



Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Análisis de Máximos para Datos Espaciales de Lluvias

Tesina

Que para obtener el Grado de:

**Maestro en Ciencias con Orientación en Probabilidad y
Estadística**

P R E S E N T A:

Ehyter Matías Martín González

Director:

Dr. Joaquín Ortega Sánchez

Guanajuato, Guanajuato, México

5 Agosto de 2011

Integrantes del Jurado.

Presidente: Dr. Enrique Raúl Villa Diharce

Secretario: Dr. Rogelio Ramos Quiroga

Vocal y director de tesis: Dr. Joaquín Ortega Sánchez

Asesor:

Dr. Joaquín Ortega Sánchez.

Sustentante:

LM. Ehyter Matías Martín González.

Dedicatoria

A mis padres, Ehyter Matías Martín Sánchez y Elena Guadalupe González de Martín.

Agradecimientos

- A mi familia y amigos por todo su apoyo durante los dos años de maestría.
- A mis profesores de CIMAT por su contribución a mi formación académica.
- A CIMAT y a CONACYT por el apoyo económico brindado durante estos dos años.
- Al proyecto 07-02-K662-044 A02 de Concyteg y a la CEAG por el apoyo brindado.

De manera especial y sin orden preferencial, quisiera agradecer a las siguientes personas:

- A mis padres, Ehyter Matías Martín Sánchez y Elena Guadalupe González de Martín, y a mi hermano, Joaquín Alejandro Martín González, por toda su paciencia y apoyo incondicional.
- A mi tutor y director de tesis, Dr. Joaquín Ortega Sánchez, por su acertada dirección y apoyo durante el desarrollo de esta tesina, así como durante mi estancia en el programa de maestría.
- A mis sinodales, Dr. Rogelio Ramos Quiroga y Dr. Enrique Raúl Villa Diharce, por su contribución al desarrollo de esta tesina.
- A la Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska, por todo el apoyo y ayuda brindados durante el año y medio en el que tuve el honor de ser su estudiante.
- A mis amigos, Nohemí Aceves, Leonardo Araujo, Carlos Barragán, Daniela Cisneros, Miguel Ángel Cruces, Carolina Euan, Lilian Godoy, Xenia Godoy, Elena Hernández, Boryana López, Libnny Maldonado, Luis Eduardo Martínez, Abelardo Montesinos, Diego Rivera, Raymundo Rojas, Dialid Santiago, Sara Silva, Rodrigo Villanueva y Antonio Ville-da, por toda su paciencia, consejos y apoyo.

Índice general

1. Introducción	1
2. Generalidades	3
2.1. Distribuciones de Valores Extremos	3
2.1.1. Extremos Univariados	3
2.1.2. Extremos Multivariados	7
3. Procesos Max-estables	12
3.1. Max-estabilidad	12
3.1.1. Modelos de Smith y Schlather	14
3.2. Dependencia a pares de campos aleatorios	18
3.2.1. Función del coeficiente extremal para los modelos de Smith y Schlather	20
3.2.2. Variograma y Madograma	21
4. Resultados	23
4.1. Modelación del fenómeno de interés y procedimiento de análisis	23
4.1.1. Modelación del fenómeno de interés	23
4.1.2. Procedimiento	24
4.2. Análisis Exploratorio	26
4.3. Modelos ajustados	27

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	6
4.3.1. Modelo de Smith	28
4.3.2. Modelo de Schlather	34
4.3.3. Selección del mejor modelo	48
4.4. Conclusiones	49
A. Gráficos exploratorios por mes	51
B. Parámetros de las DVE marginales	54
C. Ejes de las elipses del modelo de Smith	65
Bibliografía	66

Resumen

En el siguiente trabajo se presenta un análisis realizado utilizando datos espaciales de lluvias del Estado de Guanajuato. El objetivo es modelar el comportamiento de las lluvias en todo el estado, de modo que se pueda realizar inferencias sobre eventos extremos, cuya ocurrencia significa un riesgo considerable para el estado.

Las herramientas teóricas requeridas para el desarrollo de esta tesina se centran en la teoría de valores extremos y procesos máx-estables, las cuales a su vez se basan en conceptos de teoría de probabilidad (distribuciones de probabilidad), análisis matemático, teoría de campos aleatorios, modelación estocástica (procesos puntuales de poisson), inferencia estadística (estimación de parámetros) y modelación estadística. La metodología empleada para la obtención de los resultados consistió incluye el ajuste de procesos máx-estables, según los modelos propuestos por Smith (1990) y Schlather (2002), así como la paquetería SpatialExtremes de R, y diversos programas desarrollados específicamente para la obtención y depuración de los datos de interés.

El análisis aquí realizado está basado en el trabajo que Freddy López Quintero realizó para su tesis de maestría en 2010. En dicho trabajo, López Quintero ajusta un solo modelo a los datos, utilizando máximos anuales de la precipitación mensual acumulada, mientras que para efectos de la presente tesina se ha ajustado un modelo distinto para cada mes del año con la intención de considerar la variabilidad de las lluvias según la época del año que se considere.

Capítulo 1

Introducción

El análisis estadístico de datos de lluvia es de suma importancia cuando se desea desarrollar medidas preventivas en casos de eventos que implican algún tipo de riesgo, por ejemplo, el nivel del agua resultante de lluvias intensas en regiones cerca del mar podría ser causa de inundaciones. El Estado de Guanajuato cuenta con uno de los casos de lluvia más particulares del país, debido a las irregularidades con que éstas ocurren. En los casos en que las lluvias llegan a ser demasiado constantes y/o intensas, es muy fácil que se presenten inundaciones en algunas zonas del estado, por lo que es de especial interés estudiar el comportamiento de los máximos de las precipitaciones pluviales ocurridas en este estado.

En López-Quintero (2010) se realizó el estudio antes mencionado considerando máximos mensuales y modelos que toman en cuenta las características espaciales de los datos (ubicación geográfica del sitio donde se hicieron las mediciones de las precipitaciones pluviales). Esto último debido a que existen razones para suponer una variabilidad significativa entre las regiones donde se observaron las lluvias. Sin embargo, una de las características particulares de las lluvias en Guanajuato, que no fue tomada en cuenta en el trabajo antes mencionado, es la posible variabilidad de las lluvias según el mes del año en cuestión, ya que se ha observado que existen periodos muy secos y periodos con abundancia de lluvias a lo largo del año.

En este trabajo se repite el análisis realizado por López-Quintero considerando nuevamente las características espaciales de los datos y, además, tomando en cuenta la posible variabilidad de

las lluvias durante cada mes del año, por lo que se han ajustado en total 12 modelos espaciales distintos (uno para cada mes del año). Para llevar a cabo este ajuste, se ha recurrido a los llamados *procesos max-estables* y a los modelos propuestos por Smith y Schlather en sus publicaciones de 1990 y 2002, respectivamente.

El trabajo está organizado como sigue: en el capítulo 1 se presenta una breve introducción sobre la importancia del estudio de los valores extremos de precipitaciones pluviales. En el capítulo 2 se presentan las herramientas básicas de la teoría de valores extremos univariados (máximo de variables aleatorias, distribución del máximo, distribuciones de valores extremos), al mismo tiempo que se plantean algunos de los principales intereses de dicha teoría. Se presenta el teorema de Fisher-Tippet, una de las herramientas fundamentales de la teoría de valores extremos, y se presentan también los conceptos del análisis de valores extremos multivariados que servirán para las definiciones posteriores (máximos multivariados, distribuciones de extremos multivariadas, representaciones vía procesos puntuales de Poisson, etc).

En el capítulo 3 se presentan la definición de los procesos max-estables y los modelos propuestos por Smith y Schlather para datos espaciales, y se enuncian algunas propiedades de estos. Se definen también el índice extremal, coeficiente extremal, variograma y madograma, y se enuncian algunas propiedades y relaciones importantes entre estos conceptos.

Finalmente, en el capítulo 4 se presenta el análisis realizado a los datos de lluvias del Estado de Guanajuato (procedimiento, ajuste de modelos espaciales, etc), así como las conclusiones obtenidas después de haber realizado dicho análisis.

Capítulo 2

Generalidades

2.1. Distribuciones de Valores Extremos

2.1.1. Extremos Univariados

Considérese una sucesión de variables aleatorias iid con distribución común F y sea

$$M_n = \max_{i \leq n} X_n$$

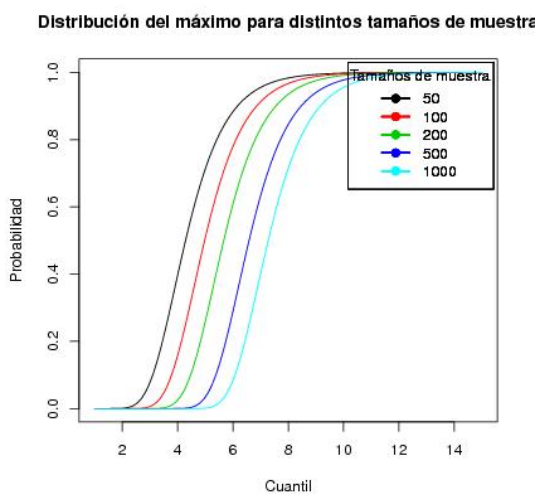
Se sabe, de la teoría básica de probabilidad, que

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x) = F^n(x)$$

Por tanto, a medida que n crece, la distribución límite del máximo de las variables aleatorias consideradas, tiende a la distribución degenerada $1_{\{F(x)=1\}}$, la cual no es de utilidad para realizar estudios estadísticos. Esto conduce a uno de los intereses principales de la teoría de valores extremos: encontrar constantes de normalización $a_n \in \mathbb{R}, b_n > 0$ tales que

$$F^n(a_n + b_n x) \xrightarrow{d} H(x), \quad n \rightarrow \infty \tag{2.1}$$

donde H es una distribución no degenerada y \xrightarrow{d} indica convergencia en distribución (o convergencia débil). Cuando es posible encontrar tales constantes, se dice que la distribución $F(x)$ pertenece al dominio de atracción de la distribución límite $H(x)$. Obsérvense las siguientes gráfica correspondientes a la distribución del máximo de n observaciones independientes e idénticamente distribuídas según una ley exponencial de parámetro 1, para distintos valores de n .



Notar que la inclinación de la gráfica de la distribución del máximo puede cambiar dependiendo del valor de n , razón por la cual las constantes de cambio de escala (b_n) y traslación (a_n) se toman dependientes de n , de éste modo la inclinación de dicha gráfica se mantiene constante e igual a la inclinación de la gráfica de $H(x)$.

Con base en lo anterior surge otro de los problemas de mayor interés de la teoría de valores extremos: determinar las posibles distribuciones $H(x)$ que cumplan con (2.1). Una respuesta a esta interrogante se presenta en el siguiente resultado, conocido como el teorema de Fisher-Tippet (1928).

Teorema 1 *Las únicas distribuciones límite no degeneradas que satisfacen (2.1) son:*

- *Distribución Gumbel (tipo I):*

$$H(x; \lambda, \delta) = \exp \left\{ -\exp \left[\frac{\lambda - x}{\delta} \right] \right\}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

- *Distribución Fréchet (tipo II):*

$$H(x; \lambda, \delta, \kappa) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[\frac{x - \lambda}{\delta} \right]^{-1/\kappa} \right\} & x \geq \lambda \\ 0 & x < \lambda, \kappa > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

- *Distribución Weibull (tipo III):*

$$H(x; \lambda, \delta, \kappa) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[\frac{\lambda - x}{\delta} \right]^{1/|\kappa|} \right\} & x \leq \lambda \\ 0 & x > \lambda, \kappa < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Prueba. Ver de Haan, Ferreira (2006), teorema 1.1.3 ■

Las tres distribuciones presentadas en el teorema anterior se conocen como las *distribuciones de valores extremos*. Dichas distribuciones pueden obtenerse como un caso particular de la familia de distribuciones dada por

$$H(x; \lambda, \delta, \kappa) = \exp \left\{ - \left[1 + \kappa \left(\frac{x - \lambda}{\delta} \right) \right]^{-1/\kappa} \right\}; \quad 1 + \kappa \left(\frac{x - \lambda}{\delta} \right) \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0, \quad \kappa \neq 0 \quad (2.5)$$

A esta familia se le conoce como *la familia de distribuciones de Jenkinson-Von Misses (para máximos)* o *distribución generalizada de valores extremos (para máximos)*, y al parámetro κ se le conoce como *índice de valores extremos*. Notar que el teorema de Fisher-Tippet no garantiza la existencia de las constantes de normalización a_n, b_n , puesto que, en general, dichas constantes podrían no existir.

En el análisis realizado en este trabajo se ha utilizado de modo especial la distribución *Fréchet unitaria*, la cual está dada por

$$H(x, 0, 1, 1) = H(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) 1_{\{x \geq 0\}} \quad (2.6)$$

La utilidad de esta distribución en particular, se observa en el trabajo con valores extremos multivariados. Más adelante se definirá la forma de trabajar con este tipo de datos, y se presentará la utilidad de la distribución Fréchet unitaria a través de un teorema y un corolario que servirán de base para definir los conceptos de *Procesos Max-Estables*, que son pieza fundamental de esta tesina. A continuación se presenta un teorema que muestra la relación existente entre las distribuciones de valores extremos. La importancia de este resultado radica en que, a través de la relación aquí presentada, es posible realizar transformaciones para obtener distribuciones marginales Fréchet unitarias (caso de extremos multivariados) de modo que utilizando esta distribución, las inferencias obtenidas sean equivalentes a aquellas que se tendrían si se trabajara con la distribución de extremos original.

Teorema 2 *Sea X una variable aleatoria no negativa, entonces las siguientes relaciones son equivalentes*

- $X \sim \text{Fréchet}(\lambda, \delta, \kappa)$
- $\log X^\alpha \sim \text{Gumbel}(\lambda, \delta), \alpha = \frac{1}{\kappa}$
- $-X^{-1} \sim \text{Weibull}(\lambda, \delta, \kappa)$

La prueba de este teorema requiere únicamente álgebra elemental y el teorema de cambio de variable, y no será incluida.

2.1.2. Extremos Multivariados

Supóngase ahora que se tiene un conjunto de n vectores de dimensión d , $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n$, con $\underline{X}_n = (X_{n1}, \dots, X_{nd})$, entonces el *vector de valores máximos* se define como el vector M_n tal que sus entradas son los máximos de las entradas de los vectores $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n$, es decir:

$$\underline{M}_n = (\max_{1 \leq i \leq n} X_{i1}, \dots, \max_{1 \leq i \leq n} X_{id})$$

y si hacemos $M_{nk} = \max_{1 \leq i \leq n} X_{ik}$, tenemos

$$\underline{M}_n = (M_{n1}, \dots, M_{nd}).$$

De manera análoga, si se tienen vectores de constantes $\underline{a}_n = (a_{n1}, \dots, a_{nd})$, $\underline{b}_n = (b_{n1}, \dots, b_{nd})$ con $b_{ni} > 0 \forall i$, $a_{ni} \in \mathbb{R} \forall i$, se define el vector $\frac{\underline{M}_n - \underline{a}_n}{\underline{b}_n}$ como

$$\frac{\underline{M}_n - \underline{a}_n}{\underline{b}_n} = \left(\frac{M_{n1} - a_{n1}}{b_{n1}}, \dots, \frac{M_{nd} - a_{nd}}{b_{nd}} \right)$$

Con base en lo anterior, se presenta la definición de una *Distribución de Valores Extremos Multivariada*.

Definición 1 Sean $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n$ vectores aleatorios iid con distribución multivariada común $F(\underline{x})$. Sea \underline{M}_n el vector de máximos de los \underline{X}_n y $\underline{a}_n = (a_{n1}, \dots, a_{nd})$, $\underline{b}_n = (b_{n1}, \dots, b_{nd})$ con $b_{ni} > 0 \forall i$, $a_{ni} \in \mathbb{R} \forall i$, entonces si $H(\underline{x})$ es una distribución multivariada tal que

$$P^n \left(\frac{\underline{M}_n - \underline{a}_n}{\underline{b}_n} \leq \underline{x} \right) \xrightarrow{d} H(\underline{x}) \quad (2.7)$$

y además, H es no degenerada en el sentido de que todas sus marginales univariadas son no degeneradas, entonces H es una **distribución de valores extremos multivariada**.

Análogamente al caso univariado, si dos funciones de distribución multivariadas F, H satisfacen (2.7), para ciertos vectores $\underline{a}_n, \underline{b}_n$ se dice que F está en el dominio de atracción de H .

Por otro lado, en el caso multivariado existe el concepto de *Función de Dependencia* de n variables aleatorias. Dicha función es de especial interés en la teoría de valores extremos multivariados, debido a que puede utilizarse para derivar la distribución límite de una cierta distribución multivariada. Dicha función se define a continuación.

Definición 2 Sea $F(\underline{x})$ la función de distribución de un vector aleatorio \underline{X} d -variado con distribuciones marginales univariadas $F_i(x_i)$, $i = 1 \dots d$. Definimos la **función de dependencia** asociada a $F(\underline{x})$, denotada por $D_F(y_1, \dots, y_d)$, como

$$D_F(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) = F(x_1, \dots, x_d) = F(\underline{x})$$

la cual, en el caso en que las marginales univariadas $F_i(x_i)$ son estrictamente crecientes, se convierte en

$$D_F(y_1, \dots, y_d) = F(F_1^{-1}(y_1), \dots, F_d^{-1}(y_d)) = F(\underline{x}).$$

Utilizando la definición anterior y el siguiente teorema, se obtiene la relación entre la función de dependencia y la distribución límite, mencionada previamente.

