterior igualdad y la ecuación (3.16), se puede ver que

$$e^{-qt} W^{(q)}(X_t) - W^{(q)}(x) - M_t = \int_0^t e^{-qs} (\Gamma - q) W^{(q)}(X_{s-}) ds, \quad (3.21)$$

donde el proceso  $M = \{M_s : s \geq 0\}$  definido como

$$\begin{aligned}
M_s = \int_0^s \sigma e^{-qr} W^{(q)'}(X_{r-}) dB_r + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^s \int_{(-1, -\varepsilon)} e^{-qr} W^{(q)'}(X_{r-}) x (N(dx \times dr) - \nu(dx) dr) \\
+ \int_0^s \int_{(-\infty, 0)} e^{-qr} (W^{(q)}(X_{r-} + x) - W^{(q)}(X_{r-}) \\
- W^{(q)'}(X_{r-})x \mathbb{1}_{\{x \in (-1, 0)\}}) (N(dx \times dr) - \nu(dx) dr),
\end{aligned}$$

para todo  $s \leq t$ , es una  $\mathbb{P}_x$ -martingala con  $M_0 = 0$ . Con ayuda del Lema 2 se verifica que la parte izquierda de la igualdad (3.21) es una  $\mathbb{P}_x$ -martingala. Además, el proceso que

está dentro del integrando de la parte derecha de la igualdad (3.21) es continua y acotada por una constante casi seguramente. Quiere decir que la  $\mathbb{P}_x$ -martingala mencionada antes es una  $\mathbb{P}_x$ -martingala continua cuadrado integrable, cuya variación cuadrática es igual a cero. Lo que nos lleva a que

$$(\Gamma - q)W^{(q)}(X_{s-}) = 0, \text{ para todo } s \in [0, t], \text{ c.s.}$$

Como lo anterior está hecho sobre el evento  $\{t < \sigma_{(0,a)}\}$  se sigue que

$$(\Gamma - q)W^{(q)}(x) = 0, \text{ para todo } x \in (0, a).$$

Como  $v_a(x) = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}$ , para todo  $x \in (0, a)$ , concluimos que

$$(\Gamma - q)v_a(x) = 0, \text{ para todo } x \in (0, a). \quad \square$$

Sea  $a^*$  definido de la siguiente manera

$$a^* = \sup\{a \geq 0 : W^{(q)'}(a) \leq W^{(q)'}(x), \text{ para todo } x \geq 0\}, \quad (3.22)$$

donde  $W^{(q)'}(0)$  se entenderá como  $\lim_{x \downarrow 0} W^{(q)'}(x)$ . Como

$$W^{(q)'}(x) = e^{qx}(W_{\Phi(q)}(x)\Phi(q) + W'_{\Phi(q)}(x)) \geq e^{qx}W_{\Phi(q)}(x)\Phi(q),$$

se tiene que  $\lim_{x \rightarrow \infty} W^{(q)'}(x) = \infty$ , lo que nos lleva a que  $a^* < \infty$ .

Por definición de  $a^*$ , se tiene que  $W^{(q)''}(a^*) = 0$ . Lo cual es cierto porque

$$\frac{W^{(q)'}(a^* + h) - W^{(q)'}(a^*)}{h} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{W^{(q)'}(a^*) - W^{(q)'}(a^* - h)}{h} \leq 0,$$

donde  $0 < h < a^*$ . Entonces, tomando límite cuando  $h \downarrow 0$  en las dos desigualdades anteriores se obtiene dicha igualdad.

Al finalizar esta sección se mostrará que bajo ciertas condiciones de la función  $W^{(q)}$  la estrategia de barrera en el nivel  $a^*$  es la estrategia de barrera óptima. Para lograr este cometido necesitaremos de tres lemas que van a jugar un papel importante en la demostración de este hecho. El primero, llamado Lema de Verificación, nos dará condiciones suficientes para que una estrategia de dividendos admisible sea óptima.

**Lema 7** (Lema de Verificación). Suponga que  $\pi_*$  es una de estrategia de dividendos admisible tal que  $v_{\pi_*}$  es suficientemente suave en  $(0, \infty)$ , y para todo  $x > 0$

$$\max((\Gamma - q)v_{\pi_*}(x), 1 - v'_{\pi_*}(x)) \leq 0,$$

entonces  $v_{\pi_*}(x) = v_*(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Demostración.** Sean  $\pi \in \Pi$  y  $x > 0$ . Por Integración por Partes en  $e^{-qt}v_{\pi_*}(U_t^\pi)$ , con  $t \geq 0$ , se tiene que

$$e^{-qt}v_{\pi_*}(U_t^\pi) - v_{\pi_*}(U_0^\pi) = \int_0^t e^{-qs} dv_{\pi_*}(U_s^\pi) - \int_0^t qe^{-qs}v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) ds. \quad (3.23)$$

Aplicando la F3rmula de It3o a  $v_{\pi_*}(U_t^\pi)$  [Pro05, Teorema 2.32], con  $t \geq 0$ , se puede ver que

$$\begin{aligned} v_{\pi_*}(U_t^\pi) - v_{\pi_*}(U_0^\pi) &= \int_0^t v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) dU_s^\pi + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t v''_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) ds \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t} (v_{\pi_*}(U_s^\pi) - v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) - v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) \Delta U_s^\pi). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Como  $dU_t^\pi = dX_s - dL_s^\pi$ , implica que

$$\begin{aligned} \int_0^t v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) dU_s^\pi &= \int_0^t v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) dX_s - \int_0^t v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) dL_s^\pi \\ &= \int_0^t v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) dX_s - \int_0^t v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) dL_s^{\pi c} - \sum_{0 < s \leq t} v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) \Delta L_s^\pi, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde  $L_t^{\pi c}$  es la parte continua de  $L_t^\pi$ .

A partir de la ecuaci3n (2.4), se puede ver que

$$\begin{aligned} \int_0^t v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) dX_s &= \int_0^t \sigma v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) dB_s - \int_0^t \gamma v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{(-\infty, -1]} v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) y N(ds \times dy) \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^t \int_{(-1, \varepsilon)} v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) y (N(ds \times dy) - \nu(dy) ds). \end{aligned}$$

Entonces, la ecuaci3n (3.25) queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \int_0^t v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) dU_s^\pi &= \int_0^t \sigma v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) dB_s - \int_0^t \gamma v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{(-\infty, -1]} v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) y N(ds \times dy) \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^t \int_{(-1, -\varepsilon)} v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) y (N(ds \times dy) - \nu(dy) ds) \\ &\quad - \int_0^t v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) dL_s^{\pi c} - \sum_{0 < s \leq t} v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) \Delta L_s^\pi. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \sum_{0 < s \leq t} (v_{\pi_*}(U_s^\pi) - v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) - v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) \Delta U_s^\pi) &= \\ &= \sum_{0 < s \leq t} (v_{\pi_*}(U_{s+}^\pi) - v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) - v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) \Delta L_s^\pi) \mathbb{1}_{\{\Delta L_s^\pi \neq 0\}} \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t} (v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi + \Delta X_s) - v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) - v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) \Delta X_s), \end{aligned}$$

y por un argumento similar a la ecuación (3.20) se puede ver que

$$\begin{aligned}
\sum_{0 < s \leq t} (v_{\pi_*}(U_s^\pi) - v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) - v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) \Delta U_s^\pi) = \\
\sum_{0 < s \leq t} (v_{\pi_*}(U_{s+}^\pi) - v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) - v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) \Delta L_s^\pi) \mathbb{1}_{\{\Delta L_s^\pi \neq 0\}} \\
+ \int_0^t \int_{(-\infty, 0)} (v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi + y) - v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) - v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) y) N(ds \times dy). \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Definiendo  $A_t = U_{t-}^\pi + \Delta X_s$ , con  $t \geq 0$ , se puede ver que

$$A_t = U_t^\pi \quad \text{y} \quad A_t - \Delta L_t = U_{t+}^\pi, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Entonces, la ecuación (3.27) queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\sum_{0 < s \leq t} (v_{\pi_*}(U_s^\pi) - v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) - v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) \Delta U_s^\pi) = \\
\sum_{0 < s \leq t} (v_{\pi_*}(A_s - \Delta L_s^\pi) - v_{\pi_*}(A_s) - v'_{\pi_*}(U_s^\pi) \Delta L_s^\pi) \mathbb{1}_{\{\Delta L_s^\pi \neq 0\}} \\
+ \int_0^t \int_{(-\infty, 0)} (v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi + y) - v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) - v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) y) N(ds \times dy). \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.24), (3.26) y (3.28) se llega a que

$$\begin{aligned}
v_{\pi_*}(U_t^\pi) - v_{\pi_*}(U_0^\pi) = \int_0^t \sigma v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) dB_s - \int_0^t \gamma v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) ds + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t v''_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) ds \\
- \int_0^t v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) dL_s^{\pi c} + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^t \int_{(-1, -\varepsilon)} y (N(ds \times dy) - \nu(dy) ds) \\
+ \sum_{0 < s \leq t} (v_{\pi_*}(A_s - \Delta L_s^\pi) - v_{\pi_*}(A_s) - v'_{\pi_*}(U_s^\pi) \Delta L_s^\pi) \mathbb{1}_{\{\Delta L_s^\pi \neq 0\}} \\
+ \int_0^t \int_{(-\infty, 0)} (v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi + y) - v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) - v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) y) N(ds \times dy).
\end{aligned}$$

A partir de la anterior igualdad y la ecuación (3.23) se obtiene que

$$e^{-qt} v_{\pi_*}(U_t^\pi) - v_{\pi_*}(x) = \int_0^t (\Gamma - q) v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) ds - \int_0^t e^{-qs} v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) dL_s^{\pi c} + M_t + J_t, \quad (3.29)$$

donde los procesos  $M_t$  y  $J_t$ , con  $t \geq 0$ , están dados por

$$J_t = \sum_{0 < s \leq t} e^{-qs} (v_{\pi_*}(A_s - \Delta L_s^\pi) - v_{\pi_*}(A_s)) \mathbb{1}_{\{\Delta L_s^\pi \neq 0\}},$$

y

$$\begin{aligned}
M_t = & \int_0^t \sigma e^{-qs} v'_{\pi_*}(U_{s-}) dB_s + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^t \int_{(-1, -\varepsilon]} e^{-qs} v'_{\pi_*}(U_{s-}) x (N(ds \times dt) - \nu(dx) ds) \\
& + \int_0^t \int_{(-\infty, 0)} e^{-qs} (v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi + x) - v_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) \\
& \quad - v'_{\pi_*}(U_{s-}^\pi) x \mathbb{1}_{\{x \in (-1, 0)\}}) (N(ds \times dx) - \nu(dx) ds).
\end{aligned}$$

Se sabe por hipótesis que  $v'_{\pi_*}(x) \geq 1$ , entonces, por el Teorema del Valor Medio se sigue que

$$v_{\pi_*}(A_s - \Delta L_s^\pi) - v_{\pi_*}(A_s) \leq -\Delta L_s^\pi,$$

lo cual implica que

$$J_t \leq - \int_0^t e^{-qs} dL_s^\pi, \text{ para todo } t \geq 0. \quad (3.30)$$

Definiendo el tiempo de paro  $\sigma_n$ , con  $n \geq 1$ , como

$$\sigma_n = \inf\{t > 0 : U_t^\pi > n\},$$

el proceso  $M = \{M_{t \wedge \sigma_n} : t \geq 0\}$  es una  $\mathbb{P}_x$ -martingala con  $M_0 = 0$ . Entonces, teniendo en cuenta la desigualdad (3.30) y que  $(\Gamma - q)v_{\pi_*}(x) \leq 0$ , tomando valor esperado en la ecuación (3.29) se llega a que

$$v_{\pi_*}(x) \geq \mathbb{E}_x(e^{-q(\sigma_n \wedge \sigma^\pi)} v_{\pi_*}(U_{\sigma_n \wedge \sigma^\pi}^\pi)) + \mathbb{E}_x\left(\int_0^{\sigma_n \wedge \sigma^\pi} e^{-qs} dL_s^\pi\right).$$

Luego, haciendo tender  $n$  a infinito, la anterior desigualdad queda expresada de la siguiente manera

$$v_{\pi_*}(x) \geq \mathbb{E}_x\left(\int_0^{\sigma^\pi} e^{-qs} dL_s^\pi\right) = v_\pi(x).$$

Dado que  $v_{\pi_*}(x) = v_*(x) = 0$ , para todo  $x < 0$ , se concluye que  $v_{\pi_*}(x) = v_*(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

El lema que sigue, al igual que el anterior, nos dará condiciones suficientes para que la estrategia de barrera en el nivel  $a^*$  sea óptima.

**Lema 8.** Sea  $W^{(q)}$  suficientemente suave tal que

$$(\Gamma - q)v_{a^*}(x) \leq 0, \text{ para todo } x > a^*.$$

Entonces  $v_{a^*}(x) = v_*(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Demostración.** Es suficiente ver que la función de valor  $v_{a^*}$  verifica la hipótesis del Lema de Verificación. En el caso en que  $a^* = 0$  se cumple trivialmente, ya que  $W^{(q)}$  es suficientemente suave, entonces por la Proposición 5 se sigue que  $v_0(x)$  es suficientemente suave para todo  $x \in (0, \infty)$ . Además

$$(\Gamma - q)v_0(x) \leq 0 \quad \text{y} \quad 1 - v'_0(x) = 0, \text{ para todo } x > 0.$$

Por el Lema de Verificación se sigue que  $v_0(x) = v_*(x)$ , para todo  $x \geq 0$ .

Supongamos que  $a^* > 0$ . Dado que  $W^{(q)}$  es suficientemente suave y  $W^{(q)''}(a^*) = 0$ , por definición de  $a^*$ , vemos por la Proposición 5 que  $v_{a^*}(x)$  también es suficientemente suave y  $v'_{a^*}(x) \geq 1$ , para todo  $x \in (0, \infty)$ .

Por otra parte, por el Lema 6 se tiene que

$$(\Gamma - q)v_{a^*}(x) = 0, \text{ para todo } x \in (0, a^*).$$

En el caso en que  $x = a^*$ , por la suavidad de la función  $(\Gamma - q)v_{a^*}$  se sigue

$$(\Gamma - q)v_{a^*}(a^*) = \lim_{x \uparrow a^*} (\Gamma - q)v_a(x) = 0.$$

Entonces por el Lema de Verificación concluimos que  $v_{a^*}(x) = v_*(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Lema 9.** Sea  $W^{(q)}$  suficientemente suave en  $(0, \infty)$ , tal que

$$W^{(q)'}(a) \leq W^{(q)'}(b) \text{ para todo } a^* \leq a \leq b. \quad (3.31)$$

Entonces

$$\lim_{y \uparrow x} (\Gamma - q)(v_{a^*} - v_x)(y) \leq 0, \text{ para todo } x > a^*.$$

**Demostración.** Sea  $x > a^*$ . Como las segundas derivadas de las funciones valor  $v_{a^*}$  y  $v_x$  son continuas en  $(0, \infty)$ , excepto cuando  $\lim_{y \uparrow x} v''_x(y) \neq \lim_{y \downarrow x} v''_x(y)$ , se sigue a partir de la Proposición 5 y de la desigualdad (3.31) que

$$\lim_{y \uparrow x} v''_x(y) \geq 0 = v''_{a^*}(x). \quad (3.32)$$

Por definición de  $a^*$  y por (3.31) se puede ver que

$$(v'_{a^*} - v'_x)(u) \geq 0, \text{ para todo } u \in [0, x], \quad (3.33)$$

lo cual implica que

$$(v_{a^*} - v_x)(x + z) \leq (v_{a^*} - v_x)(x), \text{ para todo } z < 0. \quad (3.34)$$

Además

$$v'_{a^*}(x) = v'_x(x) = 1. \quad (3.35)$$

Por otra parte, tomando límite cuando  $y \uparrow x$  a la función  $(\Gamma - q)(v_{a^*} - v_x)$  nos queda lo siguiente

$$\begin{aligned} \lim_{y \uparrow x} (\Gamma - q)(v_{a^*} - v_x)(y) &= \lim_{y \uparrow x} \left( \gamma(v'_{a^*} - v'_x)(y) + \frac{\sigma^2}{2}(v''_{a^*} - v''_x)(y) - q(v_{a^*} - v_x)(y) \right. \\ &\quad \left. + \int_{(-\infty, 0)} ((v_{a^*} - v_x)(y + z) - (v_{a^*} - v_x)(y) \right. \\ &\quad \left. - z(v'_{a^*} - v'_x)(y) \mathbb{1}_{\{z \in (-1, 0)\}}) \nu(dz) \right) \\ &= \gamma(v'_{a^*} - v'_x)(x) + \frac{\sigma^2}{2} \left( v''_{a^*}(x) - \lim_{y \uparrow x} v''_x(y) \right) - (v_{a^*} - v_x)(x) \\ &\quad + \lim_{y \uparrow x} \int_{(-\infty, 0)} ((v_{a^*} - v_x)(y + z) - (v_{a^*} - v_x)(y) \\ &\quad - (v'_{a^*} - z v'_x)(y) \mathbb{1}_{\{z \in (-1, 0)\}}) \nu(dz). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Por otro lado, en caso en que  $x \in (0, 1]$ , la función que está dentro del integrando de la anterior igualdad está acotada por

$$\begin{aligned} & |(v_{a^*} - v_x)(y + z) - (v_{a^*} - v_x)(y) - z(v'_{a^*} - v'_x)(y) \mathbb{1}_{z \in (-1, 0)}| \\ & \leq \max_{y \in (y_{\varepsilon'}, x)} |(v_{a^*} - v_x)(y)| \mathbb{1}_{\{z \leq -1\}} + z^2 \left( \varepsilon - \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{|v''_{a^*}(x) - \lim_{y \uparrow x} v''_x(y)|}{2} \right) \mathbb{1}_{\{z \in (z_\varepsilon, 0)\}} \\ & + z^2 \max_{(w, y) \in (-1, z_\varepsilon] \times (y_{\varepsilon'}, x)} \left\{ \frac{|(v_{a^*} - v_x)(y + w) - (v_{a^*} - v_x)(y) - w(v'_{a^*} - v'_x)(y)|}{w^2} \right\} \mathbb{1}_{\{z \in (-1, z_\varepsilon]\}}, \end{aligned}$$

para todo  $z \in (-\infty, 0)$  y para todo  $y \in (y_{\varepsilon'}, x)$ . Donde  $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ , la constante  $y_{\varepsilon'}$  es suficientemente cercana a  $x$  por la izquierda que depende de  $\varepsilon'$  y  $z_\varepsilon$  es una constante suficientemente cercana a 0 por la izquierda que depende de  $\varepsilon'$ . En caso en que  $x > 1$ , la función que está dentro del integrando de la igualdad (3.36) está acotada por

$$\begin{aligned} & |(v_{a^*} - v_x)(y + z) - (v_{a^*} - v_x)(y) - (v'_{a^*} - v'_x)(y)z \mathbb{1}_{\{z \in (-1, 0)\}}| \\ & \leq \max_{y \in (y_{\varepsilon'}, x)} |(v_{a^*} - v_x)(y)| \mathbb{1}_{\{z \leq -x\}} + z^2 \left( \varepsilon - \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{|v''_{a^*}(x) - \lim_{y \uparrow x} v''_x(y)|}{2} \right) \mathbb{1}_{\{z \in (z_\varepsilon, 0)\}} \\ & + \max_{(w, y) \in [-x, -1] \times (y_{\varepsilon'}, x)} \left\{ |(v_{a^*} - v_x)(y + w) - (v_{a^*} - v_x)(y)| \right\} \mathbb{1}_{\{z \in (-x, -1]\}} \\ & + z^2 \max_{(w, y) \in (-1, z_\varepsilon] \times (y_{\varepsilon'}, x)} \left\{ \frac{|(v_{a^*} - v_x)(y + w) - (v_{a^*} - v_x)(y) - w(v'_{a^*} - v'_x)(y)|}{w^2} \right\} \mathbb{1}_{\{z \in (-1, z_\varepsilon]\}}, \end{aligned}$$

para todo  $z \in (-\infty, 0)$  y para todo  $y \in (y_{\varepsilon'}, x)$ . Donde  $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ , la constante  $y_{\varepsilon'}$  es suficientemente cercana a  $x$  por izquierda que depende de  $\varepsilon'$  y  $z_\varepsilon$  es una constante suficientemente cercana a 0 por izquierda que depende de  $\varepsilon'$ .

Observe que en los dos casos mencionados anteriormente, la función que acota es integrable con respecto a la medida de salto  $\nu$ . Entonces, usando Teorema de Convergencia Dominada se tiene que la ecuación (3.36) queda de la forma

$$\begin{aligned} \lim_{y \uparrow x} (\Gamma - q)(v_{a^*} - v_x)(y) &= \gamma(v'_{a^*} - v'_x)(x) + \frac{\sigma^2}{2} \left( v''_{a^*}(x) - \lim_{y \uparrow x} v''_x(y) \right) - q(v_{a^*} - v_x)(x) \\ &+ \int_{(-\infty, 0)} \left( (v_{a^*} - v_x)(x + z) - (v_{a^*} - v_x)(x) \right. \\ &\quad \left. - z(v'_{a^*} - v'_x)(x) \mathbb{1}_{\{z \in (-1, 0)\}} \right) \nu(dz). \end{aligned}$$

Entonces teniendo en cuenta las ecuaciones (3.32), (3.33), (3.34) y (3.35) se concluye que

$$\lim_{y \uparrow x} (\Gamma - q)(v_{a^*} - v_x)(y) \leq 0. \quad \square$$

**Teorema 10.** Sea  $W^{(q)}$  suficientemente suave en  $(0, \infty)$ , tal que

$$W^{(q)'}(a) \leq W^{(q)'}(b) \text{ para todo } a^* \leq a \leq b.$$

Entonces la estrategia de barrera en  $a^*$  es una estrategia óptima.

**Demostración.** Para demostrar este hecho sólo tenemos que verificar las hipótesis del Lema 8, la cual demostraremos por contradicción. Supongamos que existe  $x > a^*$  tal que

$$(\Gamma - q)v_{a^*}(x) > 0.$$

Entonces por el Lema 9 se sigue que

$$0 < (\Gamma - q)v_{a^*}(x) \leq \lim_{y \uparrow x} (\Gamma - q)v_x(y).$$

Quiere decir que

$$(\Gamma - q)v_x(y) > 0, \text{ con } y \in (0, x),$$

lo cual contradice el Lema 6. Por lo tanto  $a^*$  es un estrategia de barrera óptima.  $\square$

## 4 Métodos numéricos

En esta sección se estudiarán dos métodos numéricos, Integral de Inversión de Bromwich e Inversión Post-Widder, para aproximar las funciones  $q$ -escala, ya que no siempre podemos tener explícitamente dichas funciones, y así poder ver gráficamente las condiciones suficientes que se estudiaron en la sección anterior para que la estrategia óptima sea una estrategia de barrera en el problema clásico de pago de dividendos.

Para usar estos métodos, debemos estudiar primero la relación que hay entre las funciones  $q$ -escala y la función de renovación de cierto subordinador llamado de escala descendente y que está definido a partir de tiempos locales.

Un proceso estocástico  $L = \{L_t : t \geq 0\}$  que es continuo, no decreciente, con  $L_t \in [0, \infty)$ , para todo  $t \geq 0$ , y  $\mathbb{F}$ -adaptado, es un tiempo local en 0 para el proceso  $\{\sup_{0 \leq s \leq t} X_s - X_t : t \geq 0\}$  si cumple lo siguiente:

- i) El soporte de la medida de Stieltjes  $dL_t$  es la cerradura del conjunto de tiempos  $\{t \geq 0 : \sup_{0 \leq s \leq t} X_s = X_t\}$  y es finito para todo  $t \geq 0$ .
- ii) Para todo tiempo de paro  $T$  con respecto a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathbb{F}$ , tal que  $\sup_{0 \leq s \leq T} X_s = X_T$  en  $\{T < \infty\}$  casi seguramente, el proceso definido como

$$\left\{ \left( X_{T+t} - X_T, \sup_{0 \leq s \leq T+t} X_s - X_{T+t}, L_{T+t} - L_T \right) : t \geq 0 \right\},$$

es independiente de  $\mathcal{F}_T$  en  $\{T < \infty\}$  y tiene la misma ley que  $\{(X_t, \sup_{0 \leq s \leq t} X_s, L_t) : t \geq 0\}$  sobre  $\mathbb{P}$ .

Análogamente, el proceso  $\widehat{L} = \{\widehat{L}_t : t \geq 0\}$  denotará el tiempo local para el proceso  $\{X_t - \inf_{0 \leq s \leq t} X_s : t \geq 0\}$ .

A partir del tiempo local definimos los procesos  $L^{-1} = \{L_t^{-1} : t \geq 0\}$  y  $H = \{H_t : t \geq 0\}$  como

$$L_t^{-1} = \inf\{s > 0 : L_s > t\} \quad \text{y} \quad H_t = X_{L_t^{-1}},$$

para todo  $t \geq 0$ , respectivamente. El proceso  $L^{-1}$  es el inverso del tiempo local  $L$  y el proceso  $H$  es conocido como de escala ascendente. Se puede ver que estos dos procesos son subordinadores y en consecuencia el proceso bivariado  $(L^{-1}, H) = \{(L_t^{-1}, H_t) : t \geq 0\}$ , llamado proceso escala ascendente, es un subordinador bivariado, cuyo exponente de Laplace denotaremos por

$$\kappa(\alpha, \lambda) = -\log\left(\mathbb{E}\left(e^{-\alpha L_1^{-1} - \lambda H_1}\right)\right), \text{ para todo } \alpha, \lambda \geq 0.$$

Análogamente, el proceso bivariado  $(\widehat{L}^{-1}, \widehat{H})$ , llamado proceso escala descendente, es construido a partir del proceso de Lévy  $\widehat{X} = -X$ . Su exponente de Laplace lo denotaremos por

$$\widehat{\kappa}(\alpha, \lambda) = -\log\left(\mathbb{E}\left(e^{-\alpha \widehat{L}_1^{-1} - \lambda \widehat{H}_1}\right)\right), \text{ para todo } \alpha, \lambda \geq 0.$$

Definiendo el proceso  $L$  como

$$L_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s, \text{ para todo } t \geq 0,$$

es un tiempo local en 0 para el proceso  $\{\sup_{0 \leq s \leq t} X_s - X_t : t \geq 0\}$ . Ésto se puede ver a partir de que el proceso  $X$  tiene saltos no-positivos y tiene la propiedad fuerte de Markov [Kyp06, Teorema 3.1]; su inverso  $L^{-1}$  está dado por

$$L_t^{-1} = \inf\{t > 0 : X_s > t\}, \text{ para todo } t \geq 0,$$

y la escala ascendente  $H$  es de la forma

$$H_t = X_{L_t^{-1}} = t, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Quiere decir que el exponente de Laplace [Kyp06, Teorema 3.12] del proceso de escala ascendente,  $(L^{-1}, H)$ , queda determinado de la siguiente manera

$$\kappa(\alpha, \lambda) = \Phi(\alpha) + \lambda,$$

donde la función  $\Phi(\alpha)$  es definida como en la ecuación (2.3).

Teniendo en cuenta la ecuación anterior y la Factorización de Wiener-Hopf [Kyp06, Teorema 6.16] se puede ver que el exponente de Laplace del proceso escala descendente,  $(\widehat{L}^{-1}, \widehat{H})$ , es de la forma

$$\widehat{\kappa}(\alpha, \lambda) = \frac{\alpha - \psi(\lambda)}{\Phi(\alpha) - \lambda}. \quad (4.1)$$

Suponiendo que  $\Phi(0) = 0$ , es decir,  $\psi(\lambda) \geq 0$ , para todo  $\lambda \geq 0$ , se puede ver que cuando  $\alpha = 0$  en la ecuación (4.1), el exponente de Laplace de la escala descendente  $\widehat{H}$  es

$$\phi(\lambda) = \widehat{\kappa}(0, \lambda) = \begin{cases} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}, & \text{si } \lambda > 0, \\ \psi'(0), & \text{si } \lambda = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Considerando el inverso de subordinador  $\widehat{H}$ ,  $E = \{E_t : t \geq 0\}$ , donde

$$E_t = \inf\{s > 0 : \widehat{H}_s > t\}, \text{ para todo } t \geq 0, \quad (4.3)$$

definimos la función de renovación  $U(t)$  como el valor esperado del inverso de subordinador, es decir

$$U(t) = \mathbb{E}(E_t), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Como los eventos  $\{\widehat{H}_x < t\}$  y  $\{E_t > x\}$  son iguales para todo  $t, x \geq 0$ , y tomando  $F_x(t) = \mathbb{P}(\widehat{H}_x < t)$ , con  $t, x \geq 0$ , se sigue por el Teorema de Fubini que la transformada de Laplace de la función de renovación  $U$ , que denotaremos por  $\widetilde{U}$ , es de la forma

$$\begin{aligned} \widetilde{U}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{P}(E_t > x) dx dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} F_x(t) dt dx, \end{aligned} \tag{4.4}$$

para todo  $\lambda > 0$ .

Teniendo en cuenta de nuevo el Teorema de Fubini, se puede ver que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} F_x(t) dt &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-\lambda t} F_x(ds) dt \\ &= \int_0^\infty \int_s^\infty e^{-\lambda t} dt F_x(ds) \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda} F_x(ds) \\ &= \frac{e^{-x\phi(\lambda)}}{\lambda}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

para todo  $\lambda > 0$ .

Entonces, por las ecuaciones (4.2), (4.4) y (4.5) se sigue que

$$\widetilde{U}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-x\phi(\lambda)} dx = \frac{1}{\lambda\phi(\lambda)} = \frac{1}{\psi(\lambda)}, \tag{4.6}$$

para todo  $\lambda > 0$ .

Por otro lado, considerando el exponente de Laplace de la función de escala, ecuación (2.11), y la ecuación (4.6), se llega a que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} W(t) dt, \text{ para todo } \lambda > 0,$$

lo cual nos dice que la función de renovación  $U$  es igual a la función de escala  $W$ , cuando  $\Phi(0) = 0$ .

Note que la relación vista en los párrafos anteriores, es válida con cualquier medida de probabilidad  $\mathbb{P}^{\Phi(q)}$  con  $q > 0$ , la cual está definida en la ecuación (2.9). Es decir, definiendo una función de renovación  $U_{\Phi(q)}$  bajo esta medida y tomando la función de escala,  $W_{\Phi(q)}$ , que también está definida en el mismo espacio de probabilidad, se puede ver

que son iguales. Quiere decir que las funciones  $q$ -escala  $W^{(q)}$  con  $q > 0$ , están relacionadas con estas funciones de renovación, de la siguiente manera

$$W^{(q)}(x) = e^{x\Phi(q)}U_{\Phi(q)}(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y para todo } q > 0, \quad (4.7)$$

la cual se sigue de la ecuación (2.14) y la relación que hay entre la función de renovación  $U_{\Phi(q)}$  y la función de escala  $W_{\Phi(q)}$ .

## 4.1 Métodos numéricos y funciones $q$ -escala

En vista de la relación que hay entre las función de renovación  $U$  y la función de escala  $W$ , cuando  $\Phi(0) = 0$ , en esta subsección se tratarán dos métodos numéricos que nos servirán para aproximarnos a la función de renovación  $U$  por medio de la inversa de su transformada de Laplace  $\tilde{U}$ , obtenida en (4.6), y por ende obtener la función de escala  $W$ . De igual manera, obtendremos la aproximación de las funciones de renovación  $U_{\Phi(q)}$ , para así aproximarnos a las funciones  $q$ -escala  $W^{(q)}$ , con  $q > 0$ .

### 4.1.1 Método 1: Integral de Inversión de Bromwich

El primer método para calcular la inversa de la transformada  $\tilde{U}$  es por aproximación numérica de la Integral de Inversión de Bromwich [ACW00, Teorema 1].

**Teorema 11** (Integral de Inversión de Bromwich). Sea  $u$  una función real valuada y  $\tilde{u}$  su transformada de Laplace. Entonces

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{zt}\tilde{u}(z) dz, \text{ para todo } t \geq 0, \quad (4.8)$$

donde  $b$  es una constante real tal que la función  $\tilde{u}$  sea analítica en  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq b\}$ .

Haciendo el cambio de variable  $z = b + iy$ , con  $y \in \mathbb{R}$ , en la ecuación (4.8) se tiene que

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(b+iy)t}\tilde{u}(b + iy) dy, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Como  $\tilde{u}$  es real valuado en  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq b\} \cap \mathbb{R}$ , se sigue que  $\tilde{u}(z) = \overline{\tilde{u}(\bar{z})}$ , para todo  $z \in \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq b\}$ . Entonces, la ecuación (4.8) queda de la forma

$$2u(t) = \frac{2e^{bt}}{\pi} \int_0^{\infty} (\text{Re}(\tilde{u}(b + iy)) \cos(yt) - \text{Im}(\tilde{u}(b + iy)) \sin(yt)) dy,$$

para todo  $t \geq 0$ , por lo que obtenemos que

$$u(t) = \frac{2e^{bt}}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}(\tilde{u}(b + iy)) \cos(yt) dy, \quad (4.9)$$

y

$$u(t) = -\frac{2e^{bt}}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im}(\tilde{u}(b + iy)) \sin(yt) dy, \quad (4.10)$$

para todo  $t \geq 0$ .

Una manera de obtener aproximaciones de las integrales anteriores es a partir de la Regla Trapezoidal. A saber: sea  $f$  una función acotada en  $[c, d]$  cuyo conjunto de discontinuidades tiene medida cero, entonces

$$\int_c^d f(x) dx \approx \frac{d-c}{m} \left( \frac{f(c) + f(d)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} f\left(c + k \frac{d-c}{m}\right) \right), \quad (4.11)$$

con  $m$  suficientemente grande.