Teorema 3 Dominio de atracción de una función de distribución multivariada

Sean $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n$ vectores aleatorios d -dimensionales con distribución común F , entonces, existen vectores de constantes $\underline{a}_n, \underline{b}_n$ (\underline{b}_n tiene entradas positivas) tales que

$$\frac{\underline{M}_n - \underline{a}_n}{\underline{b}_n} \xrightarrow{d} H(\underline{x})$$

con H no degenerada, sí y sólo sí cada marginal pertenece al dominio de atracción de alguna $H_k(x)$ y si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D_{F^n} \left(y_1^{1/n}, \dots, y_d^{1/n} \right) = D_H(y_1, \dots, y_d)$$

Prueba. Ver Galambos (1987) ■

En Castillo et al. (2005), sección 11.3.2, se presentan varios ejemplos de aplicación de este teorema en la determinación de la distribución límite de distribuciones de valores extremos bivariadas.

Teorema 4 *Una función de distribución d -dimensional H , es una distribución límite maximal (distribución límite de valores máximos) sí y sólo sí*

- *Sus marginales univariadas pertenecen al dominio de atracción de $H_k(x)$*
- *Su función de dependencian $D_H(y_1, \dots, y_d)$ satisface la ecuación funcional*

$$D_H^m(y_1^{1/m}, \dots, y_d^{1/m}) = D_H(y_1, \dots, y_d)$$

para todo $m \geq 1$

Prueba. Ver *Galambos (1987)* ■

El teorema anterior presenta otra aplicación importante de la función de dependencia, la cual será de gran utilidad en la definición del enfoque vía *procesos puntuales de Poisson* para caracterizar las familias de distribuciones límites de extremos multivariados. Esta caracterización se basa en una representación vía procesos Poisson de extremos multivariados y se debe a Coles y Tawn (1991, 1994), de Haan y Resnick (1977), de Haan (1985), Joe, Smith y Weissman (1992), Resnick (1987) y Tawn (1988). Dicha caracterización es útil para derivar el proceso Poisson no homogéneo asociado con los puntos de extremos multivariados y obtener la estructura general de distribuciones límite para extremos multivariados, entre otras cosas.

Teorema 5 Representación vía procesos Poisson

Sea $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots$ una sucesión de vectores aleatorios iid d -dimensionales, con entradas no negativas y distribución común F , donde F pertenece al dominio de atracción de una distribución multivariada de extremos G . Supongamos que las distribuciones marginales de F son idénticamente Fréchet unitarias y consideremos el proceso puntual $P_n = \{\frac{X_i}{n} : i = 1, 2, \dots, n\}$, entonces P_n converge en distribución a un proceso Poisson no homogéneo P en $\mathbb{R}_+^d - \{0\}$ cuando $n \rightarrow \infty$, con medida de intensidad

$$\lambda(dr \times d\underline{w}) = m \frac{dr}{r^2} dS(\underline{w}) \quad (2.8)$$

donde r_i y w_{ij} son las coordenadas pseudo-polar y angular, respectivamente, es decir

$$r_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^d X_{ij}, \quad w_{ij} = \frac{X_{ij}}{nr_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, d \quad (2.9)$$

donde X_{ij} es la j -ésima componente de \underline{X}_i y S es una medida de probabilidad en el simplex unitario

$$S_d = \left\{ (w_1, \dots, w_d) : \sum_{j=1}^d w_j = 1, w_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, d. \right\} \quad (2.10)$$

que satisface la condición

$$\int_{S_d} w_j dS(\underline{w}) = 1/d, j = 1, 2, \dots, d \quad (2.11)$$

Prueba. Ver *Castillo et al. (2005)*. ■

Nota 1 En el teorema anterior, se puede utilizar la medida de intensidad

$$\lambda^*(dr \times d\underline{w}) = m \frac{dr}{r^2} dS^*(\underline{w}) \quad (2.12)$$

donde $\underline{w} = (w_1, \dots, w_{d-1})$ y

$$S_d^* = \left\{ (w_1, \dots, w_{d-1}) : \sum_{j=1}^{d-1} w_j \leq 1, w_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, d-1 \right\} \quad (2.13)$$

y S^* satisface la condición

$$\int_{S_d} w_j dS^*(\underline{w}) = 1/d, j = 1, 2, \dots, d-1. \quad (2.14)$$

Prueba. Ver *Castillo et al. (2005)*. ■

El teorema anterior tiene una gran importancia práctica debido a que afirma que para cualquier sucesión de vectores aleatorios $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots$ existe una medida positiva y finita $S(\underline{w})$ que satisface (2.11) y es tal que el proceso Poisson no homogéneo asociado tiene intensidad (2.8). Por tanto, dada $S(\underline{w})$ es posible calcular las probabilidades de ocurrencia del proceso Poisson en cualquier región dada A . Una de estas aplicaciones consiste en el siguiente corolario, el cual caracteriza todas las posibles distribuciones límite multivariadas.

Corolario 1 *Cualquier distribución límite de vectores de máximo normalizados, con marginales Fréchet unitarias, tiene la forma*

$$H(\underline{x}) = \exp[-\nu(\underline{x})] \quad (2.15)$$

donde

$$\nu(\underline{x}) = d \int_{S_d} \max_{1 \leq j \leq d} \left(\frac{w_j}{x_j} \right) dS(\underline{w}) \quad (2.16)$$

Tomando en cuenta lo expuesto en los dos resultados anteriores se puede apreciar la importancia de contar con datos cuyas distribuciones marginales sean Fréchet unitarias. En la práctica esto no ocurre, por lo que resulta necesario realizar una transformación a los datos de modo que estos tengan las marginales deseadas. Es posible hacer dicha transformación sin perder generalidad debido a la relación entre las tres distribuciones de valores extremos mencionada con anterioridad.

Ahora nótese que si X es una variable aleatoria con distribución $GEV(\lambda, \delta, \kappa)$, la variable aleatoria $Y = -(\log F(X))^{-1}$ tiene una distribución Fréchet unitaria, es decir, si $X \sim GEV(\lambda, \delta, \kappa)$ entonces la variable aleatoria Y dada por

$$Y = \begin{cases} [1 - \kappa \left(\frac{X-\lambda}{\delta} \right)]^{-1/\kappa} & \kappa \neq 0 \\ \exp \left(\frac{X-\lambda}{\delta} \right) & \kappa = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

sigue una distribución Fréchet unitaria.

Capítulo 3

Procesos Max-estables

3.1. Max-estabilidad

En esta sección se definirá uno de los conceptos fundamentales involucrados en la elaboración del presente trabajo: los *Procesos Max-Estables*. Primero se definirá el concepto de max-estabilidad para el caso de variables aleatorias, se extenderá dicho concepto al caso en que se consideran *procesos estocásticos* y, con base en esto, se definirán y estudiarán los modelos propuestos por Smith y Schlather para el estudio de valores extremos con características espaciales. Específicamente, se presentará la construcción de tales modelos con base en los resultados mostrados en la sección anterior.

Definición 3 *Una distribución G se dice que es max-estable si, para cada $n = 2, 3, \dots$ existen constantes $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$ tales que*

$$G^n \left(\frac{z - a_n}{b_n} \right) = G(z).$$

Previamente se ha visto que, dada una sucesión X_1, X_2, \dots de variables aleatorias iid con distribución común G , si se toma M_n como el máximo de n de estas variables, este tiene distribución G^n , por lo tanto la propiedad de max-estabilidad enunciada anteriormente nos dice que es posible hacer un cambio de localización y escala a M_n , de modo que su distribución bajo este cambio de localización y escala, coincida con la distribución de las variables aleatorias originales.

Lo anterior tiene una relación importante con la distribución de valores extremos generalizada, como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 6 *Una distribución es max-estable sí y sólo sí es una distribución de valores extremos generalizada.*

La prueba de este teorema requiere teoría de probabilidad y álgebra básicas, y no será incluida.

Hasta ahora, los resultados presentados corresponden al caso en que se trabaja con variables aleatorias, pero es posible extender estos resultados a las distribuciones multivariadas de modo totalmente natural. Más aún, la propiedad de max-estabilidad puede definirse también para procesos, dando lugar a los llamados *procesos max-estables*, que como ya se ha mencionado antes, constituyen la base del presente trabajo. Dicha definición se presenta a continuación.

Definición 4 *Proceso Max-Estable.* *Sea $\{X(t), t \in T\}$ un proceso indexado en un conjunto arbitrario T y sean $X_1(t), X_2(t), \dots$ réplicas independientes del proceso $X(t)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define*

$$M_n(t) = \max_{i=1, \dots, n} \{X_i(t)\}$$

Supóngase además que existen constantes $a_n(t) \in \mathbb{R}$, $b_n(t) > 0$ y sea $Z_n(t) = \frac{M_n(t) - a_n(t)}{b_n(t)}$, $t \in T$, entonces, decimos que el proceso $X(t)$ es max-estable si para cada $n \in \mathbb{N}$, $X(t)$ es igual en distribución a $Z_n(t)$.

En la literatura de procesos estocásticos es común considerar el conjunto de índices $T \subset \mathbb{R}$, de modo que los índices representan *el tiempo* en el que el proceso evoluciona, pero en general este conjunto de índices podría ser cualquier espacio topológico. En este caso, el proceso resultante recibe el nombre de *campo aleatorio*. En Adler (1981), página 13, se presentan dos posibles definiciones formales de campo aleatorio.

Para este estudio, el interés radica en el campo aleatorio resultante de tomar como conjunto de índices el espacio euclideo de dimensión 2, es decir, $T = \mathbb{R}^2$.

3.1.1. Modelos de Smith y Schlather

En los artículos de Smith (1990) y Schlather (2002) se presentan formas de construir procesos max-estables con distribuciones bivariadas cuyas expresiones son conocidas. Los modelos de probabilidad resultantes de tales construcciones, constituyen la pieza fundamental de este trabajo, puesto que corresponden a las herramientas utilizadas para la modelación de los campos aleatorios considerados en el análisis extremal de los datos espaciales de lluvia presentados más adelante. La primera manera de construir un proceso max-estable se presenta en Smith (1990), y es la siguiente.

Teorema 7 Sean $\{(u_1, s_1), (u_2, s_2), \dots\}$ puntos de un proceso puntual de Poisson en un espacio $(0, \infty) \times S$ con medida de intensidad $\lambda(du, ds) = \frac{du}{u^2} \times \nu(ds)$, para alguna medida de intensidad ν en S , donde S es un conjunto medible arbitrario.

Sea f una función en $S \times T$ tal que $\int_S f(s, t) \nu(ds) = 1$, $\forall t \in T$, entonces, el proceso $\{Z(t), t \in T\}$ definido por

$$Z(t) = \max_{i=1,2,\dots} [u_i f(s_i, t)]$$

es un proceso max-estable, y más aún, todo proceso max-estable en T se puede representar de esta manera eligiendo apropiadamente S, ν y f .

Prueba. Ver *Smith (1990), sección 2.* ■

El modelo de probabilidad obtenido vía la construcción enunciada en el teorema anterior se denomina *Modelo de Smith*. Este modelo se obtiene al tomar $S = T = \mathbb{R}^d$ y $f(s, t)$ como función de s para t fijo, como una densidad normal d -variada con vector de medias t y una cierta matriz de varianzas y covarianzas Σ , es decir

$$f(s, t) = f_0(s - t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (s - t)' \Sigma (s - t) \right\}$$

donde $(s - t)'$ denota el vector transpuesto de $s - t$.

De esta manera, para dos elementos del proceso max-estable en cuestión, la distribución conjunta vía el modelo de Smith queda determinada por la ecuación

$$\mathbb{P}[Z(s) \leq z_1, Z(t) \leq z_2] = \exp \left\{ -\frac{1}{z_1} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_2}{z_1} \right) - \frac{1}{z_2} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_1}{z_2} \right) \right\} \quad (3.1)$$

donde

$$a^2 = (s - t)' \Sigma^{-1} (s - t) \text{ y } \Phi \text{ es la función de distribución normal estándar.}$$

La ecuación (3.1) representa una familia de distribuciones bivariadas de valores extremos con función de dependencia

$$A(\omega) = (1 - \omega) \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{1 - \omega}{\omega} \right) + \omega \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{\omega}{1 - \omega} \right) \quad (3.2)$$

y parámetro de dependencia a , el cual representa una distancia generalizada entre los puntos s y t . En los casos límites cuando $a \rightarrow 0$ y $a \rightarrow \infty$ se tiene, respectivamente, $A(\omega) = \max\{\omega, 1 - \omega\}$ y $A(\omega) = 1$.

La demostración de estos resultados puede consultarse en Smith (1990).

Debido a la función considerada, el proceso construido anteriormente también recibe el nombre de *proceso gaussiano de valores extremos*. Este proceso se utiliza frecuentemente para modelar un tipo de lluvias llamado *lluvias convectivas*, término que se refiere al caso en que las lluvias intensas están localizadas en una región particular del espacio, y conforme la distancia entre esta región y alguna otra es más grande, puede llover con menor intensidad o inclusive no llover. Además, cabe mencionar que este modelo considera que el proceso en cuestión es homogéneo en el espacio en el sentido de que no importa la ubicación de dos puntos, sino la distancia entre ellos.

Smith interpreta su modelo de la siguiente manera: S es un espacio de donde ocurren tormentas regularmente (en este estudio, dicho espacio es el plano \mathbb{R}^2), y ν es una medida que representa la distribución de las tormentas sobre S . Cada u_i representa la magnitud de una tormenta y $u_i f(s_i, t)$ representa la cantidad de lluvia en la posición t de una tormenta de tamaño u_i centrada en s_i . En este estudio, la posición t es otro punto en el plano. Finalmente, la función f representa la forma de la tormenta, la cual está dada por la campana determinada por la distribución normal

bivariada utilizada en la construcción del proceso. El valor máximo se toma para representar la noción del máximo de las precipitaciones pluviales, por lo que $Z(t)$ es un máximo sobre un conjunto de tormentas independientes de intensidad variable.

En la práctica, el ajuste del modelo de Smith se reduce a estimar la matriz de varianzas y covarianzas Σ , pues las posiciones de las tormentas o índices del proceso (que en este estudio son las estaciones) están dados de antemano.

Veamos ahora dos métodos alternativos para construir procesos max-estables. Estos métodos se presentan en los siguientes dos teoremas, cuyas demostraciones pueden encontrarse en Schlather (2002).

Teorema 8 *Sea Y una función aleatoria medible y $\mu = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \max\{0, Y(x)\} dx \right] \in (0, \infty)$. Sea Π un proceso Poisson en $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ con medida de intensidad $d\Lambda(y, s) = \mu^{-1} dy s^{-2} ds$ y $Y_{y,s}$ copias iid de Y , entonces*

$$Z(x) = \sup_{(y,s) \in \Pi} \max\{sY_{y,s}(x-y)\} = \sup_{(y,s) \in \Pi} \max\{0, Y_{y,s}(x-y)\} \quad (3.3)$$

es un proceso max-estable estacionario con distribuciones marginales Fréchet unitarias.

Prueba. Ver Schlather (2002). ■

Uno de los modelos resultantes de considerar la construcción vía (3.3), es precisamente el modelo de Smith presentado anteriormente (ver Schlather (2002)). El siguiente teorema da lugar al modelo denominado *modelo de Schlather*.

Teorema 9 *Sea Y un proceso estacionario en \mathbb{R}^d con $\mu = \mathbb{E}[\max\{0, Y(o)\}] \in (0, \infty)$ donde o denota el origen y sea Π un proceso Poisson en $(0, \infty)$ con medida de intensidad $d\Lambda(s) = \mu^{-1} s^{-2} ds$, entonces, si $Y_s, s \in (0, \infty)$ son copias iid de Y ,*

$$Z(x) = \max_{s \in \Pi} \{sY_s(x)\} = \max_{s \in \Pi} \{0, sY_s(x)\} \quad (3.4)$$

es un proceso max-estable estacionario con distribuciones marginales Fréchet unitarias.

Prueba. Ver Schlather (2002). ■

Considérese el caso particular en que Y es un campo aleatorio estándar normal con función de correlación $\rho(t)$ y Π un proceso de Poisson en $(0, \infty)$ con medida de intensidad $d\Lambda(s) = \sqrt{2\pi}s^{-2}ds$, entonces utilizando el teorema anterior, se tiene la siguiente expresión para la distribución conjunta bivariada de dos elementos del proceso $Z(x) \max_{s \in \Pi} \{sY_s(x)\}$:

$$-\log \mathbb{P}[Z(o) \leq s, Z(x) \leq t] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \sqrt{1 - 2(\rho(x) + 1) \frac{st}{(s+t)^2}} \right)$$

La demostración de este resultado se encuentra en el apéndice de Schlather (2002).

Existen varias funciones de covarianza que pueden utilizarse en la expresión (3.1.1) (ver, por ejemplo, López-Quintero (2010)). Para el estudio aquí presentado se utilizaron las siguientes tres funciones de covarianza:

$$\rho_1(h) = \begin{cases} \left(1 + \left(\frac{h}{c_2} \right)^2 \right)^{-\nu} & c_2 > 0, \nu > 0 & \text{Cauchy} \\ \left(1 + \left(\frac{h}{c_2} \right)^{\nu_2} \right)^{-\nu_1/\nu_2} & c_2 > 0, \nu_1 > 0, \nu_2 > 0 & \text{Cauchy generalizada} \\ \exp \left\{ - \left(\frac{h}{c_2} \right)^\nu \right\} & c_2 > 0, 0 < \nu \leq 2 & \text{Exponencial generalizada} \end{cases}$$

donde c_2 es un parámetro de rango y ν, ν_1, ν_2 son parámetros de suavidad.