Para utilizar esta regla primero hacemos el cambio de variable  $y = \frac{1-s}{s}$  en las ecuaciones (4.9) y (4.10), quedando así

$$u(t) = \frac{2e^{bt}}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{s^2} \operatorname{Re} \left( \tilde{u} \left( b + i \frac{1-s}{s} \right) \right) \cos \left( t \frac{1-s}{s} \right) ds, \quad (4.12)$$

y

$$u(t) = -\frac{2e^{bt}}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{s^2} \operatorname{Im} \left( \tilde{u} \left( b + i \frac{1-s}{s} \right) \right) \sin \left( t \frac{1-s}{s} \right) ds, \quad (4.13)$$

para todo  $t \geq 0$ .

Como los integrandos de las ecuaciones anteriores están indefinidas en el cero y la Regla Trapezoidal es para funciones acotadas, cuyo conjunto de discontinuidades es de medida cero en el intervalo cerrado  $[c, d]$ , tomamos a  $c > 0$ . De ese modo podemos aplicar la aproximación (4.11) a las integrales (4.12) y (4.13).

Para usar este método en nuestro caso, debemos averiguar que posibles valores toma la constante real  $b$ , para que al extender la transformada de Laplace  $\tilde{U}$  a los complejos sea analítica en  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq b\}$ .

Como el exponente de Laplace  $\psi$  es una función que inicia en cero y es no-decreciente en el intervalo  $[0, \infty)$ , por el supuesto de que  $\Phi(0)=0$ , se sigue de la ecuación (4.6) que el único punto singular de la función  $\tilde{U}$  en el intervalo  $[0, \infty)$  está en el origen, por lo que la constante real  $b$  debe ser mas grande que cero.

Observe que en las ecuaciones (4.9) y (4.10), en nuestro caso, sólo hace falta ver quien es la parte real e imaginaria de la transformada de Laplace  $\tilde{U}(b + iy)$ , donde  $y \in \mathbb{R}$ . Para ello, procedemos a evaluar la función (4.6) en  $b + iy$  y teniendo en cuenta que

$$\psi(b + iy) = \operatorname{Re}(\psi(b + iy)) + i\operatorname{Im}(\psi(b + iy)),$$

logramos obtener que

$$\operatorname{Re}(\tilde{U}(b + iy)) = \frac{\operatorname{Re}(\psi(b + iy))}{\operatorname{Re}(\psi(b + iy))^2 + \operatorname{Im}(\psi(b + iy))^2},$$

y

$$\operatorname{Im}(\tilde{U}(b + iy)) = -\frac{\operatorname{Im}(\psi(b + iy))}{\operatorname{Re}(\psi(b + iy))^2 + \operatorname{Im}(\psi(b + iy))^2},$$

para todo  $y \in \mathbb{R}$ , donde

$$\operatorname{Re}(\psi(b + iy)) = -ab + \frac{\sigma^2}{2}(b^2 - y^2) + \int_{(-\infty, 0)} (e^{bx} \cos(yx) - 1 - bx \mathbb{1}_{\{x > -1\}}) \nu(dx), \quad (4.14)$$

y

$$\operatorname{Im}(\psi(b + iy)) = -ay + \sigma^2 by + \int_{(-\infty, 0)} (e^{yx} \sin(yx) - yx \mathbb{1}_{\{x > -1\}}) \nu(dx), \quad (4.15)$$

para todo  $y \in \mathbb{R}$ . Las ecuaciones (4.14) y (4.15) se obtienen a partir del exponente de Laplace  $\psi$  evaluándolo en  $b + iy$ , y posteriormente tomando la parte real e imaginaria de éste.

En el caso en que la función de renovación sea  $U_{\Phi(q)}$ , que está bajo la medida de probabilidad  $\mathbb{P}^{\Phi(q)}$ , con  $q > 0$ , por la ecuación (2.10) se tiene que al extender su transformada de Laplace  $\tilde{U}_{\Phi(q)}$  sobre el conjunto  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > b\}$ , su parte real e imaginaria van a ser

$$\operatorname{Re}(\tilde{U}_{\Phi(q)}(b + iy)) = \frac{\operatorname{Re}(\psi(b + \Phi(q) + iy)) - q}{(\operatorname{Re}(\psi(b + \Phi(q) + iy)) - q)^2 + \operatorname{Im}(\psi(b + \Phi(q) + iy))^2},$$

y

$$\operatorname{Im}(\tilde{U}_{\Phi(q)}(b + iy)) = -\frac{\operatorname{Im}(\psi(b + \Phi(q) + iy))}{(\operatorname{Re}(\psi(b + \Phi(q) + iy)) - q)^2 + \operatorname{Im}(\psi(b + \Phi(q) + iy))^2},$$

para todo  $y \in \mathbb{R}$ . De igual manera que en las ecuaciones (4.14) y (4.15) se obtiene la parte real e imaginaria de la función  $\psi$  evaluada en  $b + \Phi(q) + iy$ .

#### 4.1.2 Método 2: Inversión Post-Widder

El siguiente método se basa en la Fórmula de Inversión Post-Widder [Fel71, VII.6].

**Teorema 12** (Fórmula de Inversión Post Widder). Sea  $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , una función tal que

$$\frac{u(x)}{x} \leq C, \text{ cuando } x \rightarrow \infty, \quad (4.16)$$

para alguna  $C \geq 0$ , y sea  $\tilde{u}$  la transformada de Laplace de  $u$ . Entonces

$$u(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{k}{t}\right)^k \tilde{u}^{(k-1)}\left(\frac{k}{t}\right), \text{ para todo } t > 0, \quad (4.17)$$

donde  $\tilde{u}^{(k)}$  denota la  $k$ -ésima derivada de  $\tilde{u}$ , con  $k \in \{0, 1, 2 \dots\}$ .

Observe que para usar la Fórmula de Inversión Post-Widder en nuestro caso, sólo debemos ver que la función de renovación  $U$  cumpla la condición (4.16). Gracias al Teorema de Renovación [Kyp06, Corolario 5.3] tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(\hat{H}_1)},$$

en el caso en que  $\mathbb{E}(\widehat{H}_1) < \infty$ . Si el subordinador  $\widehat{H}$  tiene esperanza infinita, se puede acotar inferiormente por un subordinador  $\widehat{H}^* = \{\widehat{H}_t^* : t \geq 0\}$  que tiene esperanza finita. Al tomar la función de renovación  $U^*$  de este nuevo subordinador se puede ver que ésta es más grande que la función de renovación  $U$  del subordinador  $\widehat{H}$  casi seguramente, y usando el Teorema de Renovación en el subordinador  $\widehat{H}^*$  se tiene que  $\frac{U(t)}{t}$  está acotado por una constante  $C \geq 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Más concretamente, el subordinador  $\widehat{H}^*$  es construido mediante el truncamiento de la medida de saltos del subordinador  $\widehat{H}$ . Es decir, como el proceso  $\widehat{H}$  se puede escribir de la siguiente manera [Kyp06, Lema 2.12]

$$\widehat{H}_t = dt + \int_{[0,t]} \int_0^\infty x N(ds \times dx), \text{ para todo } t \geq 0,$$

donde  $N$  es la medida aleatoria de Poisson en  $([0, \infty) \times (0, \infty), \mathcal{B}, dt \times \Pi(dx))$ , siendo  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}(0, \infty)$ ,  $\Pi$  la medida de saltos del subordinador  $\widehat{H}$  y  $d \geq 0$ , definimos la medida de saltos  $\Pi_k$ , con  $k \geq 1$ , como

$$\Pi_k(dx) = \Pi(dx) \mathbb{1}_{\{x < k\}} + \delta_k(dx) \Pi([k, \infty)).$$

Esta nueva medida tiene saltos menores o igual a  $k$  y cumple que

$$\Pi_k((-\infty, 0)) = 0, \quad \int_0^\infty (1 \wedge x^2) \Pi_k(dx) < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^\infty (1 \wedge x) \Pi_k(dx) < \infty, \quad (4.18)$$

las cuales son heredadas de la medida de saltos  $\Pi$  [Kyp06, Lema 2.14].

Definiendo el proceso  $\widehat{H}^* = \{\widehat{H}_t^* : t \geq 0\}$  tal que

$$\widehat{H}_t^* = dt + \int_{[0,t]} \int_0^\infty x N^*(ds \times dx), \text{ para todo } t \geq 0,$$

donde  $N^*$  es la medida aleatoria de Poisson en  $([0, \infty) \times (0, \infty), \mathcal{B}, dt \times \Pi_k(dx))$ , siendo  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}(0, \infty)$ , se sigue de (4.18) que el proceso  $\widehat{H}^*$  es un subordinador [Kyp06, Lema 2.14].

Note que los saltos del subordinador  $\widehat{H}^*$  son iguales al subordinador  $\widehat{H}$  en el caso en que los saltos sean menores a  $k$ . En caso contrario, los saltos de éste van a ser igual  $k$ . Lo que nos lleva a que  $\widehat{H}_t^* \leq \widehat{H}_t$ , para todo  $t \geq 0$ . Además, usando el Teorema de Campbell [Kyp06, Teorema 2.7] se llega a que

$$\mathbb{E}(\widehat{H}_1^*) = d + \int_0^\infty x \Pi_k(dx) = d + \int_0^k \Pi((s, k)) ds + k \Pi([k, \infty)) < \infty.$$

Entonces, tomando la inversa de  $\widehat{H}^*$ ,  $E^* = \{E_t^* : t \geq 0\}$ , que está definida como

$$E_t^* = \inf\{s > 0 : \widehat{H}_s^* > t\}, \text{ para todo } t \geq 0,$$

se tiene que

$$E_t \leq E_t^*, \text{ para todo } t \geq 0, \text{ c. s.,}$$

y de ahí que

$$U(t) \leq U^*(t), \text{ para todo } t \geq 0 \text{ c. s.},$$

donde  $U^*$  es la función de renovación del subordinador  $\widehat{H}^*$ . Usando el Teorema de Renovación en el subordinador  $\widehat{H}^*$  se sigue que  $\frac{U(t)}{t}$  está acotado por una constante  $C \geq 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Ya que la función de renovación  $U$  cumple la ecuación (4.17), para  $k$  suficientemente grande tenemos una aproximación de ésta de la siguiente manera

$$U(t) \approx \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{k}{t}\right)^k \widetilde{U}^{(k-1)}\left(\frac{k}{t}\right), \text{ para todo } t > 0, \quad (4.19)$$

donde  $\widetilde{U}^{(k)}$  es la  $k$ -ésima derivada de  $\widetilde{U}$ .

Una forma de calcular la  $k$ -ésima derivada de la función  $\widetilde{U}$ , de la ecuación anterior, es a partir de la Fórmula de Leibnitz, a saber: dadas dos funciones  $f, g$  cuyas  $k$ -ésimas derivadas  $f^{(k)}, g^{(k)}$ , con  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , existen, entonces

$$(fg)^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(k-i)}(t)g^{(i)}(t), \text{ con } t \in \mathbb{R},$$

donde  $(fg)^{(k)}$  es la  $k$ -ésima derivada de la función  $fg$ .

Sea  $k \geq 1$ ,  $t > 0$  y  $\lambda > 0$ . Usando la fórmula de Leibnitz en la función unidad  $1 = \psi(\lambda)\widetilde{U}(\lambda)$ , se tiene que

$$\sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \psi^{(j-i)}(\lambda)\widetilde{U}^{(i)}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{si } j = 0, \\ 0, & \text{si } j \geq 1, \end{cases}$$

para todo  $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ , la cual es equivalente a la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} \psi(\lambda) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi^{(1)}(\lambda) & \psi(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi^{(2)}(\lambda) & 2\psi^{(1)}(\lambda) & \psi(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ \psi^{(3)}(\lambda) & 3\psi^{(2)}(\lambda) & 3\psi^{(1)}(\lambda) & \psi(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ \psi^{(k-1)}(\lambda) & (k-1)\psi^{(k-2)}(\lambda) & & & \dots & \psi(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{U}(\lambda) \\ \widetilde{U}^{(1)}(\lambda) \\ \widetilde{U}^{(2)}(\lambda) \\ \widetilde{U}^{(3)}(\lambda) \\ \vdots \\ \widetilde{U}^{(k-1)}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Observe que las entradas de la matriz de tamaño  $k \times k$  de la fórmula anterior, depende de la  $k$ -ésima derivada de la función  $\psi$ . Por las ecuaciones (2.2), (A.8), (A.12) y (A.15) se

sigue que

$$\psi^{(j)}(\lambda) = \begin{cases} -a\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{(-\infty,0)} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{\{x>-1\}})\nu(dx), & \text{si } j = 0, \\ -a + \sigma^2\lambda + \int_{(-\infty,0)} x(e^{\lambda x} - \mathbb{1}_{\{x>-1\}})\nu(dx), & \text{si } j = 1, \\ \sigma^2 + \int_{(-\infty,0)} x^2 e^{\lambda x} \nu(dx), & \text{si } j = 2, \\ \int_{(-\infty,0)} x^n e^{\lambda x} \nu(x), & \text{si } j \geq 3. \end{cases} \quad (4.21)$$

Tomando  $\lambda = \frac{k}{t}$  y resolviendo el sistema de ecuaciones (4.20) se tiene la  $(k-1)$ -ésima derivada de  $\tilde{U}$  evaluada en  $\frac{k}{t}$ .

El caso en que la función de renovación es  $U_{\Phi(q)}$ , que está bajo la medida de probabilidad  $\mathbb{P}^{\Phi(q)}$ , se procede de igual manera que en el caso de la función de renovación  $U$ , teniendo en cuenta que la  $k$ -ésima derivada de su transformada de Laplace,  $\tilde{U}_{\Phi(q)}$ , está determinada por el exponente de Laplace  $\psi_{\Phi(q)}$  y sus derivadas, que a su vez están determinadas por la función  $\psi$ . Es decir, teniendo en cuenta la ecuación (2.10)

$$\psi_{\Phi(q)}^{(j)}(\lambda) = \begin{cases} \psi(\lambda + \Phi(q)) - q, & \text{si } j = 0, \\ \psi^{(j)}(\lambda + \Phi(q)), & \text{si } j \geq 1. \end{cases}$$

### 4.1.3 Algunos ejemplos

En esta parte se darán tres ejemplos que ilustran los métodos numéricos anteriores para aproximarnos a las funciones de escalas  $W$  y  $W_{\Phi(q)}$ , que están bajo las medidas de probabilidad  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{P}^{\Phi(q)}$  respectivamente. Además, a partir de la ecuación (4.7) ilustraremos unas aproximaciones de las funciones  $q$ -escala  $W^{(q)}$ .

### Ejemplos

1. Un ejemplo sencillo de una función de escala es considerando el proceso  $X = \{X_t : t \geq 0\}$  como

$$X_t = \sqrt{2d}B_t + \kappa t, \text{ para todo } t > 0,$$

donde  $d, \kappa > 0$  y  $B = \{B_t : t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano estándar.

Como  $B$  es un proceso que tiene trayectorias continuas casi seguramente, la medida de saltos del proceso  $X$  es cero. Entonces, por la ecuación (2.2), su exponente de Laplace es

$$\psi(\lambda) = \kappa\lambda + d\lambda^2, \text{ para todo } \lambda \geq 0. \quad (4.22)$$

A partir de esta ecuación y la ecuación (2.11), se tiene por inversión de Laplace, que las funciones  $W$  y  $W^{(q)}$ , con  $q > 0$ , son de la siguiente manera

$$W(x) = \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-x\frac{\kappa}{d}}) \quad \text{y} \quad W^{(q)}(x) = D_1 e^{xp_1} + D_2 e^{xp_2},$$

para todo  $x \geq 0$ , donde

$$D_1 = \frac{1}{d(p_1 - p_2)} \quad \text{y} \quad D_2 = \frac{1}{d(p_2 - p_1)},$$

tal que  $p_1, p_2$ , con  $p_1 \neq p_2$ , son las raíces del polinomio  $\psi(\lambda) - q$ .

En el caso en que  $\kappa = 1$  y  $d = 10$ , la Figura 1.a muestra la aproximación que se tiene de la función  $W$  mediante el Método 1 para diferentes valores de  $m$ , el cual usamos teniendo en cuenta la ecuación (4.22) y la Regla Trapezoidal dada en la ecuación (4.11), con  $b = 10^{-4}$  y  $c = 10^{-5}$ .

La Figura 1.b muestra las distancias que hay entre la función  $W$  y su aproximación para valores diferentes de  $m$ . Observe que la distancia se aproximan linealmente a cero a medida que el número de iteraciones  $m$  aumenta.