A las funciones de covarianza anteriores se les puede agregar un parámetro de umbral σ y otro llamado *efecto nugget*, denotado por η , el cual hace referencia a una pequeña pero importante desviación del parámetro de umbral con respecto a la unidad, en el caso en que la cantidad h de las funciones de covarianza anteriores es cero. Por tal razón se tiene la relación $\sigma = 1 - \eta$. Las funciones de covarianza agregando los parámetros de umbral y efecto nugget están dadas por la ecuación

$$\rho(h) = \begin{cases} \sigma + \eta & h = 0 \\ \sigma \rho_1(h) & h > 0 \end{cases}$$

De este modo, el ajuste del modelo de Schlather en la práctica se reduce a la estimación de los parámetros de rango, suavidad y umbral correspondientes a la función de covarianza utilizada (equivalentemente se pueden estimar los parámetros de rango, suavidad y efecto nugget).

Este proceso es conocido como *proceso extremal gaussiano* y puede interpretarse de la siguiente manera según Schlather (2002): Los eventos solos sY_s , por ejemplo la lluvia diaria, tienen todos la misma estructura de dependencia y difieren solo en la magnitud s . Comúnmente, el modelo de Schlather se utiliza para el estudio de lluvias llamadas *lluvias ciclónicas*, cuya característica principal es que ocurren en *puntos aislados* dispersos en la región de estudio (tal dispersión puede variar considerablemente).

3.2. Dependencia a pares de campos aleatorios

En esta sección presentamos algunos estadísticos para medir la dependencia en el caso de los procesos max-estables. Comenzamos con una medida de dependencia que es básica en la teoría de valores extremos.

Definición 5 Sea $\{X_n\}$ una sucesión estacionaria (o estrictamente estacionaria) de variables aleatorias con distribución común F y función de supervivencia \bar{F} . Sean $M_n = \max_{1, \dots, n} X_n$ y $\theta \in (0, 1)$. Supóngase que para $\tau > 0$ existe una sucesión de números reales $\{u_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(u_n) = \tau$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[M_n \leq u_n] = e^{-\theta\tau}$, entonces θ se conoce como el **índice extremal** de la sucesión $\{X_n\}$.

Se puede probar que, si este índice existe, es independiente de la sucesión $\{u_n\}$.

Por otro lado, si se considera la sucesión $\{Y_n\}$ de variables aleatorias iid tales que $Y_n \stackrel{d}{=} X_n$ y se define $\widetilde{M}_n = \max_{i=1, \dots, n} \{Y_i\}$, entonces, de la definición del índice extremal se tiene

$$\mathbb{P}[M_n \leq u_n] \simeq \mathbb{P}[\widetilde{M}_n \leq u_n]^\theta = F^{\theta n}(u_n) \quad (3.5)$$

donde θn se puede pensar como la proporción de observaciones independientes en la muestra. Para una prueba de este hecho, consultar Embrechts et. al (1997).

En el caso de los procesos max-estables, la medida de dependencia de interés se define a continuación.

Definición 6 Supongamos que $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ sigue una distribución de valores extremos multivariada con distribución marginal común F , entonces definimos el coeficiente extremal entre los elementos de X como el valor θ que satisface la relación

$$\mathbb{P}[\max_{i=1, \dots, n} \{X_i\} \leq x] = F^\theta(x)$$

El nombre coeficiente extremal proviene de una mezcla entre el coeficiente de correlación, que mide la existencia de una relación lineal entre dos variables aleatorias, y el índice extremal que mide el efecto de dependencia en un proceso estacionario. Este coeficiente toma valores en $[1, n]$, donde 1 corresponde a dependencia total y n a independencia perfecta, de modo que este coeficiente mide la independencia espacial de los elementos del proceso considerado.

Considérese ahora un campo aleatorio $Z(x)$ con marginales Fréchet unitarias, y $Z_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ réplicas independientes del campo. En ocasiones puede ser de interés medir la relación entre dos sitios distintos asociados a este campo. En tal caso, se tiene la siguiente definición de la *función de coeficiente extremal* debida a un resultado demostrado por De Haan (1984).

Definición 7 Sea $Z(x)$ un campo aleatorio estacionario con $x \in \mathbb{R}^d$, con distribuciones marginales Fréchet unitarias y denotemos por o el origen en el espacio euclideo \mathbb{R}^d . Sean $Z_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ réplicas independientes del campo $Z(x)$. Entonces, bajo ciertas condiciones (de Haan, 1984) se tiene la relación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\max_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{\max\{Z_i(h), Z_i(o)\}}{n} \right\} \leq z \right] = e^{\frac{-\theta(h)}{z}}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^d.$$

A la función $\theta(h)$ se le denomina **función de coeficiente extremal**.

En la siguiente subsección se presenta la forma que tiene la función anterior en los casos de los modelos de Smith y Schlather.

3.2.1. Función del coeficiente extremal para los modelos de Smith y Schlather

En el caso del modelo de Smith, siguiendo lo propuesto en Kotz y Nadarajah (2000), la ecuación (3.1) se puede escribir mediante la función de dependencia (3.2) de la siguiente manera:

$$\mathbb{P}[Z(s) \leq z_1, Z(t) \leq z_2] = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) A_{(s,t)} \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} \right) \right\}. \quad (3.6)$$

Y ahora, si $z_1 = z_2 = z$, se tiene que

$$F^{2\theta}(z) = F^{2A_{(s,t)}(\frac{1}{2})}(z) \quad (3.7)$$

lo que implica que si tomamos (o, h) con $h = |t - s|$ se tiene

$$\theta(h) = 2A_{a(o,h)} \left(\frac{1}{2} \right). \quad (3.8)$$

Balakrishnan y Lai (2009), página 572, demuestran que dada una función de extremos bivariada con marginales exponenciales, siempre es posible escribirla en términos de su función de dependencia mediante la expresión (3.8). Este resultado incluye el caso en que las distribuciones marginales son Fréchet unitarias, pues si X es Fréchet unitaria, la variable $Y = X^{-1}$ sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 1$.

Lo anterior garantiza la existencia del coeficiente extremal definido anteriormente.

Siguiendo con el estudio de la función de coeficiente extremal para los modelos utilizados en este trabajo, se presenta ahora su expresión en el caso del modelo de Schlather.

$$\begin{aligned} -\log \mathbb{P}[Z(o) \leq s, Z(x) \leq t] &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \sqrt{1 - 2(\rho(x) + 1) \frac{st}{(s+t)^2}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s} \right) \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\rho(h) + 1) \left(\frac{s}{s+t} \right) \left(1 - \frac{s}{s+t} \right)} \right) \\ &= \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s} \right) a_h \left(\frac{s}{s+t} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si $t = s$ se tiene, por (3.7), que

$$\theta(h) = a_h \left(\frac{1}{2} \right) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}[1 - \rho(h)]} \quad (3.10)$$

Una vez que se cuenta con expresiones para la función de coeficiente extremal surge de modo natural el interés por estimarla con base en la muestra con la que se está trabajando. Dicha estimación es posible mediante un estadístico llamado *madograma límite*, el cual se define en la siguiente subsección.

3.2.2. Variograma y Madograma

En geoestadística (Cressie, 1993; Gaetan y Guyon, 2008), se define el siguiente estadístico de segundo orden llamado variograma.

Definición 8 Sea $\{Z(x), x \in \mathbb{R}^2\}$ un proceso espacial estacionario con covarianza bien definida. El estadístico de segundo orden dado por

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z(x+h) - Z(x)]^2$$

se conoce como *variograma*.

En el caso en que se trabaja con valores extremos, el variograma anterior puede no resultar conveniente debido a que la varianza de las distribuciones de valores extremos no siempre existe. En tal caso, se prefiere trabajar con el estadístico llamado *madograma*.

Definición 9 Sea $\{Z(x), x \in \mathbb{R}^2\}$ un proceso espacial estacionario tal que $\mathbb{E}[Z(x)]$ existe para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Se define el *madograma* como

$$\nu(h) = \frac{1}{2} \mathbb{E}[|Z(x+h) - Z(x)|] \quad (3.11)$$

En el caso en que el proceso considerado en el estudio tiene marginales Fréchet unitarias, el madograma no arroja resultados finitos, y por tanto se tienen ciertos problemas de estimación.

Para evitar esto se suele trabajar con una versión alternativa del madograma, llamada *madograma re-escalado*, el cual se define para un valor $t \in (0, \infty)$ como

$$\eta_t(h) = \frac{1}{2} \mathbb{E} [|t (I_{\{Z(x+h) \leq t\}} - I_{\{Z(x) \leq t\}}) |] \quad (3.12)$$

De este modo, el madograma re-escalado siempre existe y puede ser estimado de modo empírico mediante la cantidad

$$\hat{\eta}_t(h) = \frac{1}{2|\mathcal{N}_h|} \sum_{x,y \in \mathcal{N}_h} |t I_{\{Z(x) \leq t\}} - t I_{\{Z(y) \leq t\}}|$$

donde $\mathcal{N}_h = \{(x, y) : d(x, y) = h\}$ y d es una cierta función distancia.

Cooley et al. (2006) demostraron el siguiente resultado, el cual establece una importante relación entre el madograma re-escalado y la función de coeficiente extremal.

Proposición 1 *Para cualquier campo aleatorio espacial estacionario max-estable con marginales Fréchet unitarias y coeficiente extremal $\theta(h)$, el madograma $\eta_t(h)$ definido por (3.12) es igual a $\eta_t(h) = t \left(\exp(-\frac{1}{t}) - \exp(-\frac{\theta(h)}{t}) \right)$ y satisface la relación*

$$\eta(h) = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_t(h) = \theta(h) - 1 \quad (3.13)$$

Mediante la relación anterior, es claro que estimar el madograma límite equivale a estimar la función de coeficiente extremal, y viceversa. Por otro lado, cabe mencionar que en Cooley et al. (2006) se reporta que el madograma re-escalado converge muy lentamente. Más aún, los autores afirman que esto se debe al supuesto de que las distribuciones marginales del proceso en cuestión sean del tipo Fréchet, y para lidiar con este problema proponen otros dos tipos de madogramas que asumen que las marginales provienen de la distribución de valores extremos generalizada.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Modelación del fenómeno de interés y procedimiento de análisis

4.1.1. Modelación del fenómeno de interés

Debido a que interesa estudiar el comportamiento de las precipitaciones pluviales en el estado de Guanajuato utilizando los modelos propuestos por Schlather y Smith, dicho fenómeno se modeló de la siguiente manera:

Se consideró el campo aleatorio $\{Y(x), x \in \mathbb{R}^2\}$, donde $Y(x)$ es la precipitación pluvial en la estación con coordenadas $x = (x_1, x_2)$. La espacialidad de los datos se tomó en cuenta considerando h como la distancia de Mahalanobis entre dos estaciones y se consideraron los años como réplicas independientes e idénticamente distribuídas del proceso $Y(x)$, de modo que dichas réplicas son $Y_i(x)$ y el valor de i depende de la cantidad de años utilizada para la estimación del modelo correspondiente. Esta cantidad, así como el número de estaciones involucradas en la estimación de cada modelo, varió al final del experimento debido a la cantidad de datos faltantes y estaciones que dejaron de funcionar, lo cual hizo que fuera necesario depurar en la base de datos original.

4.1.2. Procedimiento

Originalmente, los datos considerados en este análisis consistían de registros diarios de precipitaciones pluviales, correspondientes a 160 estaciones con rangos de años desde 1941 hasta 1998. Esta base de datos tuvo que depurarse debido a la enorme cantidad de estaciones que dejaron de funcionar, así como el número de datos faltantes en los registros de varias estaciones.

Posterior a esta primera depuración a la base de datos se contó con información correspondiente a 69 estaciones, con rangos de años que no fueron iguales en las 69 estaciones. La organización de los datos se hizo en 12 matrices cuyos vectores fila son de la forma $X_{ij} = (x_{1ij}, \dots, x_{k(j)ij})$, donde X_{ij} contiene las precipitaciones pluviales máximas registradas en el mes i , año j en cada una de las $k(j)$ estaciones vigentes en el año j , $i = 1, \dots, 12$, $j = 1, \dots, n(i)$. La dependencia de k y n respecto de j, i respectivamente, se debe a que, para cada mes, el total de años $n(i)$ utilizados no fue igual una vez depurada la base de datos, y la cantidad de estaciones $k(j)$ también varió según el año en cuestión aún después de depurar la base de datos.

Una vez organizados los datos, se realizó un análisis exploratorio, mismo que se detalla en la siguiente sección y que no arrojó evidencia de que una nueva depuración de datos fuera necesario. Una vez finalizado dicho análisis se consideraron los años como repeticiones del fenómeno de interés, que como ya se ha mencionado antes, en este caso son las medidas de las precipitaciones pluviales o cantidades de lluvia. Seguido de esto se calcularon los máximos mensuales para cada año dentro de la correspondiente base de datos, de modo que se obtuvieron tantos máximos como años de información se tuvieron para cada estación. A estos valores máximos obtenidos se les ajustó marginalmente una distribución generalizada de valores extremos, por lo que en total se realizaron 828 ajustes de dicha distribución. Los parámetros estimados correspondientes a cada mes y estación se pueden consultar en el apéndice B.

Por lo mencionado en la sección 2.1.2 y dada la forma de construir los modelos de Smith y Schlather, se requirió que los datos involucrados en este análisis tuvieran marginales Fréchet unitarias, por lo que dichos datos se transformaron según (2.17) utilizando los parámetros de la DGEV estimados en el paso anterior.

Después de realizar esta última transformación se agruparon los datos transformados en nuevas bases correspondientes a cada uno de los doce meses del año. Estas nuevas bases tuvieron que ser depuradas nuevamente debido a la diferencia en los rangos de información anual correspondientes a cada estación. La información resultante de esta segunda depuración se agrupó en doce matrices rectangulares, donde las filas sirvieron para indicar el año del que proviene la información y las columnas la estación correspondiente. Las dimensiones de estas matrices están dadas en la siguiente tabla.

	Años	Estaciones		Años	Estaciones
Enero	22	33	Febrero	19	32
Marzo	20	29	Abril	20	29
Mayo	18	33	Junio	22	26
Julio	19	32	Agosto	22	26
Septiembre	20	28	Octubre	21	25
Noviembre	17	30	Diciembre	21	26

Número de años y estaciones usados en el ajuste de los modelos para cada mes.

A los datos contenidos en las matrices anteriores se les ajustaron los modelos construídos según (3.1) y (3.1.1). Los ajustes para este último modelo fueron hechos considerando las funciones de covarianza dadas en (3.1.1).

Una vez ajustados los modelos de Smith y Schlather, es decir, una vez estimadas las entradas de la matriz de varianzas y covarianzas (modelo de Smith) y los parámetros de umbral, forma y suavidad (modelo de Schlather), se simularon procesos max-estables con los parámetros ajustados con el objetivo de realizar una comparación entre el comportamiento de estos y el de las lluvias en el estado de Guanajuato.

Se obtuvieron también las gráficas de la función de coeficiente extremal mediante la relación (3.13) y los valores del *Criterio de información de Takeuchi* mejor conocido como TIC por sus siglas en inglés. Este último concepto es un estadístico análogo al *Criterio de información de Akaike* que se utiliza para seleccionar un posible mejor modelo con base en el valor mínimo que toma dicho TIC. La diferencia entre el AIC y el TIC radica en que el primer estadístico mencionado se utiliza para comparar modelos anidados, mientras que el TIC no considera tal anidamiento. La definición y estimación pueden consultarse en Ribatet (2011).

La limpieza de la base de datos, los cálculos numéricos y los ajustes de los modelos se realizaron utilizando las paqueterías para *R* llamadas *evd* y *SpatialExtremes*, así como diversos programas desarrollados específicamente para este análisis.

4.2. Análisis Exploratorio

Previo al ajuste de los modelos espaciales se realizó un análisis exploratorio de los datos, que consistió en obtener los rangos de los máximos de las cantidades de lluvia y observar gráficamente el comportamiento de tales máximos por mes. Para esto último se graficaron conjuntamente todas las estaciones correspondientes a cada mes.

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Mínimo	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Máximo	65.00	55.00	44.10	47.50	130.00	88.50
	Julio	Agosto	Sept.	Octubre	Nov.	Dic.
Mínimo	2.50	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Máximo	200.00	82.00	125.30	77.50	55.60	46.50

Rangos de los máximos mensuales.

Tales rangos también son observables en las gráficas exploratorias del apéndice A, donde además puede verse que algunos valores podrían ser candidatos a valores atípicos. Sin embargo, estos no fueron removidos del estudio debido al contexto en el que se está trabajando y a que la magnitud de tales valores no corresponde a una precipitación que en la realidad podría no ocurrir.

4.3. Modelos ajustados

En esta sección se presentan los modelos ajustados a los datos. Primeramente se muestran los valores de las varianzas y covarianzas estimadas para el modelo de Smith, así como las gráficas de un proceso max-estable simulado con los parámetros anteriormente estimados (se simuló un proceso para cada uno de los modelos correspondientes a los doce meses del año). Seguidamente se presenta el modelo de Schlather ajustado vía las tres funciones de covarianza consideradas (Cauchy, Cauchy generalizada y exponencial generalizada). Los resultados mostrados para este modelo incluyen tres parámetros (umbral, forma y suavidad) para las funciones de covarianza Cauchy y exponencial generalizada, y cuatro para la función de covarianza Cauchy generalizada (umbral, forma y dos de suavidad). Se presentan también las siguientes gráficas:

- Funciones de covarianza Cauchy, Cauchy generalizada y exponencial generalizada
- Funciones del coeficiente extremal, las cuales contienen las estimaciones de dicha función para cada pareja de estaciones considerada en el ajuste del modelo correspondiente. En estas gráficas también se incluyen las estimaciones de dicha función utilizando cada una de las funciones de covarianza anteriormente estimadas
- Procesos max-estables simulados bajo el modelo de Schlather con funciones de covarianza Cauchy y exponencial generalizada

Por último se presentan los valores del TIC para cada uno de modelos ajustados.

4.3.1. Modelo de Smith

La siguiente tabla contiene las estimaciones de las varianzas y covarianzas estimadas para el ajuste del modelo de Smith a cada mes.

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Sigma 11	0.1034	0.0695	0.0349	0.0862	0.1837	0.0513
Sigma 12	0.2709	0.2578	0.0029	0.1391	0.2352	0.0672
Sigma 22	0.7169	0.9614	0.1117	0.3497	0.3089	0.0887
	Julio	Agosto	Sept.	Octubre	Nov.	Dic.
Sigma 11	0.0033	0.0067	0.0388	0.0596	0.0309	0.1811
Sigma 12	0.0125	0.0209	0.0622	0.1199	0.0900	0.3330
Sigma 22	0.0525	0.0835	0.1016	0.2551	0.4479	0.6519

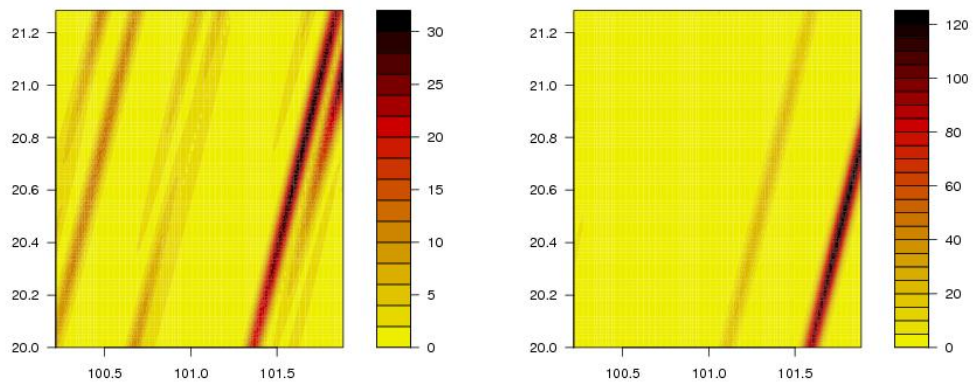
Varianzas y covarianzas estimadas para el modelo de Smith.

Los parámetros anteriores parecen indicar que la intensidad de las lluvias varía muy poco entre sitios cercanos, pues todas las varianzas y covarianzas están por debajo de 0.8 y 0.25 respectivamente. Se observa también que este modelo parece indicar que los meses con menor variabilidad en las intensidades de las precipitaciones pluviales entre sitios muy cercanos son junio, julio, agosto y septiembre, por lo que se esperaría que las gráficas obtenidas al simular bajo estos cuatro modelos sean casi homogéneas.

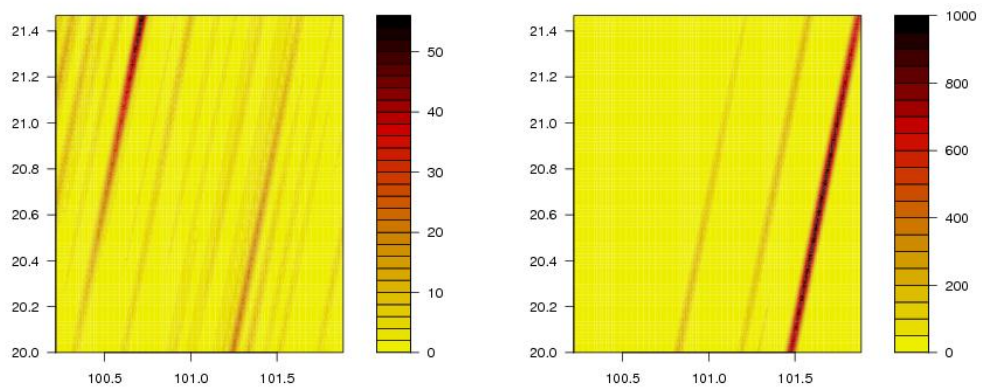
A continuación se presentan tales gráficas correspondientes a los procesos simulados bajo el modelo de Smith. Cada pareja corresponde a los casos mínimo y máximo (respectivamente) de las intensidades de las lluvias simuladas. Cabe mencionar que las bases de datos correspondientes a las ubicaciones de las estaciones según latitud y longitud con las que se realizó este estudio, contienen únicamente valores positivos para tales medidas de ubicación, por lo que la verdadera dirección de las tormentas aquí simuladas es la opuesta a la que se muestra en estas gráficas.

Procesos simulados bajo el modelo de Smith

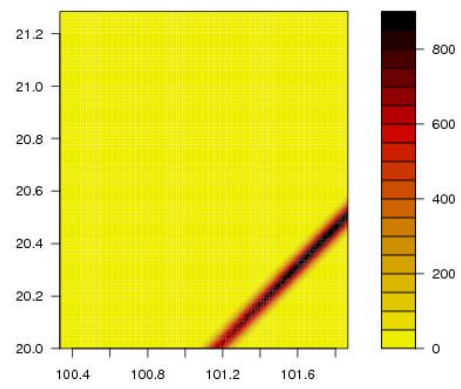
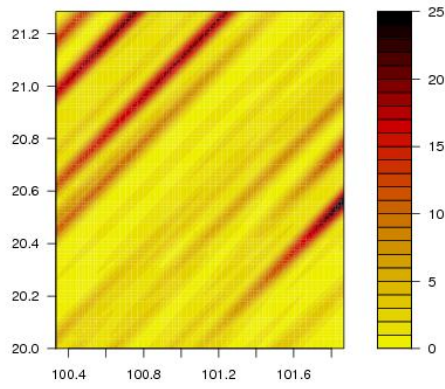
Enero



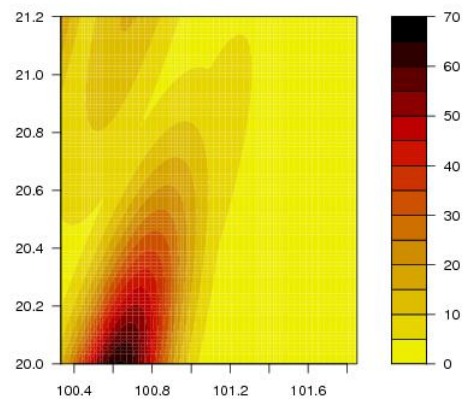
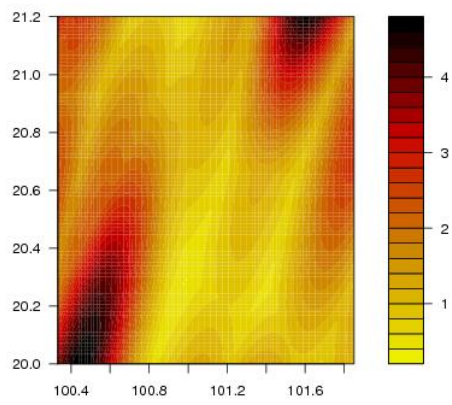
Febrero



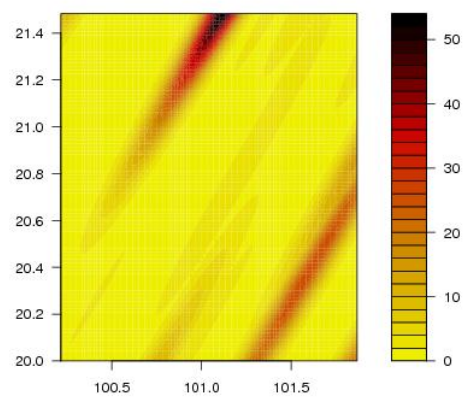
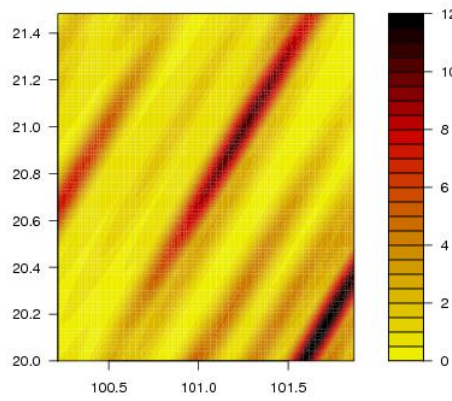
Marzo



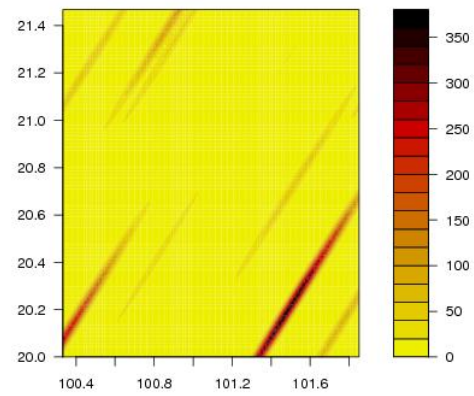
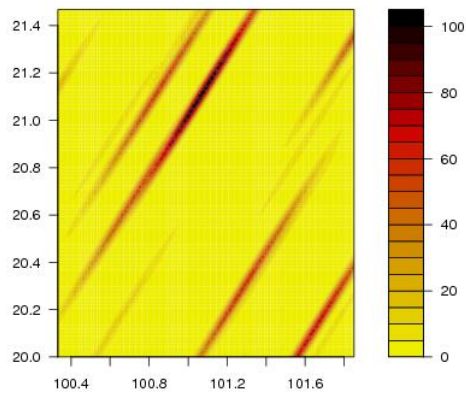
Abril



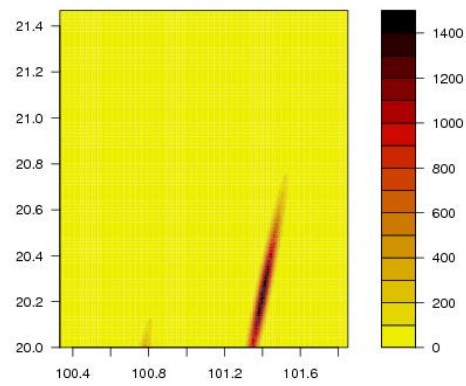
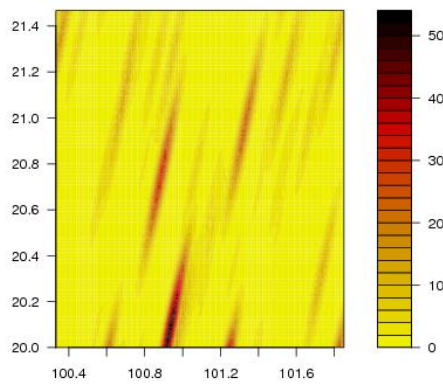
Mayo



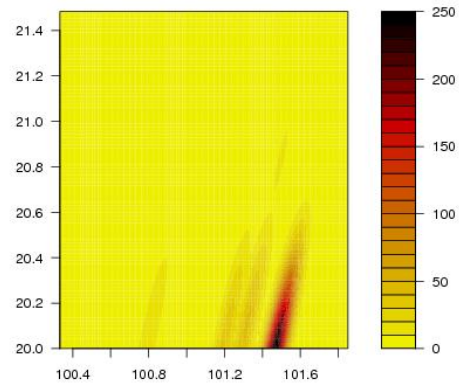
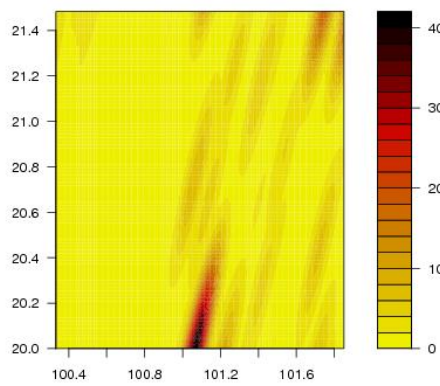
Junio



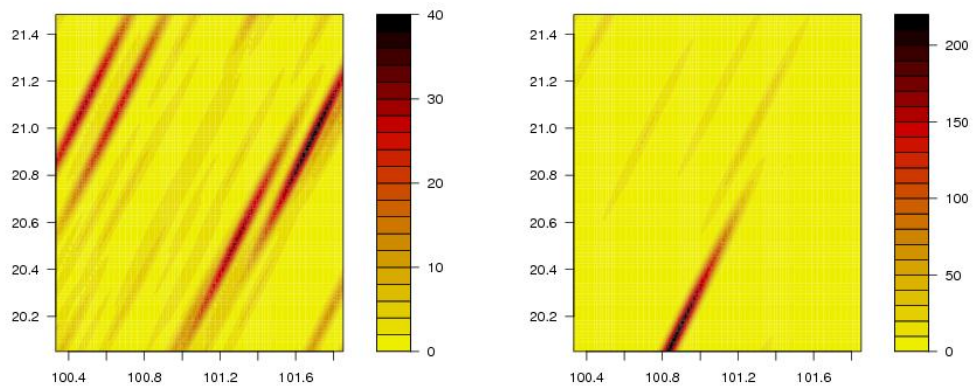
Julio



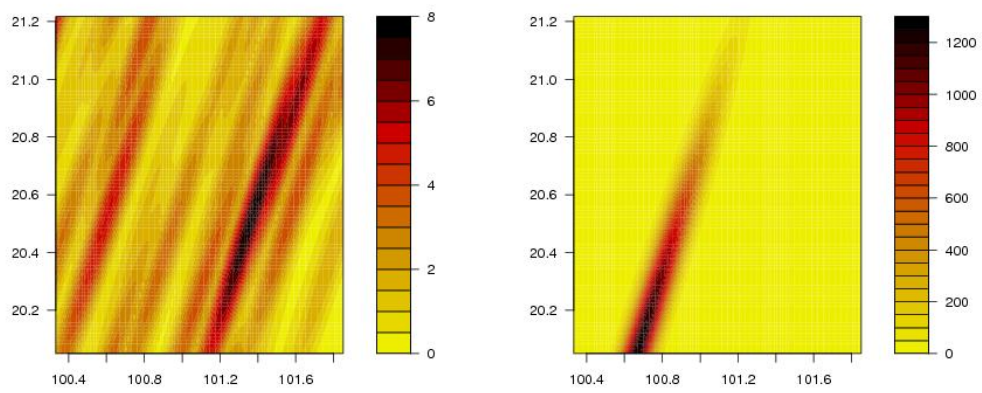
Agosto



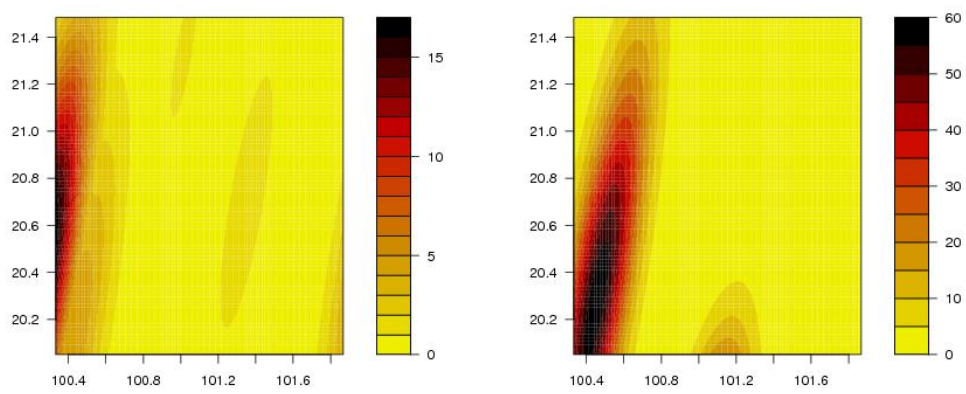
Septiembre



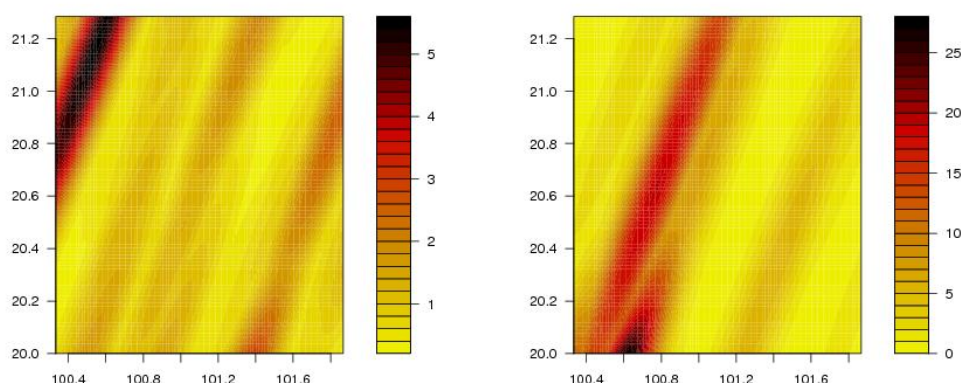
Octubre



Noviembre



Diciembre



Puede observarse que las simulaciones hechas para todos los meses excepto abril, mayo y diciembre presentan valores fuera del rango de los máximos utilizados para el ajuste de los modelos (ver sección 4.2). Más aún, en los casos de enero, julio y octubre, estos valores fuera de rango están por encima de 1000, por lo que pueden ser considerados como valores *irreales*. Tal problema podría deberse a que la muestra utilizada para las estimaciones de los modelos es pequeña.