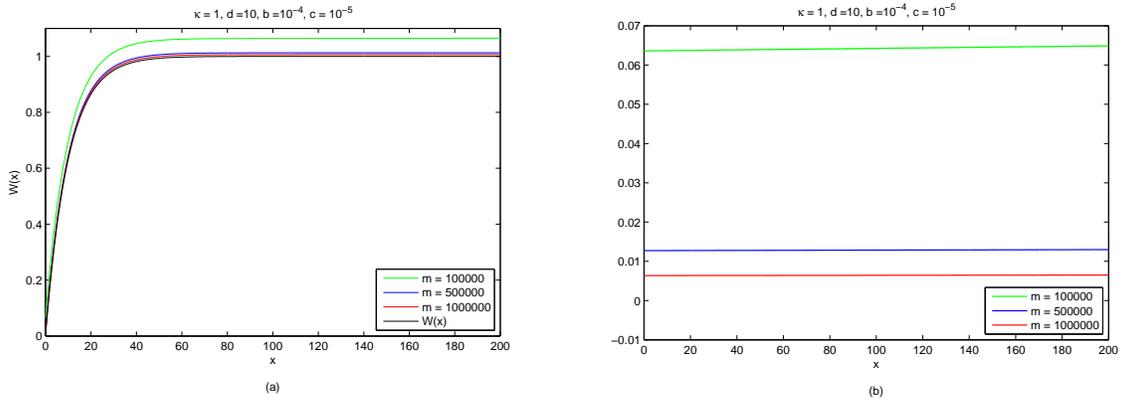


Figura 1. Método Integral de Inversión de Bromwich. (a) Aproximación de la función de escala  $W$  para diferentes valores de  $m$ . (b) Distancia entre la función de escala  $W$  y su aproximación para diferentes valores de  $m$ .

En el Método 2 como ya explicamos, primero debemos calcular la  $k$ -ésima derivada de la función  $\tilde{U}$ . Teniendo en cuenta la ecuación (4.22) podemos ver que la  $k$ -ésima derivada de  $\tilde{U}$  es de la forma

$$\tilde{U}^{(k)}(\lambda) = \frac{(-1)^k k!}{(\lambda(\kappa + d\lambda))^{k+1}} \left( \kappa^k + \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} (d\lambda)^{k-(i-1)} \kappa^{i-1} \right),$$

para todo  $\lambda > 0$  y para todo  $k > 0$ . Entonces, por la ecuación (4.19) se tiene que

$$U(t) \approx \left( \frac{t}{t\kappa + dk} \right)^k \left( \kappa^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \left( \frac{dk}{t} \right)^{k-i} \kappa^{i-1} \right), \quad (4.23)$$

para todo  $t > 0$  y  $k$  suficientemente grande.

En la Figura 2.a, ilustra la aproximación de la función de escala  $W$  usando la fórmula (4.23) para diferentes valores de  $k$ , y la Figura 2.b muestra la distancia de la función de escala y su aproximación para diferentes valores de  $k$ . Observe que el número de iteraciones es menor que en el Método 1 y es una mejor aproximación a la función  $W$ .

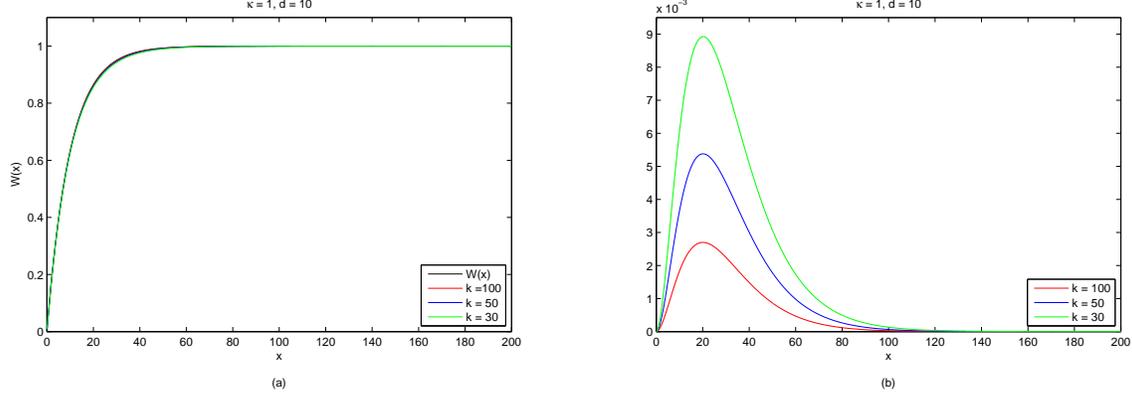


Figura 2. Método de Inversión Post-Widder. (a) Aproximación de la función de escala  $W$  para diferentes valores de  $k$ . (b) Distancia entre la función de escala  $W$  y su aproximación de la función de escala  $W$  para diferentes valores de  $k$ .

En vista de que el Método de Inversión Post-Widder resulta ser mejor que el Método Integral de Inversión de Bromwich, se mostrará la aproximación de la función de escala  $W_{\Phi(q)}$  aplicando este método y en consecuencia, por la fórmula (4.7), se obtendrán la aproximación de la función  $q$ -escala  $W^{(q)}$ .

Por las ecuaciones (2.10) y (4.6), la transformada de Laplace,  $\tilde{U}_{\Phi(q)}$ , de la función de renovación  $U_{\Phi(q)}$ , que está sobre el espacio de probabilidad  $\mathbb{P}^{\Phi(q)}$ , va a ser de la forma

$$\tilde{U}_{\Phi(q)}(\lambda) = \frac{1}{\kappa(\lambda + \Phi(q)) + d(\lambda + \Phi(q))^2 - q},$$

para todo  $\lambda > 0$  y  $q > 0$ .

Definiendo las funciones  $f, g$  como

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \Phi(q)} \quad \text{y} \quad g(\lambda) = \frac{1}{\kappa + d(\lambda + \Phi(q)) - \frac{q}{\lambda + \Phi(q)}},$$

para todo  $\lambda > 0$ , se tiene que la función  $\tilde{U}_{\Phi(q)}$  queda determinada por estas funciones de la siguiente manera

$$\tilde{U}_{\Phi(q)}(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda), \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Entonces, teniendo en cuenta la Fórmula de Leibnitz, la  $k$ -ésima derivada de  $\tilde{U}_{\Phi(q)}$  va a ser

$$\tilde{U}_{\Phi(q)}^{(k)}(\lambda) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(k-i)}(\lambda)g^{(i)}(\lambda), \quad (4.24)$$

para todo  $\lambda > 0$  y para todo  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Note que la  $k$ -ésima derivada de  $f$  es de la forma

$$f^{(k)}(\lambda) = \frac{(-1)^k k!}{(\Phi(q) + \lambda)^{k+1}}, \quad (4.25)$$

para todo  $\lambda > 0$  y para todo  $k \geq 1$ .

La  $k$ -ésima derivada de la función  $g$  no tiene un desarrollo sencillo, pero aplicando la Fórmula de Leibnitz a la función unidad  $1 = g_1(\lambda)g(\lambda)$ , donde

$$g_1(\lambda) = \kappa + d(\lambda + \Phi(q)) - \frac{q}{\lambda + \Phi(q)},$$

para todo  $\lambda > 0$ , se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} g_1(\lambda) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1^{(1)}(\lambda) & g_1(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1^{(2)}(\lambda) & 2g_1^{(1)}(\lambda) & g_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ g_1^{(3)}(\lambda) & 3g_1^{(2)}(\lambda) & 3g_1^{(1)}(\lambda) & g_1(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ g_1^{(k)}(\lambda) & kg_1^{(k-1)}(\lambda) & & & \dots & g_1(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(\lambda) \\ g^{(1)}(\lambda) \\ g^{(2)}(\lambda) \\ g^{(3)}(\lambda) \\ \vdots \\ g^{(k)}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

donde

$$g_1^{(j)}(\lambda) = \begin{cases} \kappa + d(\lambda + \Phi(q)) - \frac{q}{\lambda + \Phi(q)}, & \text{si } j = 0, \\ \frac{1}{(\Phi(q) + \lambda)^2} (d(\Phi(q) + \lambda)^2 + q), & \text{si } j = 1, \\ j!q \left( \frac{-1}{\Phi(q) + \lambda} \right)^{j+1}, & \text{si } j \geq 2, \end{cases}$$

para todo  $\lambda > 0$ .

Fijando  $\lambda > 0$  y desarrollando el sistema de ecuaciones (4.26) se tiene el vector de derivadas de la función  $g$  evaluadas en  $\lambda$ . Entonces, teniendo en cuenta la ecuación (4.25) se obtiene la  $k$ -ésima derivada de  $\tilde{U}_{\Phi(q)}$ . Quiere decir que si tomamos  $\lambda = \frac{k}{t}$ , con  $t > 0$  y  $k$  suficientemente grande, y la ecuación (4.19), se tiene una aproximación de la función  $U_{\Phi(q)}$  y por ende a  $W_{\Phi(q)}$ .

Tomando  $\kappa = 1$  y  $d = 10$ , la Figura 3 muestra la aproximación de la función de escala  $W_{\Phi(q)}$ .

La Figura 4 y la Figura 5 muestran las aproximaciones de la función  $q$ -escala  $W^{(q)}$  en el caso en que  $q = 0.1, 0.4$ . Además muestran las distancias entre la función  $q$ -escala y sus aproximaciones.

Nótese que la Figura 5.c muestra que la distancia entre la función  $q$ -escala y su aproximación se hace cada vez más grandes cuando  $k$  y  $x$  toman valores suficientemente grandes.

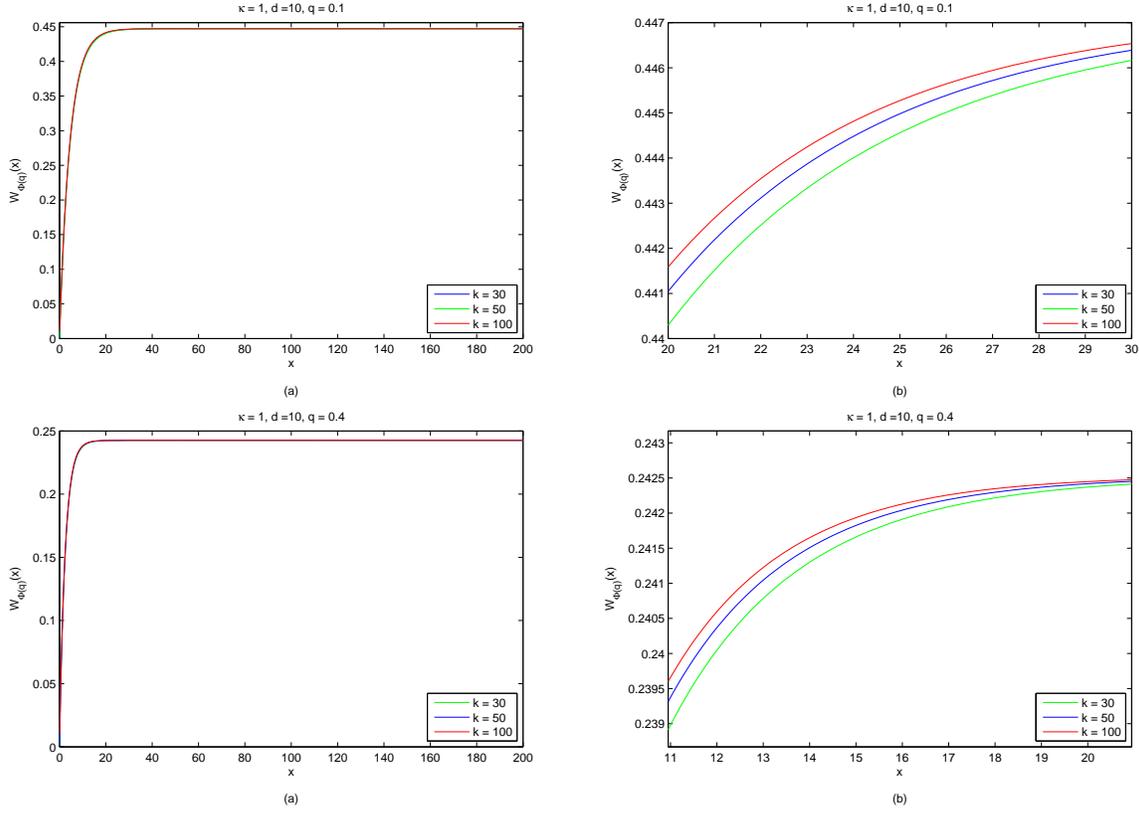


Figura 3. Aproximación de la función  $W_{\Phi(q)}$  por el Método Inversión Post-Widder para diferentes valores de  $k$ .

2. En [CKP09, Página 10] muestran que la función

$$\psi(\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda + \alpha)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\alpha)}, \text{ para todo } \lambda \geq 0, \quad (4.27)$$

donde  $\alpha \in (1, 2)$ , es una exponente de Laplace de un proceso de Lévy espectralmente negativo, y la función de escala asociada a esta función es de la forma

$$W(x) = (1 - e^{-x})^{\alpha-1}, \text{ para todo } x \geq 0.$$

A partir del exponente de Laplace dado en (4.27), se tiene que la transformada de Laplace de  $U, \tilde{U}$ , es de la forma

$$\tilde{U}(\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\lambda + \alpha)}, \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Como el Método de Integración de Inversión de Bromwich depende de la elección de la constante real  $b > 0$ , en este ejemplo vemos que para diferentes valores de  $b$  la aproximación a la función  $W$  no es muy buena (Figura 6), a pesar de que el número de iteraciones es grande.

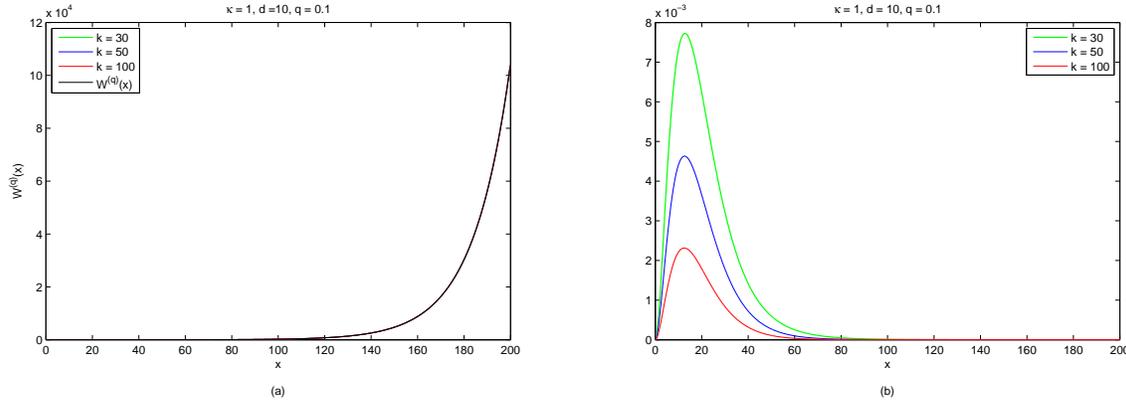


Figura 4. (a) Aproximación de la función  $q$ -escala  $W^{(q)}$  por el Método Inversión Post-Widder cuando  $q = 0.1$  para diferentes valores de  $k$ . (b) Distancia entre la función  $q$ -escala  $W^{(q)}$  y su aproximación para diferentes valores de  $k$ .

Al igual que en el ejemplo anterior, para desarrollar el Método de Inversión Post-Widder se debe primero calcular la  $k$ -ésima derivada de  $\tilde{U}$ , que se obtiene a partir de las derivadas de la función gamma, a saber

$$\Gamma^{(k)}(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t} (\log t)^k dt, \quad \text{para todo } \lambda > 0, \quad (4.28)$$

con  $k \geq 0$ . Entonces, definiendo las funciones  $g, g_1$  como

$$g(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda + \alpha)} \quad \text{y} \quad g_1(\lambda) = \Gamma(\lambda + \alpha),$$

para todo  $\lambda > 0$ , y aplicando la Fórmula de Leibnitz a la función unidad  $1 = g(\lambda)g_1(\lambda)$ , para todo  $\lambda > 0$ , tenemos un sistema de ecuaciones como en (4.26), donde  $g_1^{(j)}(\lambda) = \Gamma^{(j)}(\lambda + \alpha)$ , para todo  $\lambda > 0$  y para todo  $j \geq 0$ . Fijando  $\lambda > 0$  y desarrollando dicho sistema de ecuaciones se obtiene el vector de derivadas de la función  $g$  evaluadas en  $\lambda$ . Tomando  $\lambda = \frac{k}{t}$ , con  $t > 0$ , y teniendo en cuenta que  $\tilde{U}(\lambda) = \Gamma(\lambda)\Gamma(\alpha)g_1(\lambda)$ , con  $\lambda > 0$ , se aplica la Fórmula de Leibnitz a  $\tilde{U}$ , obteniendo así la  $k$ -ésima derivada de ésta evaluada en  $\frac{k}{t}$ . Entonces, tomando  $k$  suficientemente grande y considerando la ecuación (4.19) se obtiene una aproximación de la función de escala  $W$ .