Otro aspecto notable en las simulaciones hechas bajo este modelo es la forma y dirección de las tormentas, que en general tienen forma de elipsoides en dirección diagonal, todos muy alargados y poco anchos salvo en los meses de abril, noviembre y diciembre en cuyas gráficas se observa que el ancho del elipsoide correspondiente es considerablemente mayor que en los demás casos.

Este comportamiento es una consecuencia inmediata de los parámetros estimados para la matriz de varianzas y covarianzas Σ utilizada en la función de forma f , pues se sabe que en el caso de una distribución normal bivariada los ejes de los contornos de densidad de dicha distribución dependen directamente de los eigenvalores y eigenvectores de la matriz Σ^{-1} (inversa de la matriz de varianzas y covarianzas). Los eigenvalores de las matrices Σ^{-1} correspondientes a cada uno de los doce modelos ajustados se presentan en la siguiente tabla.

	Eigenvalor 1	Eigenvalor 2		Eigenvalor 1	Eigenvalor 2
Enero	1095.11	1.22	Febrero	3284.26	0.97
Marzo	1414.01	1.28	Abril	37.99	2.44
Mayo	350.75	2.04	Junio	3887.81	7.16
Julio	2748.76	18.02	Agosto	724.45	11.25
Septiembre	1962.85	7.15	Octubre	383.15	3.20
Noviembre	81.17	2.14	Diciembre	115.48	1.21

Eigenvalores de las matrices de varianzas y covarianzas estimadas para el modelo de Smith.

Observando los eigenvalores máximos correspondientes a los modelos de cada mes, se hace evidente la forma de los elipsoides en las gráficas de cada mes, pues los eigenvalores máximos difieren por mucho de los eigenvalores mínimos.

4.3.2. Modelo de Schlather

A continuación se presentan las estimaciones y simulaciones correspondientes al modelo de Schlather. Primeramente se tiene la tabla con los parámetros estimados bajo cada una de las funciones de covarianza consideradas para el ajuste de este modelo. Seguido de esto se presentan las gráficas de la función de coeficiente extremal para cada mes utilizando cada una de dichas funciones de covarianza, y por último se presentan las simulaciones de los procesos max-estables correspondientes a la función de covarianza Cauchy.

Parámetros estimados

La siguiente tabla presenta los parámetros estimados para el modelo de Schlather según las tres funciones de covarianza consideradas en este estudio (Cauchy, Cauchy generalizada y exponencial generalizada).

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Umbral	1.0000	0.9303	1.0000	0.9675	0.7185	0.6265
Rango	0.0078	0.0033	0.0272	0.0237	0.1114	0.3977
Suavidad	0.0572	0.0924	0.0528	0.1069	1.5616	55.2321
	Julio	Agosto	Sept.	Octubre	Nov.	Dic.
Umbral	0.4820	0.4251	0.6020	0.7113	0.5658	0.9999
Rango	0.6931	0.3839	0.3516	0.0841	0.4994	0.0009
Suavidad	99.5946	99.9937	99.5048	1.1101	0.5290	0.0475

Función de covarianza Cauchy

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Umbral	1.0000	0.9999	0.8398	0.7034	0.9508	0.6371
Rango	0.0078	0.5617	52364.2217	1669185.4177	4262.2229	0.1031
Suavidad 1	0.1146	0.2264	44322.4691	1079504.9232	6949.1566	9.5927
Suavidad 2	1.9945	0.1536	1.1148	1.0121	0.8256	2.0000
	Julio	Agosto	Sept.	Octubre	Nov.	Dic.
Umbral	0.4831	0.4339	0.6158	0.7586	0.5677	0.9621
Rango	0.8103	0.0851	0.2472	0.5302	6.6106	0.0021
Suavidad 1	271.7084	11.1112	103.0009	7.6622	15.3447	0.1037
Suavidad 2	1.9994	2.0000	1.9991	1.1535	1.3436	1.7324

Función de covarianza Cauchy generalizada

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Umbral	1.0000	0.7976	1.0000	1.0000	0.7158	0.6271
Rango	4.8502	4.6996	8.9908	1.4019	0.1263	0.0540
Suavidad	0.3370	0.1067	0.4233	0.4102	1.3686	1.9992
	Julio	Agosto	Sept.	Octubre	Nov.	Dic.
Umbral	0.4871	0.4345	0.6145	0.8725	0.6029	1.0000
Rango	0.0692	0.0378	0.0347	0.0926	1.0864	2.5232
Suavidad	1.9997	1.9973	1.9625	0.8475	1.1053	0.2940

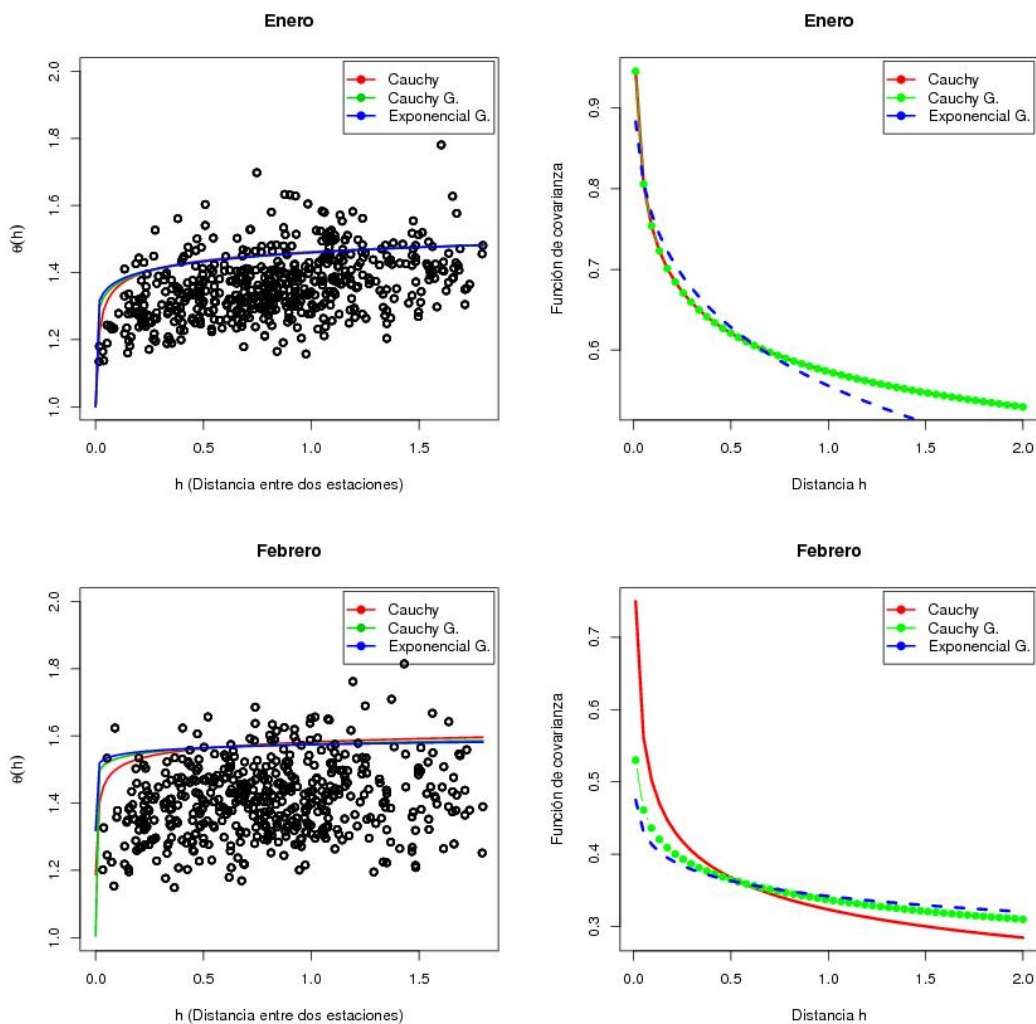
Función de covarianza exponencial generalizada

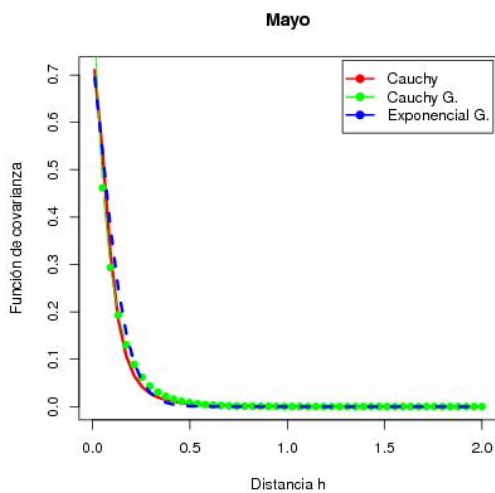
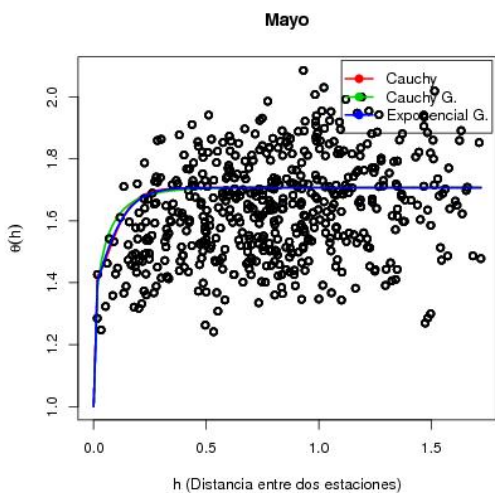
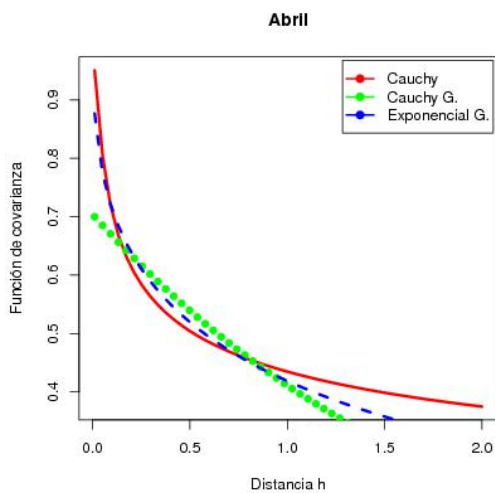
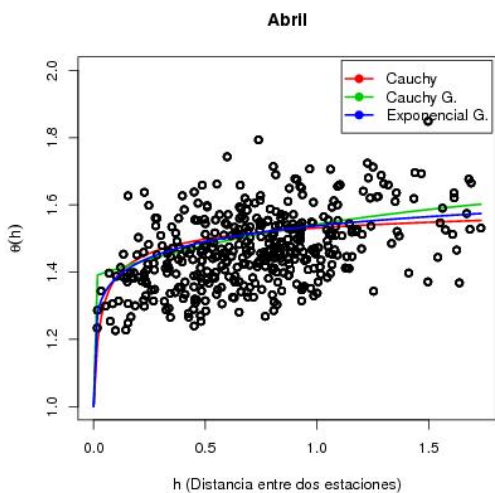
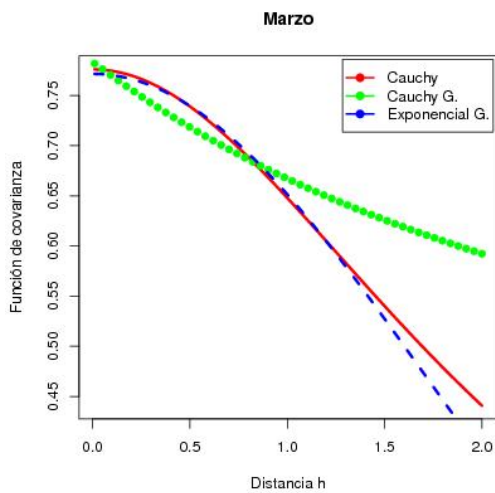
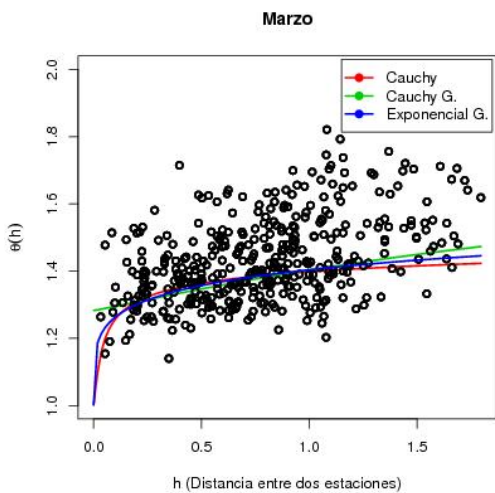
Se observan diferencias pequeñas en los parámetros de umbral correspondientes a cada función de covarianza, mientras que una diferencia mucho mayor se aprecia en los parámetros de rango correspondientes a los modelos para los meses marzo, abril y mayo. Un caso similar se observa en los parámetros de suavidad de las funciones de covarianza Cauchy y exponencial generalizada, correspondientes a los meses mayo, junio, julio y agosto.

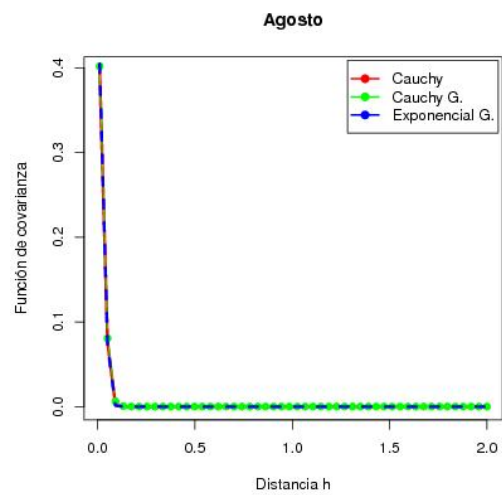
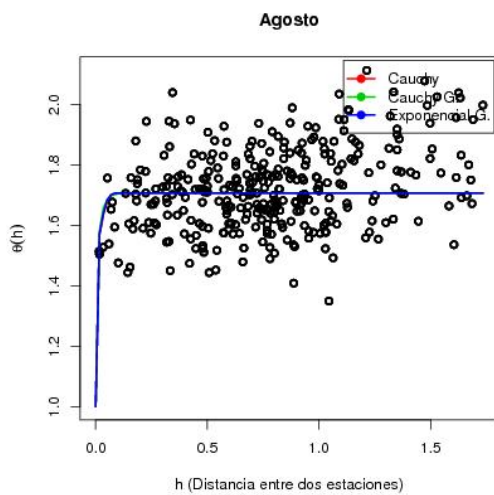
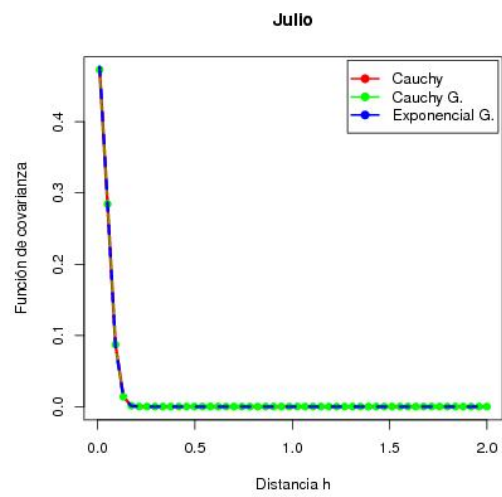
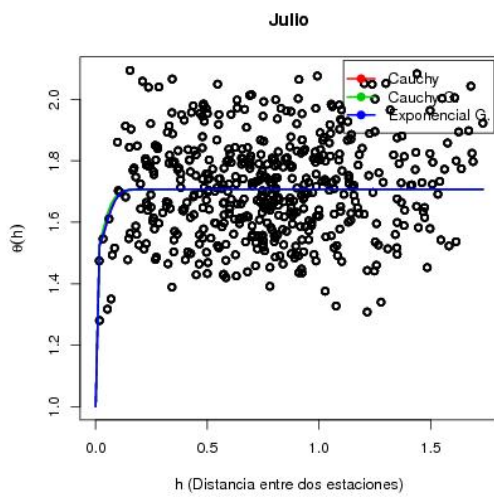
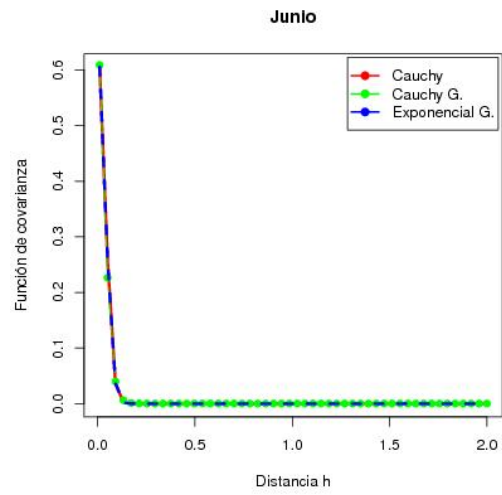
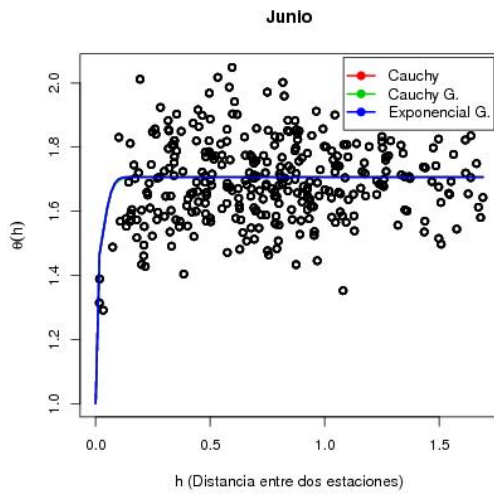
Tales diferencias podrían significar una variación considerable en los modelos según la función de covarianza que se utilice, es decir, la dependencia a pares entre las estaciones podría variar según la función de covarianza empleada. Por la relación (3.10), tal variación en la dependencia afectaría a la función de coeficiente extremal, que depende directamente de la función de covarianza utilizada.

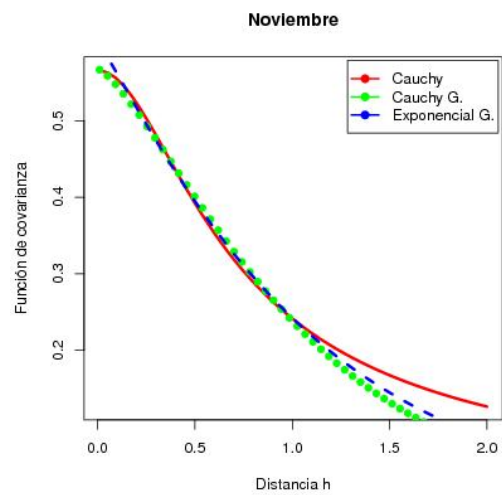
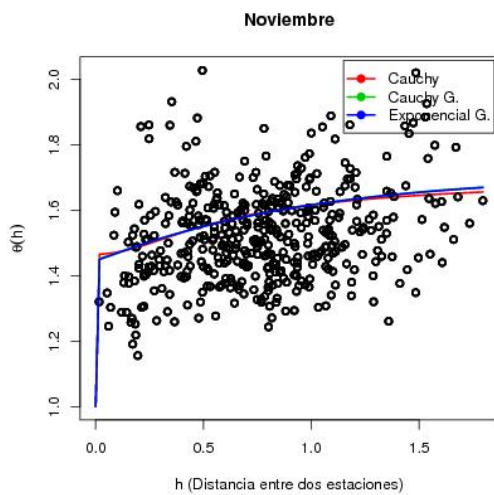
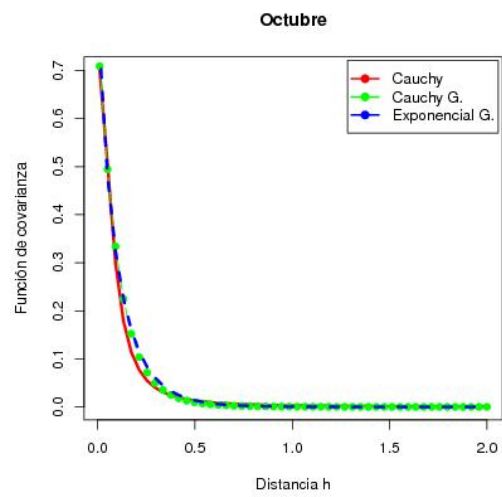
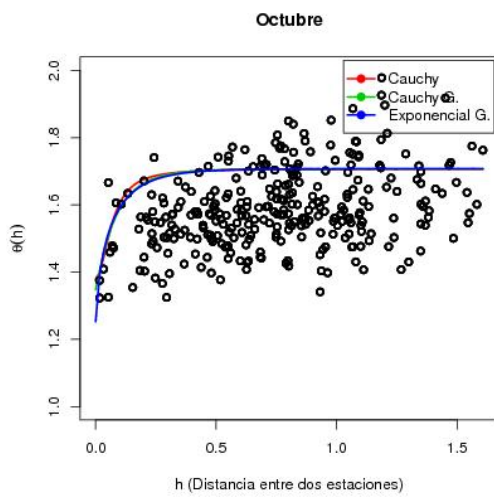
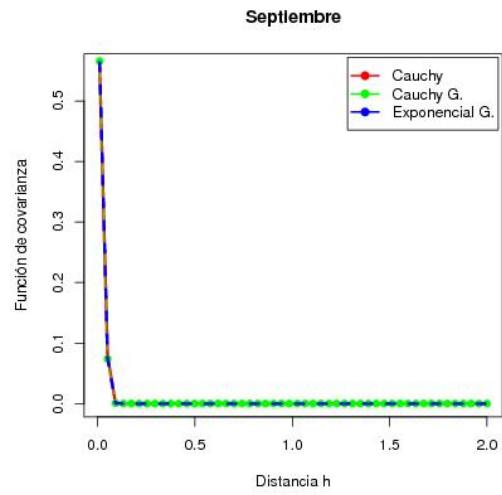
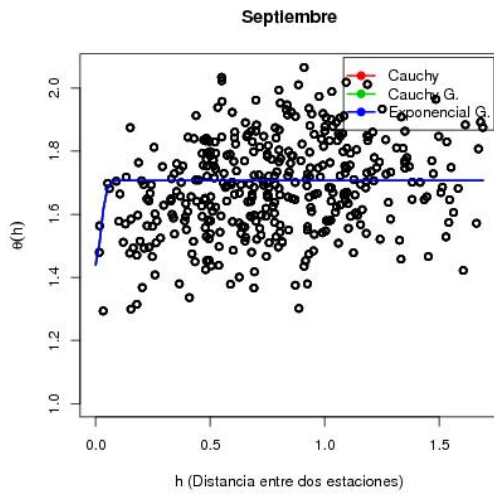
Función de coeficiente extremal

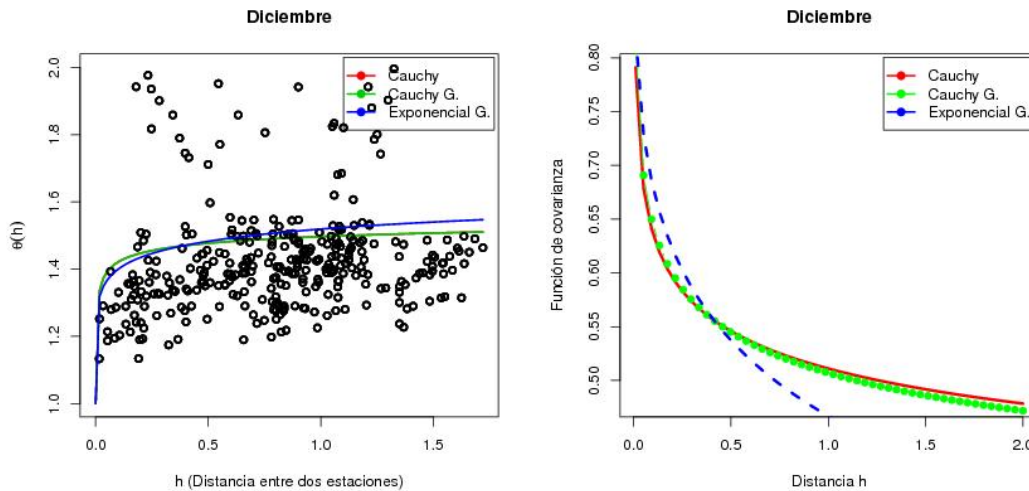
Con el objetivo de estudiar las variaciones mencionadas con anterioridad, se compararon gráficamente las funciones de coeficiente extremal y las propias funciones de covarianza. La estimación de la función del coeficiente extremal se realizó vía la estimación del madograma límite $\eta(h) = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_t(h)$ y (3.13).











Las gráficas de las funciones de covarianza indican que, para los datos utilizados, la diferencia del compartamiento de las tres funciones de consideradas es casi nula en todos los casos, excepto para los modelos ajustados para marzo y abril (los dos con mayores parámetros de rango y suavidad 1 estimados bajo la función de covarianza Cauchy generalizada). Sin embargo, mediante las gráficas de la función del coeficiente extremal se puede notar que la dependencia a pares entre las estaciones varía muy poco según la función de covarianza que se utiliza, incluso en el caso en que dicha función es la Cauchy generalizada, por lo que no existe evidencia para suponer que exista una variación significativa en los modelos ajustados con una función de covarianza u otra. Por tal razón, todos los cálculos siguientes correspondientes al modelo de Schlather se harán utilizando únicamente la función de covarianza Cauchy.

Otra interpretación que puede hacerse a las gráficas anteriores se refiere a la relación de dependencia entre las parejas de estaciones. Se puede notar en ambos tipos de gráficas que en los modelos correspondientes a los meses que van desde mayo hasta septiembre la independencia entre estaciones se da a partir de distancias muy cortas (muy cercanas a cero). Sin embargo, las gráficas de las funciones de coeficiente extremal indican que existe una gran variabilidad en la estimación de la dependencia, pues en algunos casos pese a que dos parejas de estaciones distan lo mismo, una pareja presenta independencia y la otra no. Esto se observa como consecuencia de que algunos puntos negros en las gráficas de las funciones de coeficiente extremal caen por debajo de las curvas que representan dichas funciones, lo que indica que para los sitios cuyas distancias están representadas por tales puntos, la relación de dependencia es más fuerte.

Nuevamente el tamaño de la muestra utilizada para ajustar los modelos podría influir en esta discrepancia, pues la cantidad de información con la que se contó podría ser insuficiente para tener una estimación más precisa de la función del coeficiente extremal.

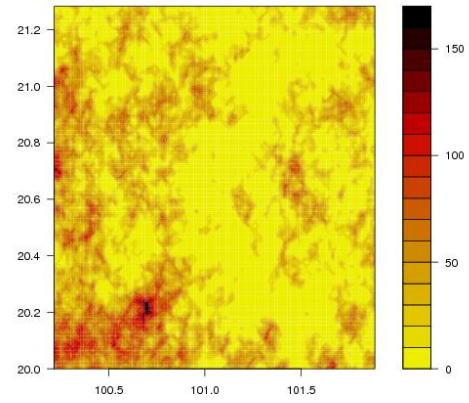
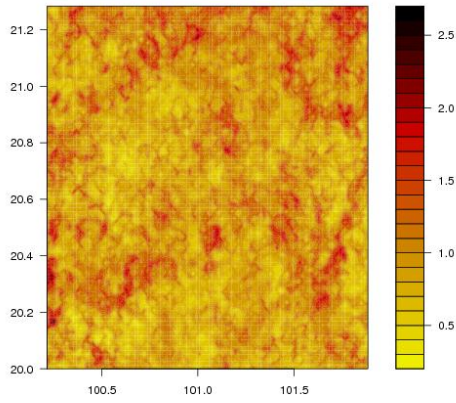
Por último, las gráficas de la función de coeficiente extremal proporcionan una idea de cual es el modelo que podría ajustar mejor a los datos. Siguiendo a Schlather (2002) se tiene un criterio de selección del mejor modelo con base en la estimación del coeficiente extremal para los sitios de interés: si tal estimación (digamos $\hat{\theta}$) es aproximadamente 2, entonces el tipo de lluvias en la región es del tipo convectivas (modelo de Smith), mientras que si $\hat{\theta}$ es aproximadamente menor que 2, entonces se tienen lluvias ciclónicas (modelo de Schlather).

Considerando que la estimación de la función de coeficiente extremal está acotada por 1.7 aproximadamente (Ribatet, 2010), en las gráficas de la función de coeficiente extremal podemos notar que para los modelos correspondientes a los meses desde mayo hasta octubre se podría sospechar que el modelo más apropiado es el de Smith, principalmente en los casos de junio y julio, debido a que la mayoría de los valores para la función del coeficiente extremal se encuentran entre 1.3 y 1.7 (en junio y julio la cantidad de valores de la función de coeficiente extremal es mayor que en los otros casos mencionados). Para confirmar esta afirmación se obtuvieron los valores del TIC para los modelos ajustados a cada mes (ver sección 4.3.3).

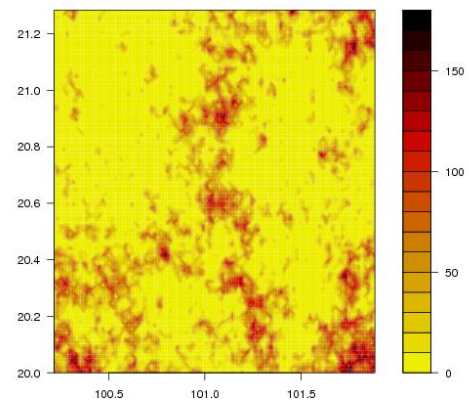
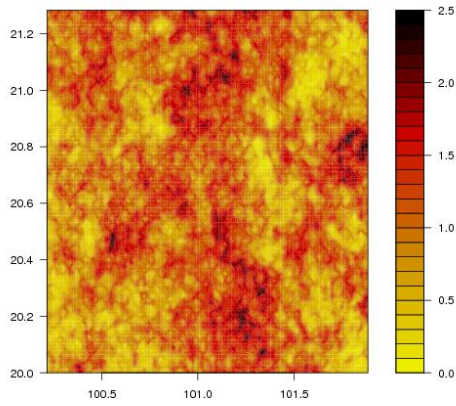
Procesos simulados bajo el modelo de Schlather

Se presentan a continuación las gráficas de los procesos simulados bajos el modelo de Schlather estimado, utilizando la función de covarianza Cauchy. Estas gráficas corresponden a los casos con valores mínimo y máximo, respectivamente, obtenidos en 10 simulaciones de tales procesos.

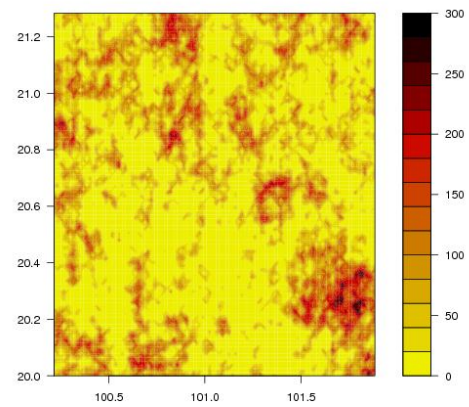
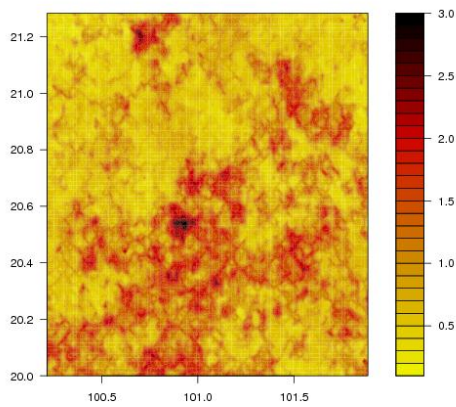
Enero



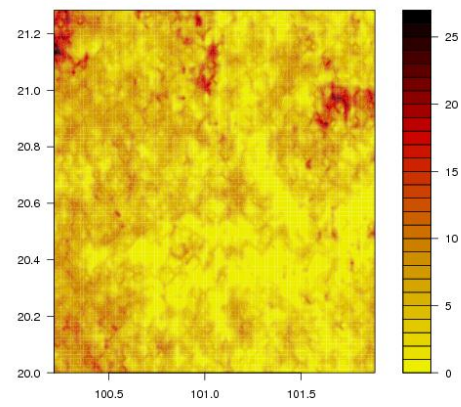
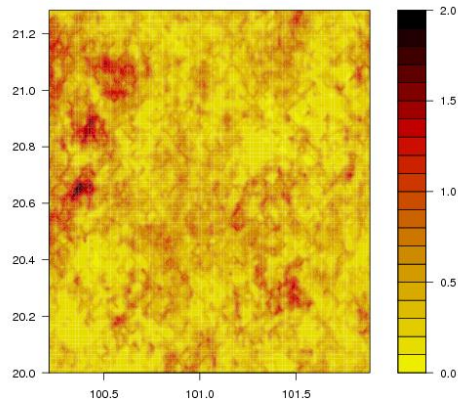
Febrero



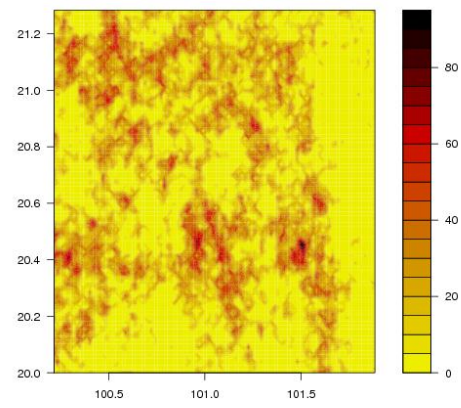
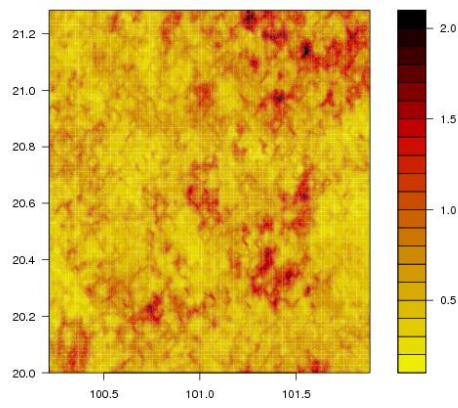
Marzo



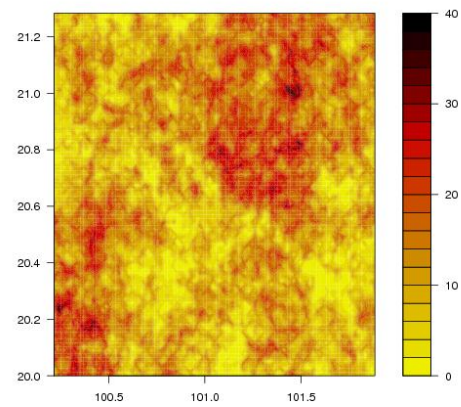
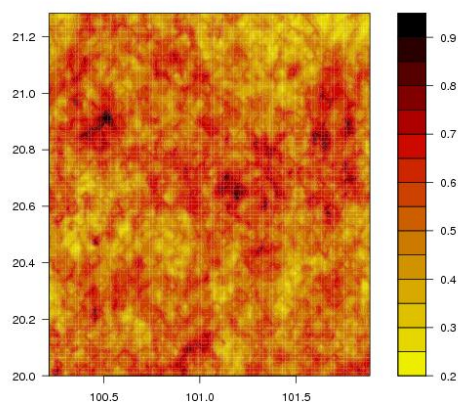
Abril