Una manera de tener la aproximación de las derivadas de la función gamma, es a partir de la Regla trapezoidal (4.11). Haciendo dos cambios de variable en la integral (4.28), a saber  $x = \log t$  y luego  $x = \frac{t-1}{t}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \Gamma^{(k)}(\lambda) = \int_0^1 \exp\left(\frac{t-1}{t}\lambda - \exp\left(\frac{t-1}{t}\right)\right) \frac{(t-1)^k}{t^{k+2}} \\ + \exp\left(\frac{1-t}{t}\lambda - \exp\left(\frac{1-t}{t}\right)\right) \frac{(1-t)^k}{t^{k+2}} dt, \end{aligned}$$

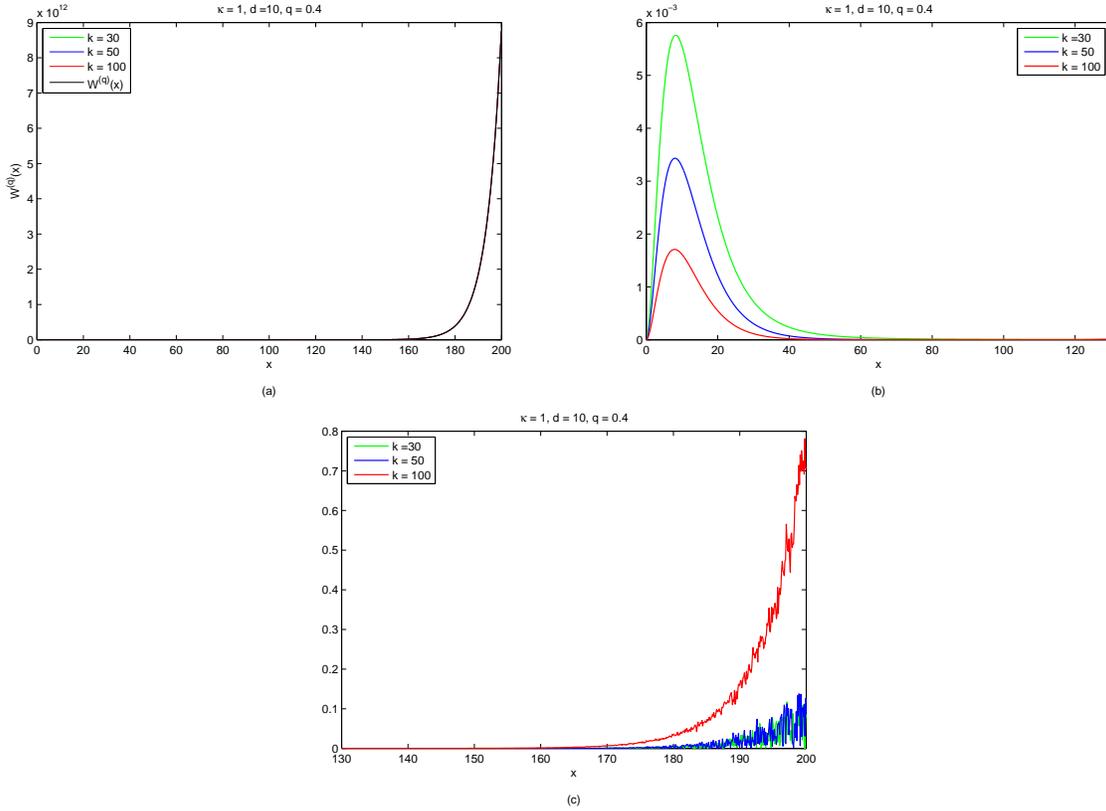


Figura 5. (a) Aproximación de la función  $W^{(q)}$  por el Método Inversión Post-Widder cuando  $q = 0.4$  para diferentes valores de  $k$ . (b) Distancia entre la función  $q$ -escala  $W^{(q)}$  y su aproximación para diferentes valores de  $k$  en el intervalo  $[0, 130]$ . (c) Distancia entre la función  $q$ -escala  $W^{(q)}$  y su aproximación para diferentes valores de  $k$  en el intervalo  $[130, 200]$ .

para todo  $\lambda > 0$  y para todo  $k \geq 0$ . Así, tomando  $c$  cercano a cero en (4.11), se obtiene la aproximación de la integral anterior.

Un inconveniente que tiene el Método de Inversión Post Widder en este ejemplo, es que al tomar  $t$  suficientemente pequeño la función gamma y sus derivadas toman valores muy grandes, que computacionalmente son infinito. Es por eso que en la Figura 7 se muestra la aproximación de  $W$  para valores de  $k$  pequeños.

En vista de que las aproximación por el Método Integral de Inversión de Bromwich no ha sido muy buena para diferentes valores de  $m$ , usaremos el Método de Inversión Post-Widder para obtener las funciones  $W_{\Phi(q)}$ , que están bajo la medida  $\mathbb{P}^{\Phi(q)}$ . Para lograrlo debemos tener la  $k$ -ésima derivada de la transformada de Laplace,  $\tilde{U}_{\Phi(q)}$ , de la función de renovación  $U_{\Phi(q)}$ .

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de  $U$  se obtienen las derivadas  $\tilde{U}_{\Phi(q)}$ , teniendo en cuenta que

$$\tilde{U}_{\Phi(q)}(\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda + \Phi(q))\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\lambda + \Phi(q) + \alpha) - q\Gamma(\lambda + \Phi(q))\Gamma(\alpha)},$$

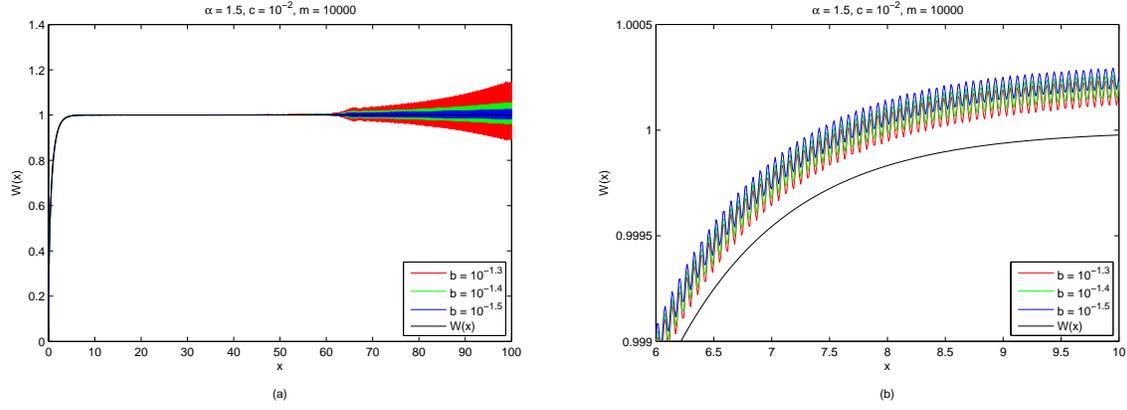


Figura 6. Método Integral de Inversión de Bromwich. Aproximación a partir de la Regla Trapezoidal.

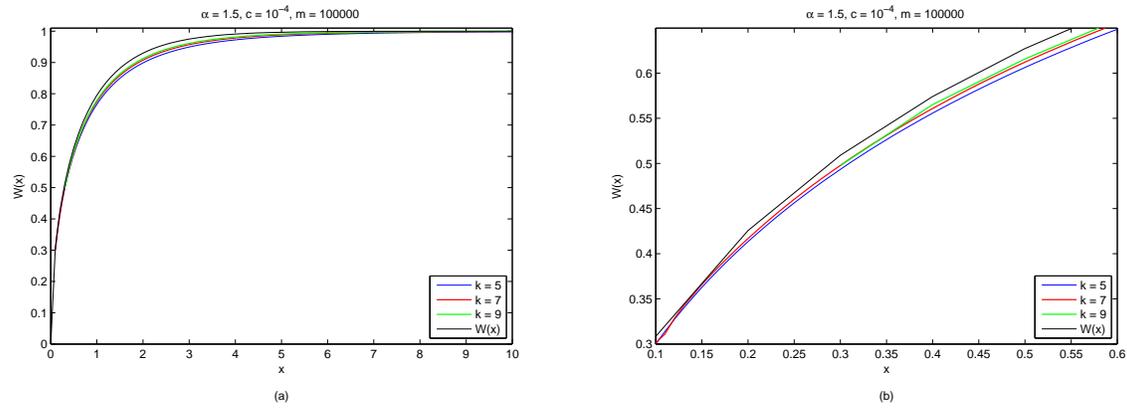


Figura 7. Método Inversión Post Widder.

y

$$\begin{aligned}
 &(\Gamma(\lambda + \Phi(q) + \alpha) \\
 &\quad - q\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda + \Phi(q)))^{(k)} = \Gamma^{(k)}(\lambda + \Phi(q) + \alpha) - q\Gamma(\alpha)\Gamma^{(k)}(\lambda + \Phi(q)),
 \end{aligned}$$

para todo  $\lambda > 0$  y para todo  $k \geq 0$ .

Al igual que en  $W$ , hay problemas cuando  $t$  es suficientemente pequeño, es por eso que en la Figura 8 se muestra la aproximación a  $W_{\Phi(q)}$  con valores pequeños de  $k$ , porque a valores grandes de  $k$  no se va a tener información de  $W_{\Phi(q)}$  en  $(0, p)$ , para algún  $p > 0$ .

En la Figura 9 se muestran las gráficas de las funciones  $W^{(q)}$ , con  $q = 0.1, 0.4$ ; se puede ver que para valores pequeños de  $k$  las aproximaciones están cercanas.

3. Sea  $X = \{X_t : t \geq 0\}$  un proceso tal que

$$X_t = x + dt - \sum_{i=1}^{N_t} C_i + \sigma B_t, \text{ para todo } t \geq 0,$$

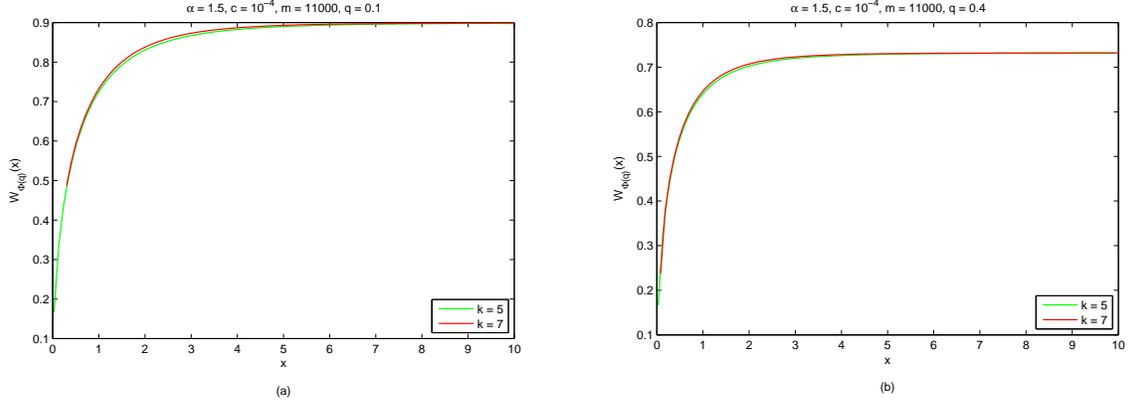


Figura 8. Aproximación a la función de escala  $W_{\Phi(q)}$  a partir del Método Inversión Post Widder.

donde  $d, \sigma > 0$ ; la sucesión de variables aleatorias  $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$  son independientes e idénticamente distribuidas, con  $C_1 \stackrel{d}{=} \text{Erlang}(2, \alpha)$ ; los procesos  $N = \{N_t : t \geq 0\}$  y  $B = \{B_t : t \geq 0\}$  son el proceso de Poisson con parámetro  $\theta > 0$  y un movimiento browniano, respectivamente.

La medida de saltos para este proceso está dada por la función de distribución  $C_1$  y la tasa de arribos del proceso de Poisson  $N$ , es decir  $\nu(dx) = -\theta\alpha^2 x e^{\alpha x} dx$ . Entonces el exponente de Laplace de  $X$  es de la forma

$$\psi(\lambda) = d\lambda - \theta + \frac{\theta\alpha^2}{(\alpha + \lambda)^2} + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2, \text{ para todo } \lambda \geq 0.$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior podemos obtener una forma explícita de las funciones  $W$  y  $W^{(q)}$ , invirtiendo sus transformadas de Laplace respectivamente.

La función de escala  $W$  tiene la forma

$$W(x) = \sum_{j=1}^3 c_j e^{p_j x} - \frac{\alpha^2}{\frac{1}{2}\sigma^2 \prod_{i=1}^3 p_i}, \text{ para todo } x \geq 0,$$

donde

$$c_j = \frac{(p_j + \alpha)^2}{\frac{1}{2}\sigma^2 p_j \prod_{i=1, j \neq i}^3 (p_j - p_i)},$$

tal que  $p_i \neq p_j \neq 0$ ,  $i \neq j$  y  $j, i = 1, 2, 3$ , son las raíces del polinomio

$$\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^3 + (d + \sigma^2\alpha)\lambda^2 + \left(2\alpha d - \theta + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2\right)\lambda + (d\alpha^2 - 2\theta\alpha).$$

La función escala  $W^{(q)}$ , con  $q > 0$ , tiene la forma

$$W^{(q)}(x) = \sum_{j=1}^4 D_j e^{\theta_j x}, \text{ para todo } x \geq 0,$$

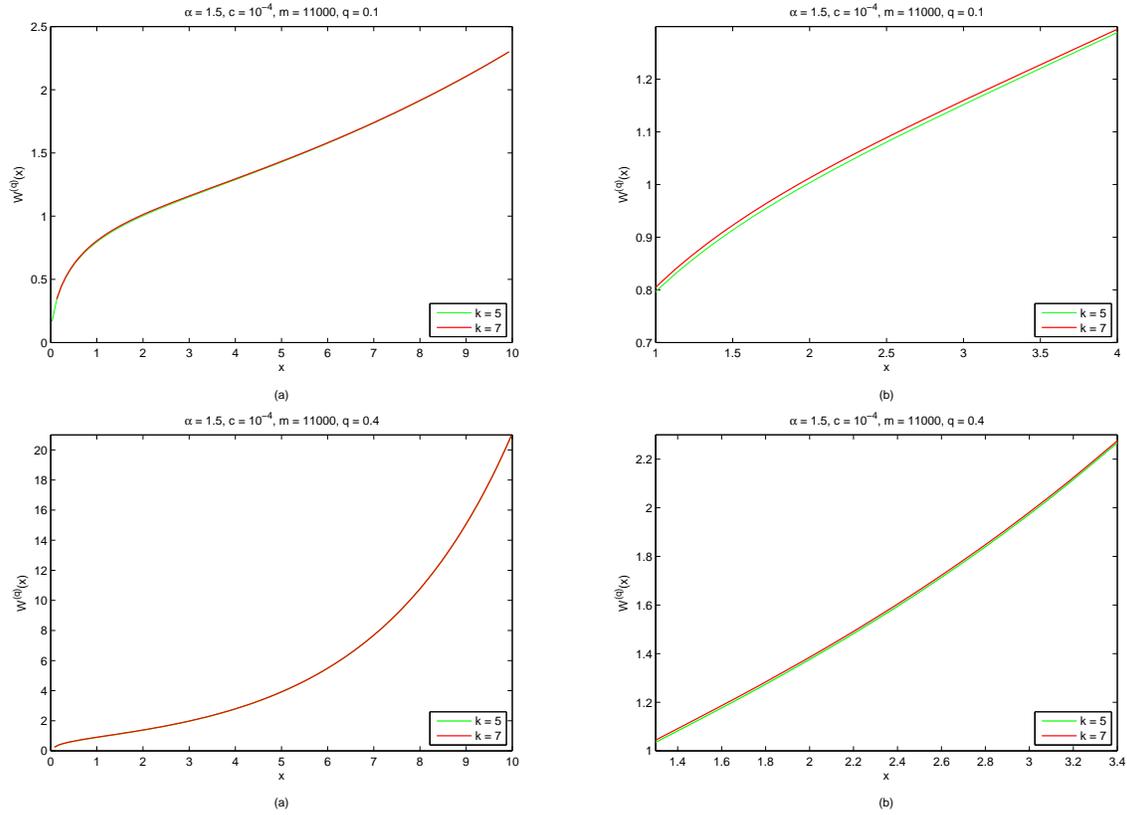


Figura 9. Aproximación a la función  $W^q$  a partir del Método Inversión Post Widder.

donde

$$D_j = \frac{(\alpha + \theta_j)^2}{\frac{1}{2}\sigma^2 \prod_{i=1, j \neq i}^4 (\theta_j - \theta_i)},$$

tal que  $\theta_i \neq \theta_j$ ,  $i \neq j$  y  $j, i = 1, 2, 3, 4$ , son las raíces del polinomio

$$(\psi(\lambda) - q)(\alpha + \lambda)^2.$$

En la Figura 10.a se muestra la aproximación de la función de escala  $W$  a partir del Método de Integral de Inversión de Bromwich; la Figura 10.b muestra las distancia que hay entre la función de escala y su aproximación para diferentes valores de  $m$ . Note que la aproximación requiere un número bastante grande de iteraciones para que estén cerca a la función  $W$ . En cambio, por el Método de Inversión Post-Widder ilustrado en la Figura 11, la aproximación que se obtienen es mejor que el Método de Integración de Inversión de Bromwich.

Para usar el Método de Inversión Post-Widder debemos calcular la  $k$ -ésima derivada de  $\frac{1}{\psi(\lambda)}$ , con  $\lambda > 0$ , que se obtiene de aplicar la Fórmula de Leibnitz a la función

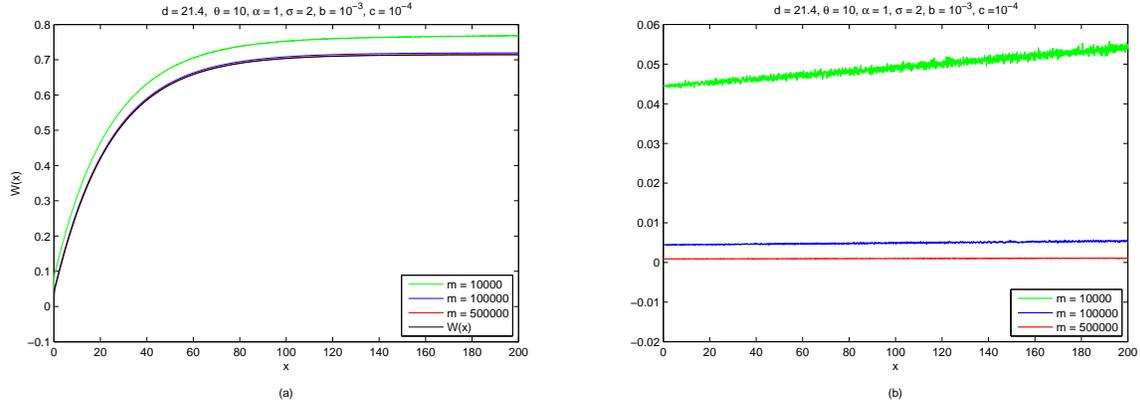


Figura 10. Método Integral de Inversión de Bromwich. (a) Aproximación de la función de escala  $W$  para diferentes valores de  $m$ . (b) Distancia entre la función de escala  $W$  y su aproximación para diferentes valores de  $m$ .

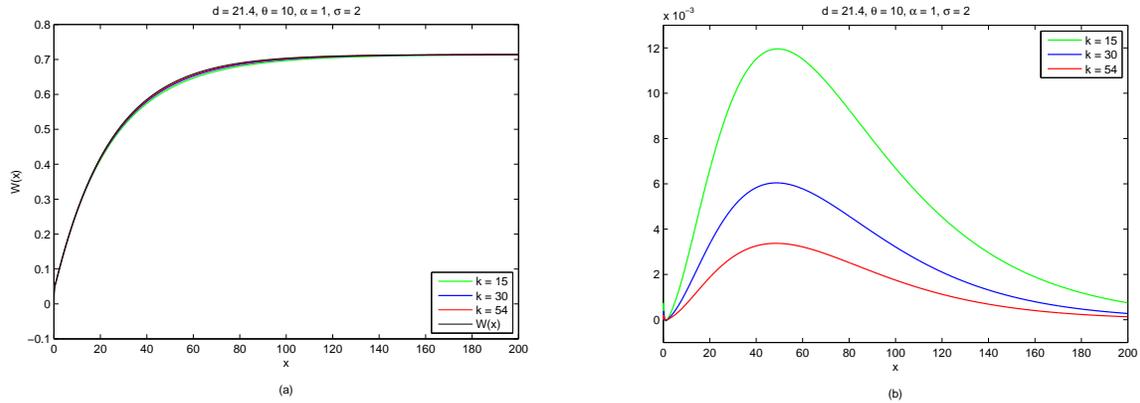


Figura 11. Método de Inversión Post-Widder. (a) Aproximación de la función de escala  $W$  para diferentes valores de  $k$ . (b) Distancia entre la función de escala  $W$  y su aproximación para diferentes valores de  $k$ .

unidad 1 =  $\psi(\lambda) \frac{1}{\psi(\lambda)}$ , teniendo en cuenta que

$$\psi^{(k)}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{(\lambda + \alpha)^3} (\lambda^4 \sigma^2 + (3\alpha \sigma^2 + d) \lambda^3 + 3((\alpha \sigma)^2 + d\alpha) \lambda^2 + d\alpha^3 - 2\theta \alpha^2), & \text{si } k = 1, \\ \frac{1}{(\lambda + \alpha)^4} (\lambda^4 \sigma^2 + 4\lambda^3 \alpha \sigma^2 + 6\lambda^2 (\alpha \sigma)^2 + 4\lambda \alpha^3 \sigma^2 + \alpha^4 \sigma^2 + 6\theta \alpha^2), & \text{si } k = 2, \\ (-1)^k (k + 1)! \frac{\alpha^2 \theta}{(\lambda + \alpha)^{k+2}}, & \text{si } k \geq 3, \end{cases}$$

para todo  $\lambda > 0$ .

Dado que en este ejemplo sigue siendo mejor aplicar el Método de Inversión Post-Widder, la aproximación de la función  $W_{\Phi(q)}$  que se ve en la Figura 12 para valores diferentes de  $k$ , fueron hechas a partir de este método para  $q = 0.1, 0.4$ .

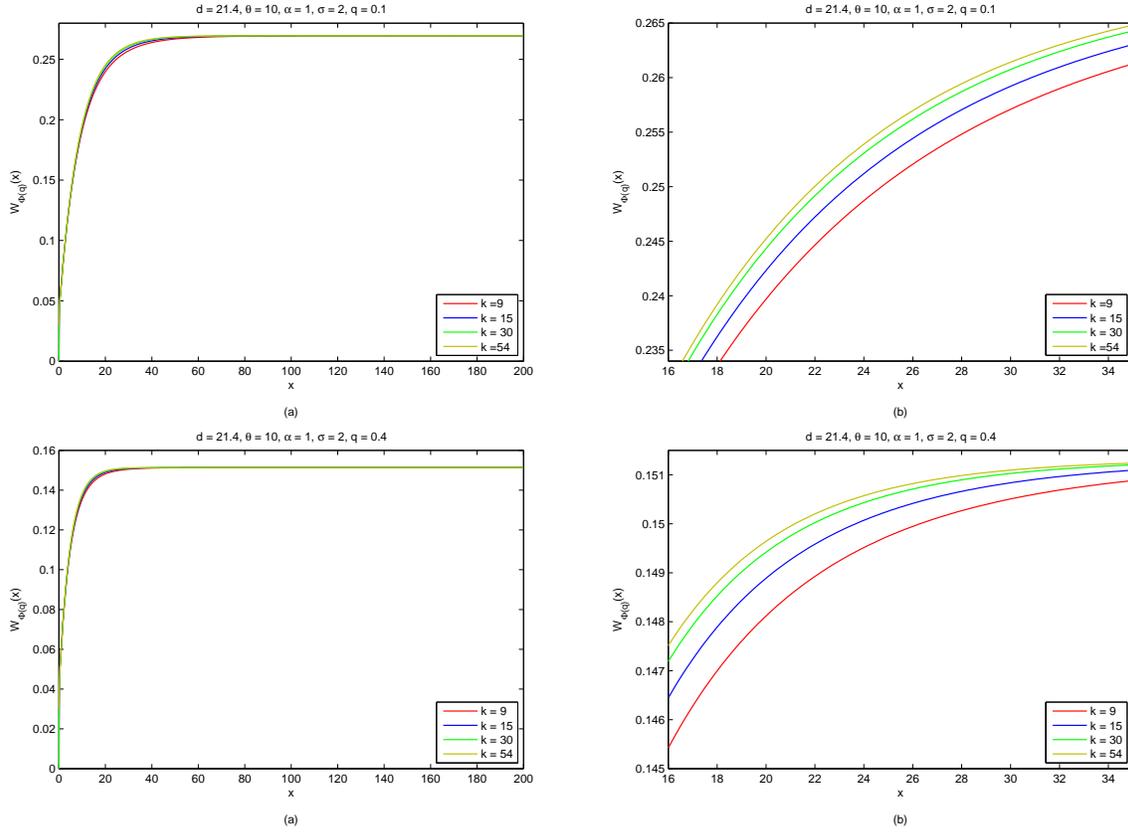


Figura 12. Aproximación a la función  $W_{\Phi(q)}$  a partir del Método Inversión Post Widder.

La Figura 13.a y la Figura 14.a muestran la función  $W^{(q)}$  y sus aproximaciones, que fueron realizadas a partir de las aproximaciones de la función  $W_{\Phi(q)}$  (Figura 12) y la ecuación (4.7); la Figura 13.b y la Figura 14.b muestran las distancias que hay entre la función  $W^{(q)}$  y sus aproximaciones.

Observe que para usar el Método de Integración de Inversión de Bromwich se requiere de un número de iteraciones muy grande para que la aproximación sea estable. Por ejemplo, en la Figura 6 o Figura 10 se observa que para valores de  $m$  alrededor de 10000 la aproximación a la función de escala oscila por las funciones coseno y seno que están en las fórmulas 4.9 y 4.10 respectivamente, lo cual nos lleva a tomar valores muy grandes de  $m$  y por ende los cálculos algorítmicos llevan demasiado tiempo computacionalmente hablando. En cambio, por el Método de Post-Widder con un número pequeño de iteraciones  $k$  se tiene una buena aproximación a la función de escala (Figura 11 o Figura 16). La distancia entre éstas y sus aproximaciones están en el orden de  $10^{-3}$ .

Como se dijo anteriormente la aproximación de las funciones  $q$ -escala están dadas por la aproximación de las funciones de escala  $W_{\Phi(q)}$ , las cuales se obtuvieron a partir del Método de Post-Widder. Al igual que la aproximación de las funciones de escala  $W$  se puede observar que las distancias entre su aproximación está también en el orden de  $10^{-3}$  (Figura 5, Figura 13 o Figura 14). Aunque también podemos ver en la Figura 5.c que hay un problema con la distancia entre la función  $q$ -escala y su aproximación cuando  $x$  y  $k$

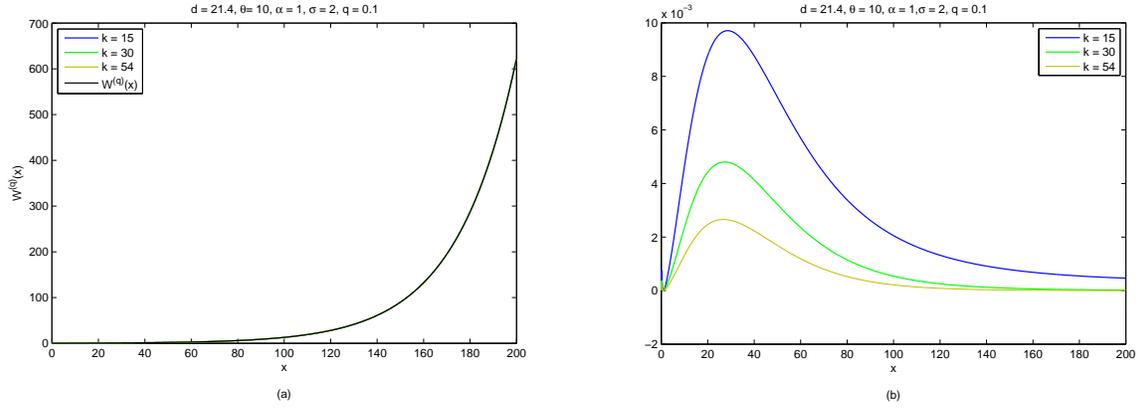


Figura 13. (a) Aproximación de la función  $W^{(q)}$  por el Método Inversión Post-Widder cuando  $q = 0.1$  para diferentes valores de  $k$ . (b) Distancia entre la función  $q$ -escala  $W^{(q)}$  y su aproximación para diferentes valores de  $k$ .

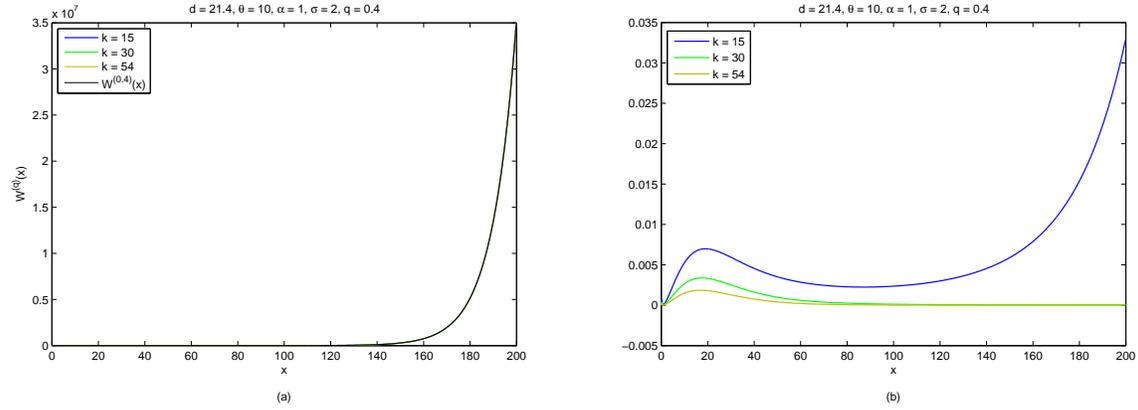


Figura 14. (a) Aproximación de la función  $W^{(q)}$  por el Método Inversión Post-Widder cuando  $q = 0.4$  para diferentes valores de  $k$ . (b) Distancia entre la función  $q$ -escala  $W^{(q)}$  y su aproximación para diferentes valores de  $k$ .

tienden a infinito, recordando que  $x \geq 0$  y  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Lo que se puede interpretar de esta gráfica es que tomando  $k$  grande, la aproximación a la función  $q$ -escala crece más rápido que la original cuando  $x \rightarrow \infty$ , o viceversa. Una razón por la que ocurre esto es porque a la hora de evaluar  $k$  para valores grandes en la ecuación (4.24), la combinatoria que hay en esta ecuación no la calcula MATLAB, así que hacemos uso de la igualdad

$$\binom{k}{i} = \exp\left(\sum_{j=1}^k \log(j) - \left(\sum_{j=1}^{k-i} \log(j) + \sum_{j=1}^i \log(j)\right)\right), \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, k,$$

la cual no es igual computacionalmente. Es por eso que para valores grandes de  $k$  la aproximación a  $W^{(q)}$  no resulta ser buena.

#### 4.1.4 Aplicación del Método Inversión Post Widder al problema de dividendos

En esta última parte se mostrarán gráficamente las condiciones suficientes que se vieron en el Lema 7 y Teorema 9. A la vez, a partir del Método de Inversión de Post-Widder obtendremos una aproximación de las funciones  $q$ -escala, para tener una aproximación de la estrategia de barrera  $a^*$ , para ello se usarán los ejemplos 1 y 3.

Para obtener la aproximación de la estrategia de barrera  $a^*$ , debemos primero aproximar la derivada de la función  $q$ -escala  $W^{(q)}$ , la cual se tendrá a partir de la aproximación de la derivada de la función obtenida del Método Inversión Post-Widder.

Dicha derivada se hallará por medio del siguiente método: sea  $f$  una función derivable en el punto  $x$ , entonces

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} + o(h^4). \quad (4.29)$$

Considérese el Ejemplo 1 de la subsección anterior. Eligiendo  $\kappa = 1$ ,  $d = 10$  y  $q = 0.1$ , se obtiene que  $a^* \approx 8.608$ .

En las Figuras 15 y 16 muestran las funciones  $W^{(q)'}$  y  $(\Gamma - q)v_{a^*}$ . Observe que estas gráficas ilustran las condiciones suficientes del Teorema 9 y Lema 7 respectivamente, lo que nos sugiere que la estrategia de barrera  $a^* \approx 8.608$  es una estrategia de barrera óptima para este problema.

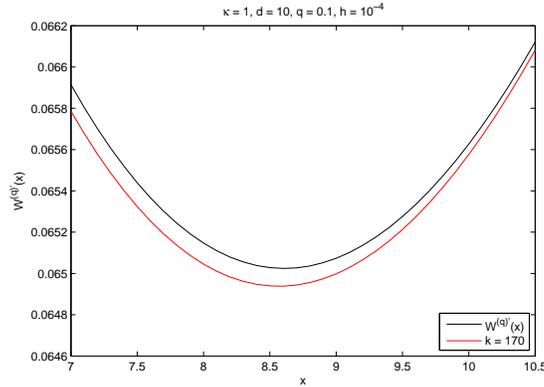


Figura 15. Función  $W^{(q)'}$  y su aproximación a partir de la ecuación (4.29) y el Método Inversión Post-Widder.