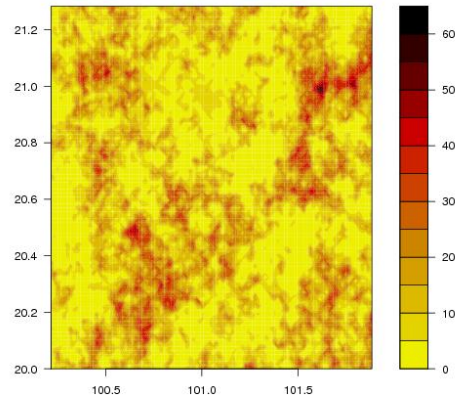
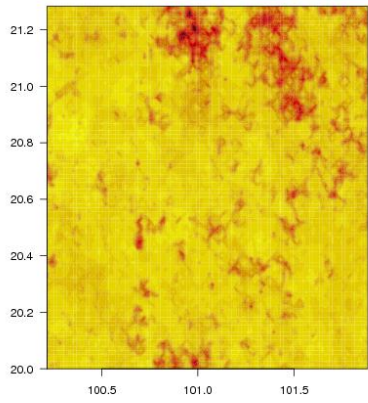
Mayo



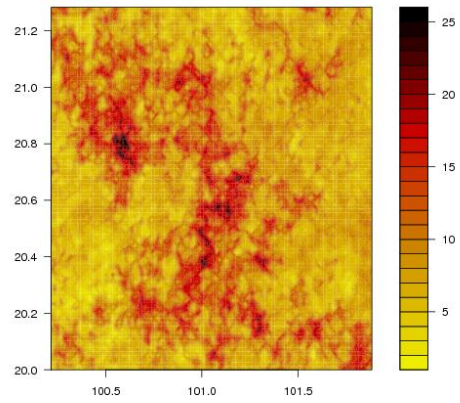
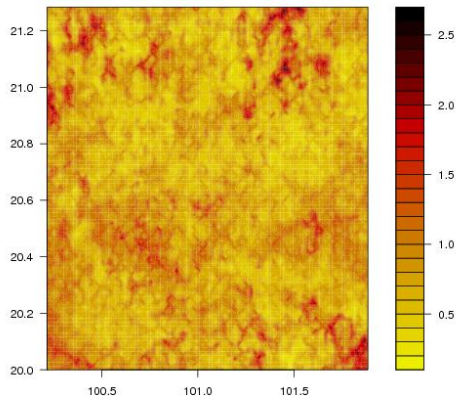
Junio



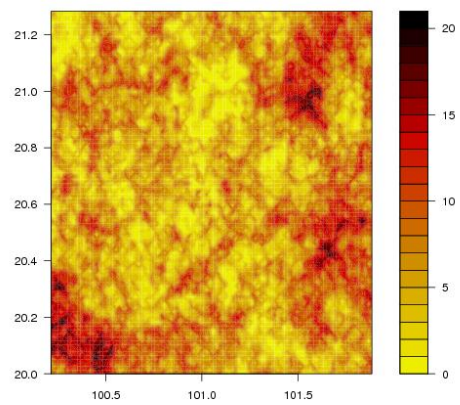
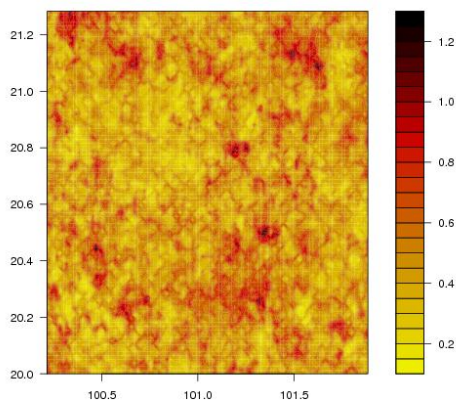
Julio



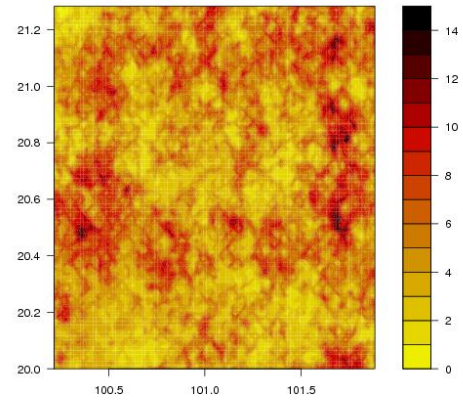
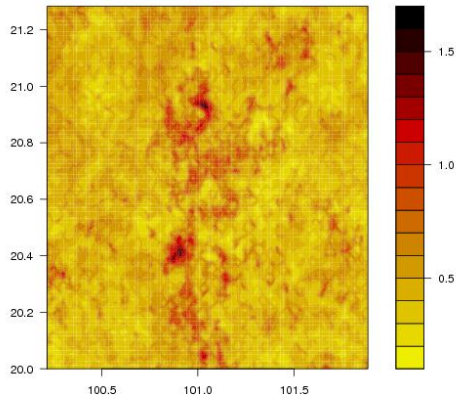
Agosto



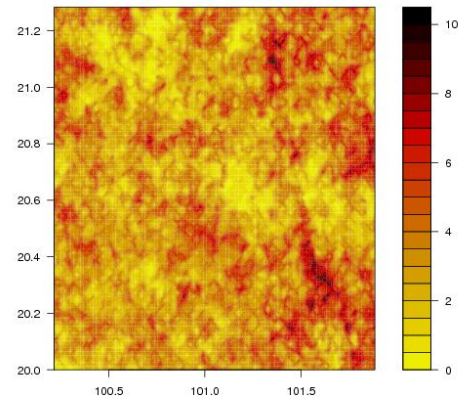
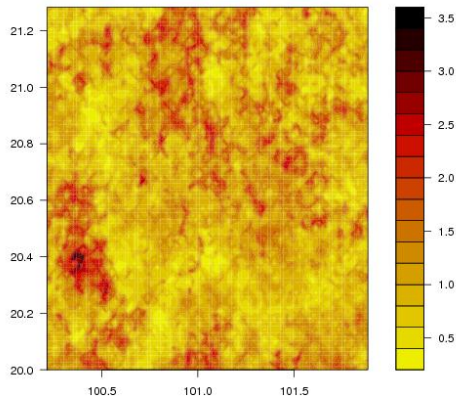
Septiembre



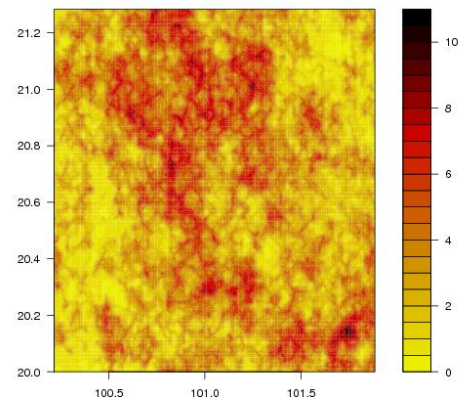
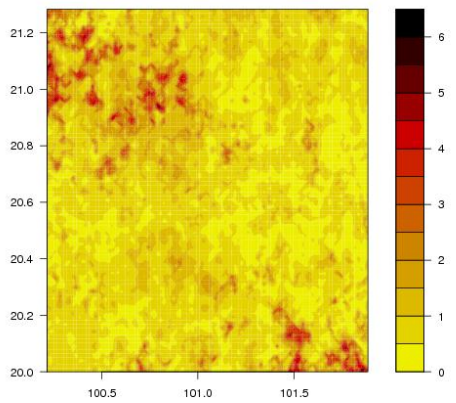
Octubre



Noviembre



Diciembre



Se puede observar que los valores de las precipitaciones para los modelos correspondientes a enero, febrero y marzo están fuera del rango descrito por los datos utilizados (ver sección 4.2), y además, las lluvias parecen incrementar su intensidad a partir de marzo (en enero y febrero la intensidad de las lluvias es bastante similar). También se observa que el periodo de abril a junio presenta intensidades menores con respecto al periodo anterior, y nuevamente tales intensidades comienzan a aumentar considerablemente en julio. A partir de agosto, la intensidad de las lluvias disminuye y pareciera no variar demasiado en noviembre y diciembre.

Debido a la diferencia en las escalas de las precipitaciones simuladas y a la dispersión de las lluvias sobre el plano, en este caso no es posible observar algún patrón en el comportamiento de las mismas, como ocurriera para el modelo de Smith.

4.3.3. Selección del mejor modelo

Con el objetivo de determinar el mejor modelo para cada mes, se calcularon los valores del estadístico denominado como *Criterio de información de Takeuchi* (mejor conocido como TIC por sus siglas en inglés). Este estadístico permite elegir entre un modelo u otro considerando como mejor opción aquel para el cual el valor del TIC es más pequeño. En la siguiente tabla se presentan los valores de dicho estadístico para los modelos de Smith y Schlather, este último ajustado utilizando la función de covarianza Cauchy (recordar que las otras dos funciones de covarianza, Cauchy generalizada y exponencial generalizada, no se utilizaron debido a que el modelo ajustado bajo cada una de ellas no difiere significativamente de aquel ajustado vía la función de covarianza Cauchy).

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Schlather C.	77552.7675	81521.6922	50180.1875	58921.2164	80792.3078	63595.6060
Smith	89666.6296	85872.7634	57130.6815	67184.7780	83820.7567	63593.2748
	Julio	Agosto	Sept.	Octubre	Nov.	Dic.
Schlather C.	89632.7188	63291.3937	62640.5822	54998.8402	56532.2824	48301.9938
Smith	89618.4951	63810.7491	64617.2446	59640.4354	61740.3767	57066.9973

Se observa que en todos los casos salvo junio y julio, el modelo más apropiado es el de Schlather, pues los valores del TIC son menores para dicho modelo. Para junio y julio, el valor más pequeño del TIC se obtiene utilizando el modelo de Smith, aunque la diferencia con el valor del TIC del modelo de Schlather en estos dos casos es muy baja. Con base en esto y lo observado en las gráficas de la función de coeficiente extremal se recomendaría modelar junio y julio utilizando el modelo de Smith. Sin embargo, la posible falta de información debida al tamaño de muestra utilizado podría jugar un papel determinante en este caso, pues como ya se mencionó, porcentualmente la diferencia entre los valores del TIC para los modelos de Schlather y Smith en junio y julio es muy baja y además, los modelos de Smith para estos dos meses presentan casos en los que se tienen precipitaciones pluviales con valores bastante irreales.

4.4. Conclusiones

A continuación se resumen algunos de los aspectos más importantes observados en los resultados del estudio realizado.

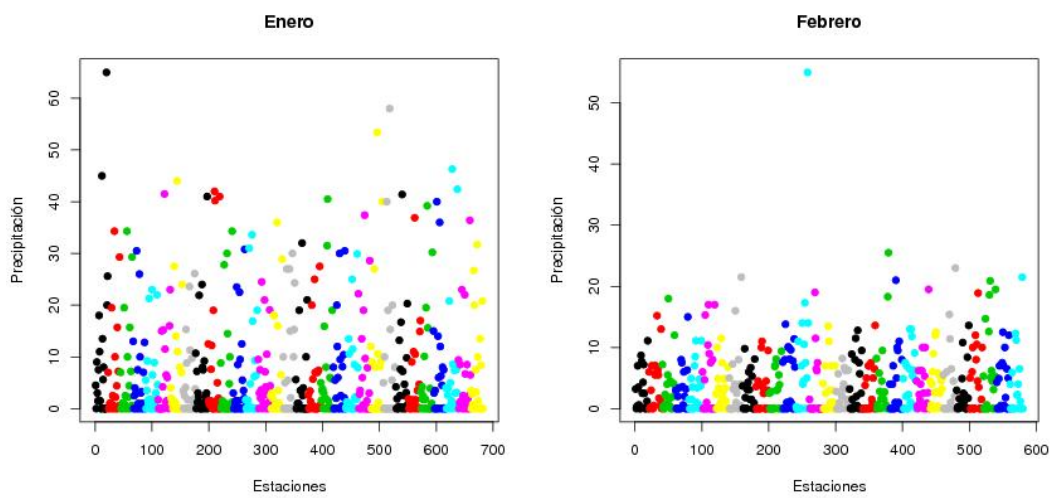
- Debido a la gran cantidad de valores faltantes, así como estaciones que dejaron de funcionar, fue necesario depurar las bases de datos dos veces, lo cual redujo considerablemente el número de elementos en las muestras.
- Las depuraciones hechas a las bases de datos implicaron que las estaciones y años utilizados para los ajustes de los modelos no fueran iguales para todos los meses, por lo que los modelos ajustados para cada mes sólo son comparables en el sentido del tipo de modelo que ajusta mejor a cada mes (Smith o Schlather), es decir, los modelos para dos o más meses distintos no son comparables entre ellos.
- Las simulaciones de los procesos max-estables realizadas con los modelos espaciales de Smith y Schlather muestran que dichos modelos permiten estudiar el comportamiento de las lluvias extremas de una manera más efectiva que aquella en la que sólo se consideran los valores máximos de las lluvias ignorando sus características espaciales.
- Los modelos de Smith ajustados permiten observar un cierto patrón en las lluvias a lo largo del año. Las simulaciones hechas con todos los modelos de Smith, excepto los correspondientes a abril, mayo y diciembre presentaron valores fuera del rango de los datos utilizados en su ajuste, y más aún, los modelos para los meses febrero, junio, julio y octubre presentaron valores que pueden ser considerados como *irreales*.
- Los modelos de Schlather ajustados según las funciones de covarianza Cauchy, Cauchy generalizada y exponencial generalizada tienen comportamientos casi idénticos, por lo que no se tiene evidencia para afirmar que la variación en la elección de dicha función de covarianza modificará de manera significativa el modelo obtenido. Por tal razón se eligió únicamente la función de covarianza Cauchy para ser utilizada en el resto del estudio realizado.
- Las gráficas de la función del coeficiente extremal para los modelos de Schlather parecen indicar que el tamaño de la muestra utilizada es insuficiente para obtener una buena

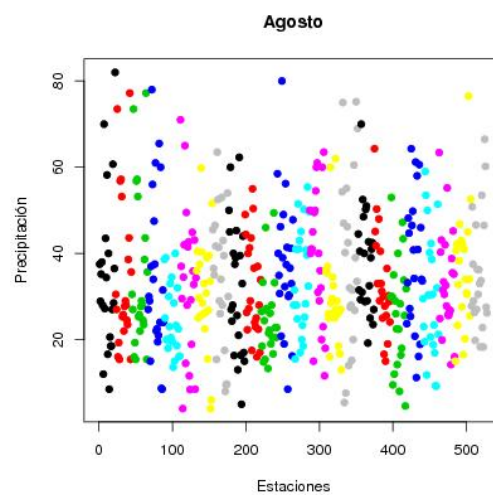
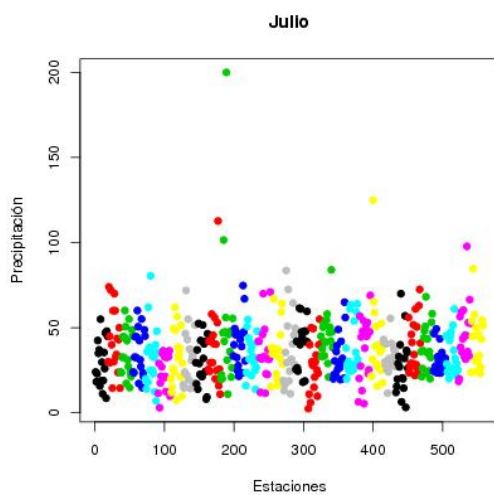
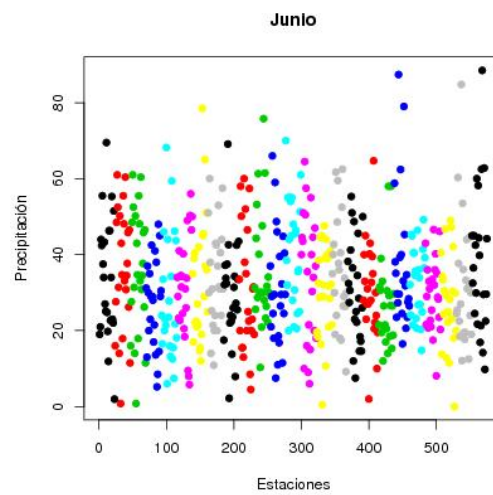
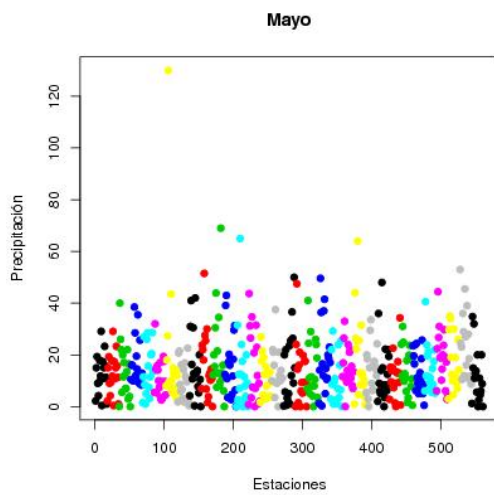
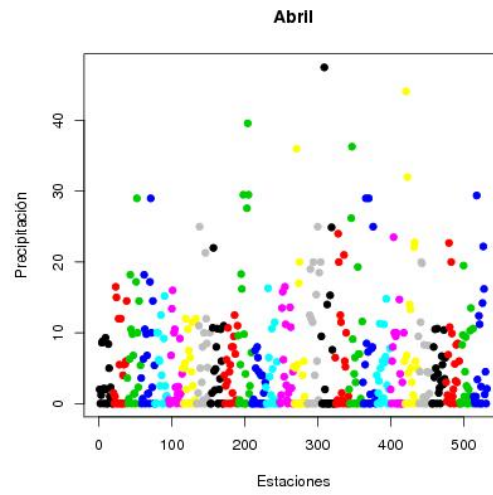
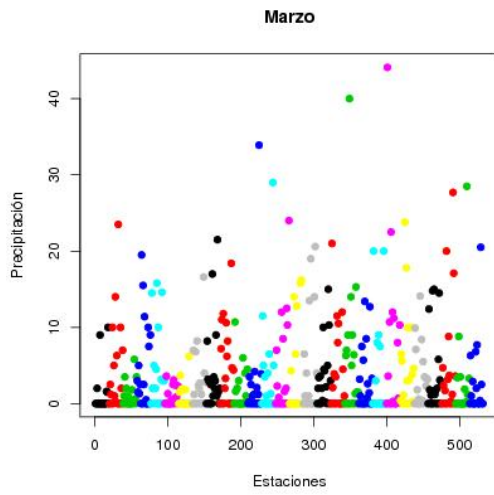
estimación de dicha función, debido a la gran variabilidad en los valores estimados de dicha función. Estas gráficas también sugieren que para los meses mayo, junio, julio, agosto, septiembre y octubre, con especial énfasis en junio y julio, el modelo que mejor ajusta a los datos es el modelo de Smith.