Por otra parte, teniendo en cuenta el Método Inversión Post-Widder, obtenemos que una estrategia de barrera para este problema es  $a_{P-W}^* \approx 8.59$ , la cual es obtenida a partir de las ecuaciones (4.23) y (4.29). Teniendo en cuenta esta estrategia de barrera, la Figura 16 ilustra la aproximación  $(\Gamma - q)v_{a_{P-W}^*}$ , sugiriendo que esta estrategia de barrera es una estrategia de barrera óptima.

Considérese el Ejemplo 3 de la subsección anterior. Eligiendo  $c = 21.4$ ,  $\theta = 10$ ,  $\alpha = 1$ ,  $q = 0.1$  y  $\sigma = 1.4$ , tenemos que una estrategia de barrera para este problema es de la forma  $a^* \approx 0.366323$ . En la Figura 17 ilustra que para esta estrategia de barrera no se cumplen las condiciones suficientes del Lema 7 y el Teorema 9, lo cual por este medio no podemos sugerir que sea una estrategia de barrera óptima. Aunque gráficamente, Figura 18, se puede ver que tomando  $a = 7, 8$  la función valor para estas estrategias de barrera

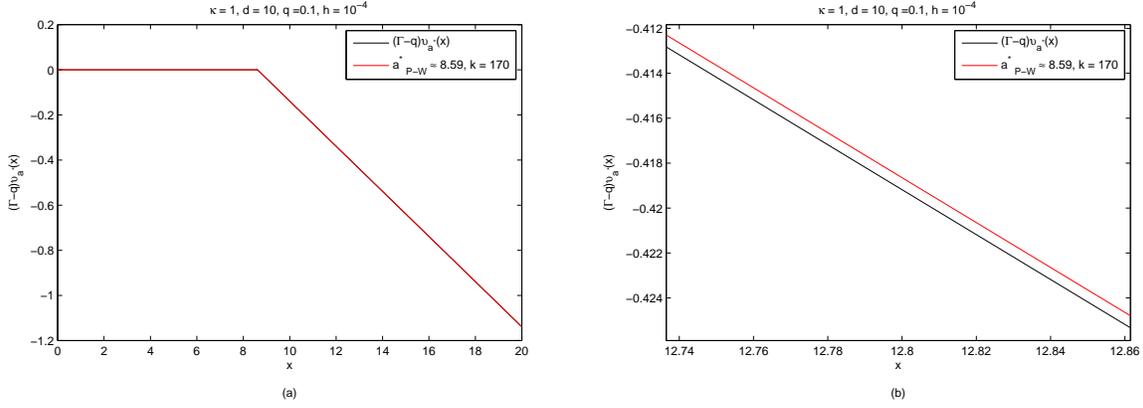


Figura 16. Función  $(\Gamma - q)v_{a^*}$  con  $a^* \approx 8.608$  y su aproximación.

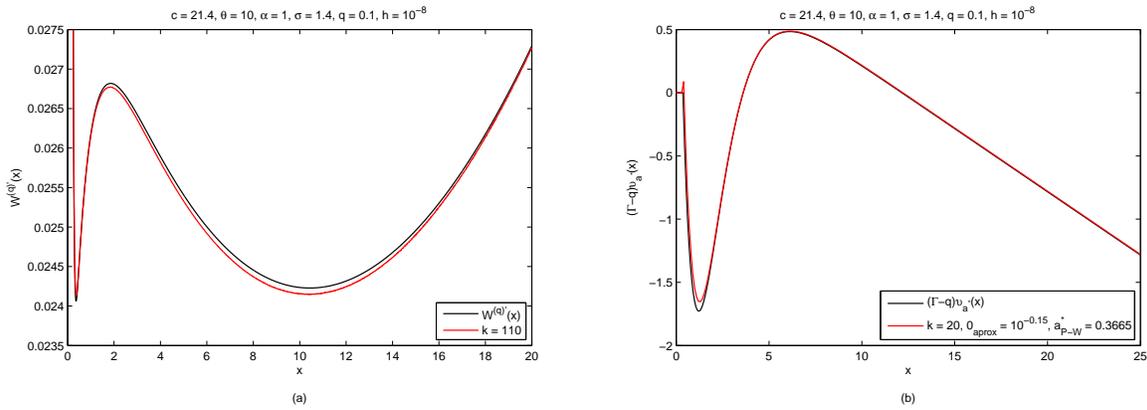


Figura 17. (a) Función  $W^{(a)}$  y su aproximación a partir de la ecuación (4.29) y el Método Inversión Post-Widder. (b) Función  $(\Gamma - q)v_{a^*}$  con  $a^* \approx 0.366323$  y su aproximación.

están por encima de la función valor  $v_{a^*}$ , sugiriendonos que esta estrategia de barrera no es una decisión óptima para los pagos que debe realizar la compañía de seguros a sus inversionistas.

Empleando el Método Inversión Post-Widder para este caso y la ecuación (4.29), encontramos que una estrategia de barrera es  $a_{P-W}^* \approx 0.36669$ . Al igual que en el párrafo anterior, las gráficas de la Figura 17 ilustran que esta estrategia de barrera no cumple las condiciones necesarias del Lema 7 y el Teorema 9; la Figura 19 muestra que para valores de  $a = 7, 8$  las funciones de valor  $v_a$  están por encima de la función valor  $v_{a_{P-W}^*}$ .

Considerando el caso en que  $\sigma = 2$ , se obtiene que la estrategia de barrera es  $a^* \approx 10.53469$ . La cual, en las Figuras 20 y 21 ilustran que esta estrategia de barrera cumple las condiciones suficientes del Teorema 9 y Lema 7 respectivamente.

Aplicando el Método Inversión Post-Widder y la ecuación (4.29) se obtiene que la estrategia de barrera es  $a_{P-W}^* \approx 10.532019$ . La Figura 20 y la Figura 21 sugieren que esta estrategia de barrera es una estrategia de barrera óptima.

Observe que a partir del Método de Post-Widder hemos obtenido una buena aproximación de la estrategia de barrera  $a^*$ , con la cual se pudo analizar gráficamente las condiciones suficientes del Lema 7 y el Teorema 9 y así sugerir que esta estrategia de barrera

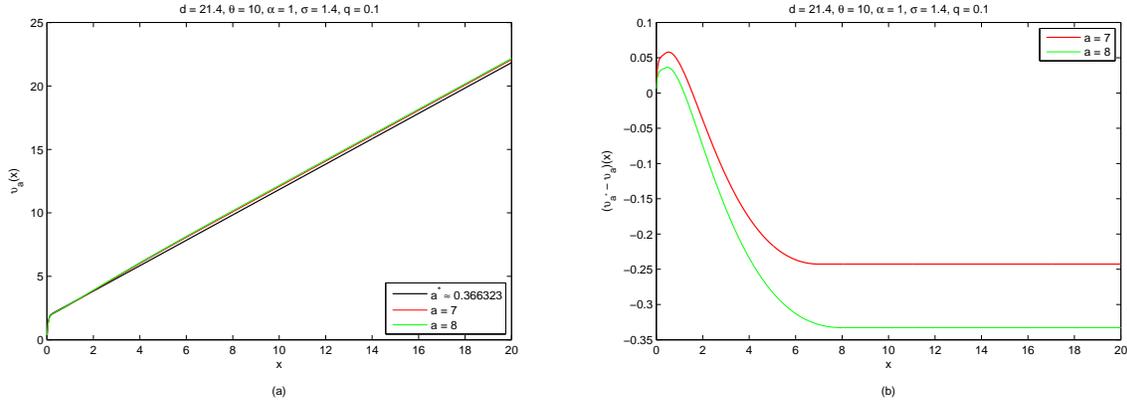


Figura 18. (a) Función valor  $v_a$ . (b) Diferencia de las funciones valor  $v_{a^*}$  y  $v_a$  cuando  $a^* \approx 0.366323$ .

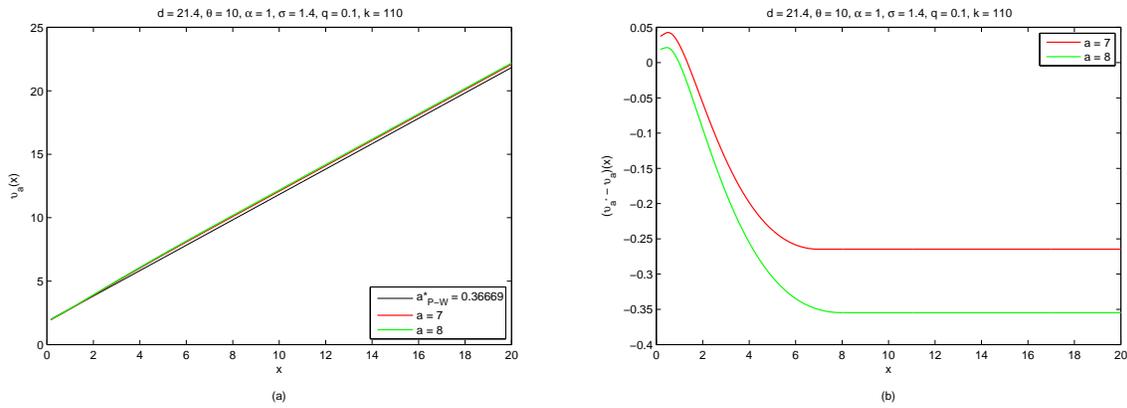


Figura 19. (a) Función valor  $v_a$ . (b) Diferencia de las funciones valor  $v_{a^*_{P-W}}$  y  $v_a$  cuando  $a^*_{P-W} \approx 0.36669$ .

es una estrategia óptima de barrera. En caso en que no cumpliera las hipótesis del Lema 7 y el Teorema 9, mediante gráficas se observó que hay estrategias de barrera donde sus funciones de valor están por encima de la función de valor de la estrategia de barrera  $a^*_{P-W}$ . También podemos ver que a pesar de que no obtuvimos unas buenas aproximaciones de la función  $q$ -escala  $W^{(q)}$  en el Ejemplo 1, Figura 5.c, no afectó en la aproximación de la estrategia de barrera  $a^*_{P-W}$ , esto se debe a que los puntos críticos de la derivada de las funciones  $q$ -escala están en una región donde las distancias entre la función  $q$ -escala y sus aproximaciones están en el orden de  $10^{-3}$ .

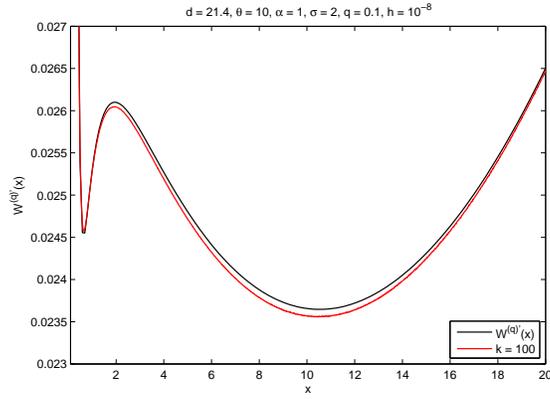


Figura 20. Función  $W^{(q)}$  y su aproximación a partir de la ecuación (4.29) y el Método Inversión Post-Widder.

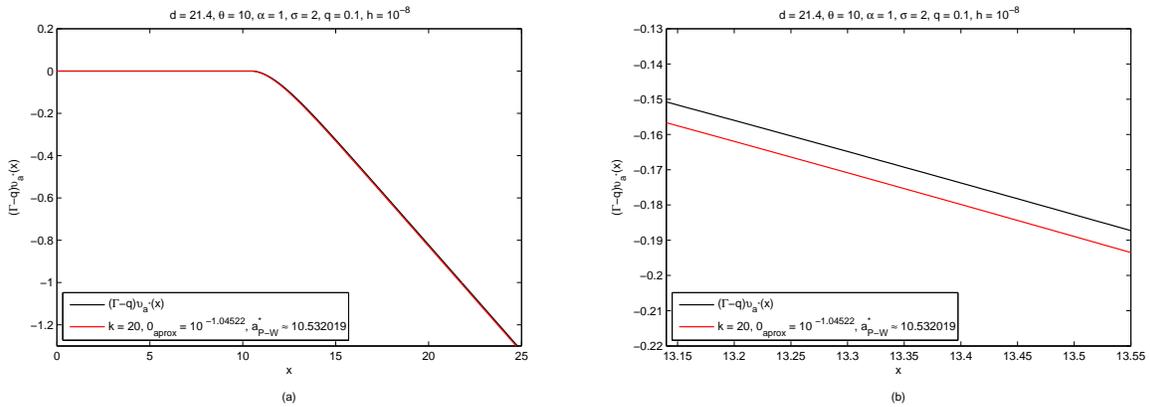


Figura 21. Función  $(\Gamma - q)v_{a^*}$  con  $a^* \approx 10.53469$  y su aproximación.

## 5 Conclusiones

- Las estrategias de barrera son muy útiles porque con ellas se pueden hacer cálculos sencillos a la hora de ver cual es la mejor manera de pagar a los poseedores de las acciones de una compañía de seguros.

Una de las ventajas de tener una estrategia de barrera, es que su función de valor está dada explícitamente por las funciones  $q$ -escala, las cuales podemos encontrar por medio de métodos numéricos.

Definir la estrategia de barrera  $a^*$  a través de las funciones  $q$ -escala es muy útil, ya que a partir de las derivadas de estas funciones se puede ver si la estrategia de barrera  $a^*$  es una estrategia óptima de dividendos.

- Luego de haber aplicado los métodos numéricos, Integral de Inversión de Bromwich e Inversión Post-Widder, para obtener aproximaciones de las funciones de escala  $W$ , se observó mediante gráficas que el Método de Post-Widder resulta ser mejor que el Método Integral de Inversión de Bromwich, porque a partir de un número menor de iteraciones se pudo obtener mejores aproximaciones a estas funciones. Por ende se aplicó el Método Inversión Post-Widder para obtener aproximaciones de las funciones 0-escala  $W_{\Phi(q)}$  y posteriormente obtener aproximaciones de las funciones  $W^{(q)}$ , las cuales también fueron unas buenas aproximaciones.
- Cabe mencionar que a partir de la tripleta  $(\gamma, \sigma, \nu)$  que determina a un proceso de Lévy espectralmente negativo y el Método Post-Widder se puede obtener aproximaciones de las funciones  $q$ -escala  $W^{(q)}$ , a partir de la ecuación matricial (4.20) y la ecuación (4.21). Note que de esta última ecuación se puede ver que el exponente de Laplace y sus derivadas están determinadas por la tripleta anterior y que son la forma general para cualquier exponente de Laplace y sus derivadas. Quiere decir que no es necesario tener explícitamente este exponente de Laplace para utilizar el Método de Post-Widder, sino que por métodos numéricos se puede obtener aproximaciones de la ecuación (4.21) y así resolver la ecuación matricial (4.20) para obtener aproximaciones de las funciones  $q$ -escala  $W^{(q)}$ .
- La combinación entre el Método de Post-Widder, el Lema 7 y el Teorema 9, son una fuerte herramienta para determinar si la estrategia de barrera  $a^*$  definida en la ecuación (3.22) es una estrategia de barrera óptima. En caso de que no cumpla las condiciones suficientes del Lema 7 y el Teorema 9, una manera de ver si la estrategia de barrera  $a^*$  no es una estrategia óptima de dividendos, es graficando las funciones de valor de diferentes estrategias de barrera y ver si hay alguna que esté por encima de la función de valor de la estrategia de barrera  $a^*$ .

# A Apéndice

En este apéndice se demuestran las propiedades de  $\psi$ , que fueron mencionadas anteriormente.

1. Sea  $\lambda \geq 0$ . Entonces

$$\frac{\psi(\lambda + h) - \psi(\lambda)}{h} = -\gamma + \lambda\sigma^2 + \frac{h}{2} + \frac{1}{h} \int_{(-\infty, 0)} (e^{(\lambda+h)x} - e^{\lambda x} - hx\mathbb{1}_{\{x > -1\}}) \nu(dx).$$

Tomando  $h \rightarrow 0$  tenemos de la anterior igualdad que

$$\psi'(\lambda) = -\gamma + \lambda\sigma^2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{(-\infty, 0)} (e^{(\lambda+h)x} - e^{\lambda x} - hx\mathbb{1}_{\{x > -1\}}) \nu(dx). \quad (\text{A.1})$$

Para lograr calcular el límite que está a la derecha de la ecuación (A.1) se debe encontrar una función medible  $f$  que sea integrable con respecto a la medida de saltos  $\nu$  y que acote a la función  $\frac{|e^{(\lambda+h)x} - e^{\lambda x} - hx\mathbb{1}_{\{x > -1\}}|}{h}$  para todo  $h \in (0, 1)$ . Antes de ver quien es la función  $f$  observe la siguiente identidad

$$e^x = 1 + x + |x|^2\theta_x, \text{ para todo } x < 0, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\theta_x = \int_0^1 (1-z)e^{xz} dz$ , para todo  $x < 0$ . Además

$$|\theta_x| \leq \int_0^1 |1-z|e^{zx} dz \leq \int_0^1 |1-z| dz = \frac{1}{2}, \quad (\text{A.3})$$

para todo  $x < 0$ .

Sea  $x \in (-1, 0)$ . Entonces, teniendo en cuenta las ecuaciones (A.2) y (A.3), se puede ver que

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{(\lambda+h)x} - e^{\lambda x} - hx}{h} \right| &= \left| \lambda^2|x|^2 \frac{(\theta_{(\lambda+h)x} - \theta_{\lambda x})}{h} + 2\lambda|x|^2\theta_{(\lambda+h)x} + h|x|^2\theta_{(\lambda+h)x} \right| \\ &\leq \lambda^2|x|^2 \frac{|\theta_{(\lambda+h)x} - \theta_{\lambda x}|}{h} + 2\lambda|x|^2|\theta_{(\lambda+h)x}| + h|x|^2|\theta_{(\lambda+h)x}| \\ &\leq \lambda^2|x|^2 \frac{|\theta_{(\lambda+h)x} - \theta_{\lambda x}|}{h} + \lambda|x|^2 + \frac{1}{2}h|x|^2, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

para todo  $h \in (0, 1)$ .

Por otra parte

$$\frac{|\theta_{(\lambda+h)x} - \theta_{\lambda x}|}{h} \leq \int_0^1 |1-z|e^{x\lambda z} \frac{|e^{xhz} - 1|}{h} dz \leq |x| \int_0^1 |z||1-z| dz = |x| \frac{1}{6}, \quad (\text{A.5})$$

para todo  $h \in (0, 1)$ .

Entonces, teniendo en cuenta las desigualdades (A.4) y (A.5), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{|e^{(\lambda+h)x} - e^{\lambda x} - hx|}{h} &\leq \lambda^2|x|^3\frac{1}{6} + \lambda|x|^2 + \frac{1}{2}h|x|^2 \\ &\leq |x|^2\left(\frac{1}{6}\lambda^2 + \frac{1}{2}h + \lambda\right) \\ &\leq |x|^2\left(\frac{1}{6}\lambda^2 + \frac{1}{2}h' + \lambda\right), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

para todo  $h \in (0, h')$ , donde  $h'$  es una constante suficientemente pequeña.

Sea  $x \in (-\infty, -1]$ , entonces

$$\frac{|xe^{(\lambda+h)x} - xe^{\lambda x}|}{h} = \frac{|xe^{\lambda x}(e^{hx} - 1)|}{h} \leq |x|^2e^{\lambda x}, \quad (\text{A.7})$$

para  $h$ 's suficientemente pequeños. Además, para un  $|x_1|$  suficientemente grande, existe  $c_1 > 0$  tal que  $|x|^2e^{\lambda x} \leq c_1$ , para todo  $|x| \geq |x_1|$ . Como  $|x|^2e^{\lambda x}$  es continua en el compacto  $[x_1, -1]$  existe  $c_2 > 0$  tal que  $|x|^2e^{\lambda x} < c_2$ , para todo  $x \in [x_1, -1]$ . Por lo tanto, teniendo en cuenta (A.6) se tiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{|e^{(\lambda+h)x} - e^{\lambda x} - hx\mathbb{1}_{\{x>-1\}}|}{h} &\leq |x|^2\left(\lambda^2\frac{1}{6} + \lambda + \frac{1}{2}h'\right)\mathbb{1}_{(-1,0)}(x) \\ &\quad + c_1\mathbb{1}_{(-\infty,x_1)}(x) + c_2\mathbb{1}_{[x_1,-1]}(x), \end{aligned}$$

para todo  $h \in (0, h')$ , donde  $h'$  es suficientemente pequeño. Observe que esta cota es una función integrable con respecto a la medida de saltos  $\nu$ .

Por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\int_{(-\infty,0)} \frac{1}{h}(e^{(\lambda+h)x} - e^{\lambda x} - hx\mathbb{1}_{\{x>-1\}})\nu(dx) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{(-\infty,0)} x(e^{\lambda x} - \mathbb{1}_{\{x>-1\}})\nu(dx).$$

Por lo tanto

$$\psi'(\lambda) = -\gamma + \sigma^2\lambda + \int_{(-\infty,0)} x(e^{x\lambda} - \mathbb{1}_{\{x>-1\}})\nu(dx). \quad (\text{A.8})$$

Para ver la segunda derivada de  $\psi$ , sólo nos centraremos en la derivada de

$$\int_{(-\infty,0)} x(e^{\lambda x} - \mathbb{1}_{\{x>-1\}})\nu(dx), \quad (\text{A.9})$$

ya que

$$\frac{d}{d\lambda}(-\gamma + \sigma^2\lambda) = \sigma^2.$$

Sea  $x \in (-\infty, 1]$ . Entonces por la desigualdad (A.7) y por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{(-\infty,-1]} xe^{\lambda x}(e^{hx} - 1)\nu(dx) &= \int_{(-\infty,-1]} xe^{\lambda x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hx} - 1}{h} \nu(dx) \\ &= \int_{(-\infty,-1]} x^2 e^{\lambda x} \nu(dx) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Sea  $x \in (-1, 0)$ . Entonces, usando las ecuaciones (A.3) y (A.5), se llega a que

$$\begin{aligned} \frac{|x(e^{(\lambda+h)x} - 1) - x(e^{\lambda x} - 1)|}{h} &= |x| \frac{|e^{(\lambda+h)x} - e^{\lambda x}|}{h} \\ &\leq |x|^2 \left( 1 + \frac{1}{6}\lambda^2 + \frac{1}{2}h + \lambda \right). \end{aligned}$$

para todo  $h \in (0, h')$ , donde  $h'$  es una constante suficientemente pequeña.

Observemos que

$$\int_{(-1,0]} x^2 \left( 1 + \frac{1}{6}\lambda^2 + \frac{1}{2}h + \lambda \right) < \infty.$$

Por lo tanto, por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{(-1,0)} \frac{x(e^{(\lambda+h)x} - e^{\lambda x})}{h} \nu(dx) &= \int_{(-1,0)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(e^{(\lambda+h)x} - e^{\lambda x})}{h} \nu(dx) \\ &= \int_{(-1,0)} x^2 e^{\lambda x} \nu(dx). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Usando (A.10) y (A.11) tenemos que la derivada de (A.9) va a ser

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{(-\infty,0)} x(e^{\lambda x} - \mathbb{1}_{\{x > -1\}}) \nu(dx) = \int_{(-\infty,0)} x^2 e^{\lambda x} \nu(dx)$$

De lo anterior tenemos que

$$\psi''(\lambda) = \sigma^2 + \int_{(-\infty,0)} x^2 e^{\lambda x} \nu(dx). \quad (\text{A.12})$$

Por último veremos la  $n$ -ésima derivada, con  $n > 2$ , de

$$\int_{(-\infty,0)} x^{n-1} e^{\lambda x} \nu(dx), \text{ para todo } \lambda \geq 0.$$

Sea  $\lambda \geq 0$ . Si  $x \leq -1$ , con un argumento similar a los casos anteriores, podemos ver que  $\frac{|x^{n-1} e^{\lambda x} (e^{hx} - 1)|}{h}$  está acotada por una función medible integrable, a saber  $c_1 \mathbb{1}_{(-\infty, x_1)} + c_2 \mathbb{1}_{[x_1, -1]}$ , donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes positivas que dependen de  $|x_1|$ , con  $|x_1|$  un número suficientemente grande. Entonces, por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{(-\infty, -1]} \frac{1}{h} x^{n-1} e^{\lambda x} (e^{hx} - 1) \nu(dx) &= \int_{(-\infty, -1]} x^{n-1} e^{\lambda x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{hx} - 1)}{h} \nu(dx) \\ &= \int_{(-\infty, -1]} x^n e^{\lambda x} \nu(dx). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Si  $x \in (-1, 0)$ , entonces  $|x|^{n-1} < x^2$ , para todo  $n > 2$ . Luego, para  $h$  suficientemente pequeño

$$\frac{1}{h} |x^{n-1} (e^{(\lambda+h)x} - e^{\lambda x})| \leq |x|^{n-1} e^{\lambda x} \frac{|e^{hx} - 1|}{h} \leq |x|^2,$$

para todo  $n > 2$ . Quiere decir que la función anterior está acotada por una función integrable en  $(-1, 0)$ . De nuevo, por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{(-1,0)} \frac{1}{h} x^{n-1} e^{\lambda x} (e^{hx} - 1) \nu(dx) &= \int_{(-1,0)} x^{n-1} e^{\lambda x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{hx} - 1)}{h} \nu(dx) \\ &= \int_{(-1,0)} x^n e^{\lambda x} \nu(dx). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

De (A.13) y (A.14) concluimos que

$$\psi^{(n)}(\lambda) = \int_{(-\infty,0)} x^n e^{\lambda x} \nu(x), \quad (\text{A.15})$$

para todo  $n > 2$  y  $\lambda \geq 0$ .

2. Como

$$\psi''(\lambda) = \sigma^2 + \int_{(-\infty,0)} x^2 e^{\lambda x} \nu(dx) > 0,$$

se tiene que  $\psi$  es una función estrictamente convexa.

3. Para ver que  $\psi(0) = 0$ , note que si  $x \leq -1$  entonces

$$|e^{\lambda x} - 1| \leq 1, \text{ para todo } \lambda \geq 0.$$

Como  $\int_{(-\infty,-1]} \nu(dx) < \infty$ , se tiene que está acotada por una función medible integrable en  $(-\infty, -1]$ . Entonces, por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{(-\infty,-1]} (e^{\lambda x} - 1) \nu(dx) = \int_{(-\infty,-1]} \lim_{\lambda \rightarrow 0} (e^{\lambda x} - 1) \nu(dx) = 0. \quad (\text{A.16})$$

Si  $x \in (-1, 0)$ , entonces

$$|e^{\lambda x} - 1 - \lambda x| \leq \sum_{k \geq 2} \frac{\lambda^k}{k!} |x|^k \leq e^{\lambda x^2}.$$

Puesto que  $\int_{(-1,0)} x^2 \nu(dx) < \infty$  se tiene que  $|e^{\lambda x} - 1 - \lambda x|$  está acotado por una función medible e integrable. Entonces, por Teorema de Convergencia Dominada, se tiene que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{(-1,0)} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x) \nu(dx) = \int_{(-1,0)} \lim_{\lambda \rightarrow 0} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x) \nu(dx) = 0. \quad (\text{A.17})$$

Teniendo en cuenta (A.16) y (A.17) concluimos que

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( -\gamma \lambda + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda + \int_{(-\infty,0)} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{\{x > -1\}}) \nu(dx) \right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{(-\infty,0)} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{\{x > -1\}}) \nu(dx) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Usando la ecuación A.2 se tiene que

$$|e^{\lambda x} - 1 - \lambda x| \leq \frac{|x|^2}{2}, \text{ para todo } x \leq -1 \text{ y para todo } \lambda \geq 0.$$

Además

$$|e^{\lambda x} - 1| < 1, \text{ para todo } x \leq -1 \text{ y para todo } \lambda \geq 0.$$

Entonces por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\begin{aligned} \psi(\infty) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( -\gamma\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{(-\infty, 0)} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{\{x > -1\}}) \nu(dx) \right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( -\gamma\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 \right) + \int_{(-\infty, -1)} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{\{x > -1\}}) \nu(dx) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\psi(\infty) = \infty$ .

## Bibliografía

- [ACW00] J. Abate, G. L. Choudhury, and W. Whitt, *An introduction to numerical transform inversion and its application to probability models*, In W. K. Grassman, editor, Computational Probability (2000), 258–322.
- [AHT00] Søren Asmussen, Bjarne Højgaard, and Michael Taksar, *Optimal risk control and dividend distribution policies. Example of excess-of loss reinsurance for an insurance corporation*, Finance Stoch. **4** (2000), no. 3, 299–324. MR 1779581 (2001i:91072)
- [AM05] Pablo Azcue and Nora Muler, *Optimal reinsurance and dividend distribution policies in the Cramér-Lundberg model*, Math. Finance **15** (2005), no. 2, 261–308. MR 2132192 (2006b:91080)
- [APP07] Florin Avram, Zbigniew Palmowski, and Martijn R. Pistorius, *On the optimal dividend problem for a spectrally negative Lévy process*, Ann. Appl. Probab. **17** (2007), no. 1, 156–180. MR 2292583 (2008e:93121)
- [AT97] Søren Asmussen and Michael Taksar, *Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out*, Insurance Math. Econom. **20** (1997), no. 1, 1–15. MR 1466852 (98c:62195)
- [Ber96] Jean Bertoin, *Lévy processes*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 121, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. MR 1406564 (98e:60117)
- [Büh96] Hans Bühlmann, *Mathematical methods in risk theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 172, Springer-Verlag, Berlin, 1996, Reprint of the 1970 original. MR 1438782 (97k:62213)
- [CKP09] L. Chaumont, A. E. Kyprianou, and J. C. Pardo, *Some explicit identities associated with positive self-similar Markov processes*, Stochastic Process. Appl. **119** (2009), no. 3, 980–1000. MR 2499867 (2010f:60114)
- [CKS09] T. Chan, A. Kyprianou, and M. Savov, *Smoothness of scale functions for spectrally negative Lévy processes*, ArXiv e-prints (2009).
- [Fel71] William Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.*, Second edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 1971. MR 0270403 (42 #5292)
- [Fin57] B. De Finetti, *Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio*, In Trans. XVth Internat. Congress Actuaries **2** (1957), 433–443.
- [Fur98] Hansjörg Furrer, *Risk processes perturbed by  $\alpha$ -stable Lévy motion*, Scand. Actuar. J. (1998), no. 1, 59–74. MR 1626676 (99e:60198)
- [Ger69] H. U. Gerber, *Entscheidungskriterien für den zusammengesetzten Poisson-Prozess*, Mitt. Ver. Schweiz. Versich. Math. **69** (1969), 185–227.

- [HPŠV04] Miljenko Huzak, Mihael Perman, Hrvoje Šikić, and Zoran Vondraček, *Ruin probabilities and decompositions for general perturbed risk processes*, Ann. Appl. Probab. **14** (2004), no. 3, 1378–1397. MR 2071427 (2005f:60152)
- [KP07] A. E. Kyprianou and Z. Palmowski, *Distributional study of de Finetti's dividend problem for a general Lévy insurance risk process*, J. Appl. Probab. **44** (2007), no. 2, 428–443. MR 2340209 (2009i:60153)
- [KR08] A. E. Kyprianou and V. Rivero, *Special, conjugate and complete scale functions for spectrally negative Lévy processes*, Electron. J. Probab. **13** (2008), no. 57, 1672–1701. MR 2448127 (2010a:60169)
- [Kyp06] A. Kyprianou, *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006. MR 2250061 (2008a:60003)
- [Loe08] R. L. Loeffen, *On optimality of the barrier strategy in de Finetti's dividend problem for spectrally negative Lévy processes*, Ann. Appl. Probab. **18** (2008), no. 5, 1669–1680. MR 2462544 (2009m:60198)
- [Pro05] Philip E. Protter, *Stochastic integration and differential equations*, Stochastic Modelling and Applied Probability, vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 2005, Second edition. Version 2.1, Corrected third printing. MR 2273672 (2008e:60001)
- [RZ07] Jean-François Renaud and Xiaowen Zhou, *Distribution of the present value of dividend payments in a Lévy risk model*, J. Appl. Probab. **44** (2007), no. 2, 420–427. MR 2340208 (2009c:60117)
- [Sch06] Hanspeter Schmidli, *Optimisation in non-life insurance*, Stoch. Models **22** (2006), no. 4, 689–722. MR 2263862 (2007k:60282)
- [Tak00] Michael I. Taksar, *Optimal risk and dividend distribution control models for an insurance company*, Math. Methods Oper. Res. **51** (2000), no. 1, 1–42. MR 1742395 (2000m:91077)
- [VT10] Mark Veillette and Murad Taqqu, *Numerical computation of first-passage times of increasing lvy processes*, Methodology and Computing in Applied Probability **12** (2010), 695–729, 10.1007/s11009-009-9158-y.
- [Zho05] Xiaowen Zhou, *On a classical risk model with a constant dividend barrier*, N. Am. Actuar. J. **9** (2005), no. 4, 95–108. MR 2211907
- [Zho06] ———, *“On optimal dividend strategies in the compound Poisson model” by Hans U. Gerber and Elias S. W. Shiu, April 2006*, N. Am. Actuar. J. **10** (2006), no. 3, 79–84. MR 2328656
- [ZPS95] M. Zhanblan-Pike and A. N. Shiryaev, *Optimization of the flow of dividends*, Uspekhi Mat. Nauk **50** (1995), no. 2(302), 25–46. MR 1339263 (96i:90013)