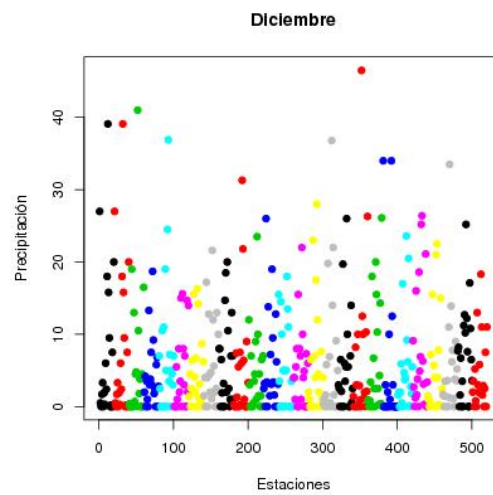
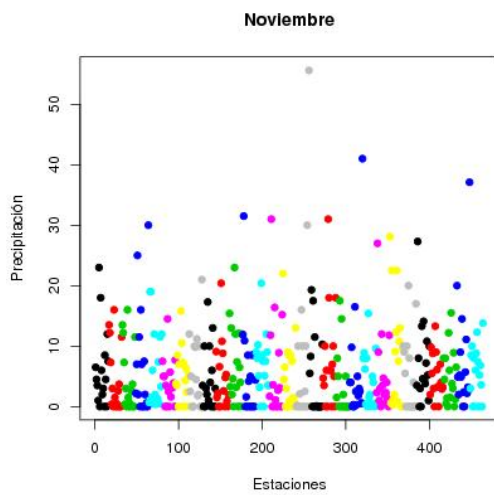
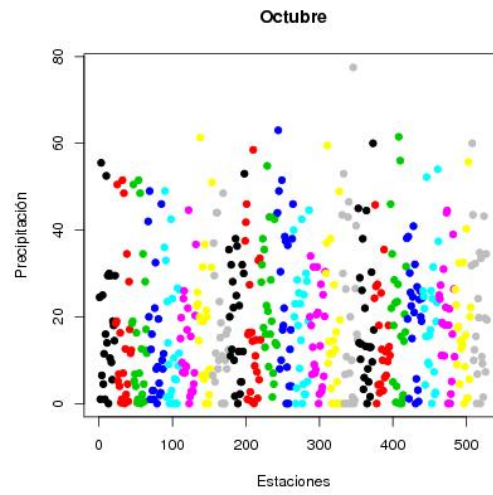
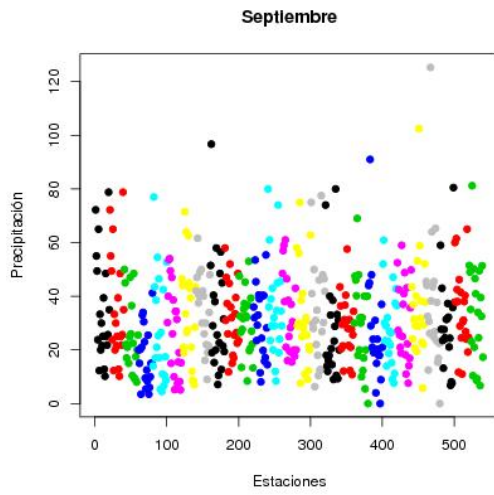
- Los procesos simulados bajo el modelo de Schlather con función de covarianza Cauchy, correspondientes a los meses de enero, febrero y marzo, presentan valores fuera del rango de los datos utilizados para la estimación de los modelos correspondientes. Sin embargo ninguno de tales procesos presenta valores que pudieran ser considerados como *irreales*. En estas simulaciones no fue posible observar un patrón en el comportamiento de las lluvias como ocurriera en el caso de los procesos simulados bajo el modelo de Smith.
- Según las simulaciones realizadas, bajo el modelo de Smith los meses con lluvias más intensas son julio y octubre, mientras que bajo el modelo de Schlather el mes con mayor intensidad en cuanto a lluvias es marzo, seguido por enero y febrero.
- De acuerdo a lo observado en los datos respecto a la ocurrencia de los valores máximos de las precipitaciones pluviales, el modelo de Schlather resulta más apropiado para modelar las lluvias en el Estado de Guanajuato, sin embargo las gráficas de la función del coeficiente extremal y los valores del TIC para los modelos correspondientes a junio y julio, indican que el modelo de Smith funciona mejor o al menos igual de bien que el de Schlather en estos dos casos. El uso del modelo de Schlather como mejor opción para los meses distintos de junio y julio concuerda con los resultados obtenidos en López-Quintero (2000), donde también se modelan las lluvias del Estado de Guanajuato utilizando el modelo de Schlather. Por otro lado, empíricamente se sabe que los meses con lluvias más intensas en el Estado de Guanajuato son junio y julio, lo cual concuerda con lo obtenido en las simulaciones hechas para los modelos de Smith correspondientes a estos dos meses.
- Un posible problema abierto resultante del estudio realizado consiste en realizar el ajuste de los modelos espaciales considerados, utilizando valores máximos anuales de modo que cada valor máximo anual se tome sobre los máximos mensuales utilizados en este estudio, y comparar los resultados obtenidos con los que se presentan en López-Quintero (2010).

Apéndice A

Gráficos exploratorios por mes







Apéndice B

Parámetros de las DVE marginales

	Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma		Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma
1	1.000	1.000	1.209	5.641	4.664	28	3.000	4.000	0.048	0.134	2.738
2	1.000	2.000	0.072	0.209	2.886	29	3.000	5.000	7.069	6.765	0.242
3	1.000	3.000	0.522	2.001	3.831	30	3.000	6.000	23.132	14.374	0.010
4	1.000	4.000	0.728	3.469	4.759	31	3.000	7.000	31.103	13.844	-0.101
5	1.000	5.000	9.424	7.395	0.142	32	3.000	8.000	26.409	12.896	-0.108
6	1.000	6.000	26.719	13.197	-0.001	33	3.000	9.000	24.369	14.077	-0.000
7	1.000	7.000	32.007	10.440	-0.000	34	3.000	10.000	8.137	9.190	0.525
8	1.000	8.000	28.315	12.825	-0.006	35	3.000	11.000	1.524	6.727	4.412
9	1.000	9.000	25.568	11.851	-0.062	36	3.000	12.000	0.074	0.208	2.715
10	1.000	10.000	14.399	10.984	-0.006	37	4.000	1.000	1.658	8.289	4.998
11	1.000	11.000	1.569	6.701	4.269	38	4.000	2.000	0.079	0.227	2.799
12	1.000	12.000	1.476	8.099	5.489	39	4.000	3.000	0.084	0.360	4.256
13	2.000	1.000	1.975	8.125	4.110	40	4.000	4.000	0.375	1.544	4.114
14	2.000	2.000	0.127	0.374	2.906	41	4.000	5.000	8.623	7.158	0.008
15	2.000	3.000	1.012	4.603	4.548	42	4.000	6.000	29.210	13.538	-0.247
16	2.000	4.000	1.664	2.244	0.865	43	4.000	7.000	25.314	13.098	-0.170
17	2.000	5.000	11.194	7.572	0.154	44	4.000	8.000	26.258	11.251	0.052
18	2.000	6.000	24.474	9.251	-0.151	45	4.000	9.000	24.074	12.089	-0.103
19	2.000	7.000	26.879	8.084	0.082	46	4.000	10.000	13.044	12.916	0.123
20	2.000	8.000	25.580	6.616	0.226	47	4.000	11.000	1.040	4.128	3.960
21	2.000	9.000	28.349	10.545	-0.053	48	4.000	12.000	0.168	0.557	3.300
22	2.000	10.000	15.573	10.875	-0.045	49	5.000	1.000	1.655	6.791	4.097
23	2.000	11.000	2.852	3.662	0.706	50	5.000	2.000	0.460	2.014	4.371
24	2.000	12.000	1.035	4.157	4.016	51	5.000	3.000	2.022	8.831	4.365
25	3.000	1.000	1.751	7.300	4.166	52	5.000	4.000	1.563	6.337	4.048
26	3.000	2.000	0.017	0.042	2.300	53	5.000	5.000	7.994	7.067	0.350
27	3.000	3.000	0.030	0.080	2.622	54	5.000	6.000	24.767	13.983	0.049

	Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma		Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma
55	5.000	7.000	28.054	14.928	0.003	95	8.000	11.000	0.589	2.232	3.779
56	5.000	8.000	26.618	16.221	-0.026	96	8.000	12.000	1.635	6.784	4.144
57	5.000	9.000	26.223	15.974	0.161	97	9.000	1.000	1.043	3.997	3.821
58	5.000	10.000	11.418	11.257	0.098	98	9.000	2.000	1.001	4.194	4.183
59	5.000	11.000	0.126	0.690	5.446	99	9.000	3.000	0.689	2.993	4.341
60	5.000	12.000	1.176	7.037	5.981	100	9.000	4.000	0.871	3.246	3.716
61	6.000	1.000	0.428	1.482	3.444	101	9.000	5.000	12.731	6.856	-0.038
62	6.000	2.000	0.093	0.266	2.793	102	9.000	6.000	25.013	9.487	0.226
63	6.000	3.000	0.634	2.638	4.161	103	9.000	7.000	27.896	9.140	-0.174
64	6.000	4.000	0.762	2.785	3.639	104	9.000	8.000	24.526	10.384	0.154
65	6.000	5.000	9.367	8.413	0.161	105	9.000	9.000	28.003	11.147	-0.107
66	6.000	6.000	25.040	13.288	-0.190	106	9.000	10.000	11.151	11.397	0.186
67	6.000	7.000	27.596	11.846	-0.054	107	9.000	11.000	5.103	5.632	0.099
68	6.000	8.000	27.599	13.837	-0.117	108	9.000	12.000	0.783	3.110	3.967
69	6.000	9.000	25.501	15.577	0.019	109	10.000	1.000	1.398	6.622	4.736
70	6.000	10.000	7.802	7.928	0.434	110	10.000	2.000	0.477	1.800	3.764
71	6.000	11.000	2.131	3.239	0.911	111	10.000	3.000	0.306	1.819	5.932
72	6.000	12.000	1.545	6.085	3.932	112	10.000	4.000	2.667	15.447	5.790
73	7.000	1.000	2.527	11.662	4.613	113	10.000	5.000	8.603	7.718	0.125
74	7.000	2.000	0.072	0.202	2.731	114	10.000	6.000	28.384	13.672	-0.082
75	7.000	3.000	0.033	0.088	2.641	115	10.000	7.000	28.113	10.973	-0.003
76	7.000	4.000	0.137	0.407	2.906	116	10.000	8.000	24.296	10.367	0.001
77	7.000	5.000	10.776	9.071	-0.025	117	10.000	9.000	25.269	12.349	-0.009
78	7.000	6.000	22.960	15.102	-0.396	118	10.000	10.000	7.790	8.121	0.407
79	7.000	7.000	29.590	14.231	-0.076	119	10.000	11.000	1.390	1.937	0.639
80	7.000	8.000	25.581	8.293	0.164	120	10.000	12.000	1.216	7.235	5.944
81	7.000	9.000	26.713	11.470	-0.087	121	11.000	1.000	1.526	6.440	4.217
82	7.000	10.000	11.418	10.720	0.080	122	11.000	2.000	0.074	0.248	3.331
83	7.000	11.000	1.557	7.156	4.593	123	11.000	3.000	0.559	2.169	3.872
84	7.000	12.000	2.541	3.681	0.742	124	11.000	4.000	0.019	0.052	2.732
85	8.000	1.000	0.976	3.724	3.807	125	11.000	5.000	5.576	6.130	0.394
86	8.000	2.000	0.028	0.070	2.345	126	11.000	6.000	21.328	12.466	-0.215
87	8.000	3.000	0.362	1.179	3.220	127	11.000	7.000	21.623	11.672	0.023
88	8.000	4.000	0.732	2.672	3.637	128	11.000	8.000	25.911	13.695	-0.019
89	8.000	5.000	9.884	7.391	0.038	129	11.000	9.000	18.163	9.154	0.204
90	8.000	6.000	29.283	17.860	-0.488	130	11.000	10.000	9.565	9.368	0.208
91	8.000	7.000	25.558	9.968	0.094	131	11.000	11.000	1.623	8.912	5.491
92	8.000	8.000	26.418	10.390	0.257	132	11.000	12.000	0.946	4.323	4.566
93	8.000	9.000	26.434	15.507	0.030	133	12.000	1.000	0.201	0.626	3.074
94	8.000	10.000	7.479	8.349	0.397	134	12.000	2.000	0.183	0.561	3.028

	Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma		Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma
135	12.000	3.000	0.013	0.034	2.569	175	15.000	7.000	23.487	12.995	-0.159
136	12.000	4.000	3.938	4.962	0.473	176	15.000	8.000	29.697	15.530	-0.385
137	12.000	5.000	10.640	6.971	-0.039	177	15.000	9.000	27.781	17.995	0.080
138	12.000	6.000	18.386	10.186	0.064	178	15.000	10.000	12.710	11.223	0.033
139	12.000	7.000	22.270	12.050	-0.424	179	15.000	11.000	0.559	2.124	3.798
140	12.000	8.000	22.924	9.589	-0.194	180	15.000	12.000	1.645	7.292	4.430
141	12.000	9.000	16.885	12.285	0.069	181	16.000	1.000	1.950	8.577	4.397
142	12.000	10.000	6.266	7.431	0.704	182	16.000	2.000	0.138	0.423	3.022
143	12.000	11.000	1.268	5.014	3.946	183	16.000	3.000	0.027	0.089	3.274
144	12.000	12.000	1.277	4.945	3.865	184	16.000	4.000	3.347	4.174	0.356
145	13.000	1.000	0.126	0.508	4.023	185	16.000	5.000	8.934	7.934	0.328
146	13.000	2.000	0.007	0.020	2.920	186	16.000	6.000	25.214	13.158	-0.010
147	13.000	3.000	1.069	5.052	4.723	187	16.000	7.000	27.411	12.232	0.131
148	13.000	4.000	0.601	2.238	3.714	188	16.000	8.000	25.202	13.329	-0.079
149	13.000	5.000	7.148	7.481	0.329	189	16.000	9.000	25.853	13.961	-0.183
150	13.000	6.000	21.628	14.105	-0.204	190	16.000	10.000	11.731	10.043	0.045
151	13.000	7.000	21.781	14.889	-0.046	191	16.000	11.000	0.108	0.410	3.793
152	13.000	8.000	23.236	15.747	-0.175	192	16.000	12.000	0.217	0.830	3.809
153	13.000	9.000	17.210	11.766	0.091	193	17.000	1.000	1.051	4.495	4.276
154	13.000	10.000	9.007	9.411	0.220	194	17.000	2.000	0.246	0.967	3.925
155	13.000	11.000	0.459	1.579	3.423	195	17.000	3.000	0.114	0.878	7.673
156	13.000	12.000	1.132	4.538	4.007	196	17.000	4.000	0.220	0.712	3.204
157	14.000	1.000	0.847	3.474	4.096	197	17.000	5.000	4.813	5.170	0.436
158	14.000	2.000	0.121	0.390	3.209	198	17.000	6.000	26.056	8.042	-0.201
159	14.000	3.000	-0.000	0.001	4.349	199	17.000	7.000	28.983	9.132	0.164
160	14.000	4.000	0.448	1.842	4.107	200	17.000	8.000	29.185	11.810	-0.210
161	14.000	5.000	7.409	5.413	0.010	201	17.000	9.000	20.641	11.759	0.039
162	14.000	6.000	19.619	10.643	0.081	202	17.000	10.000	12.790	8.276	-0.147
163	14.000	7.000	23.309	10.330	0.083	203	17.000	11.000	0.301	0.996	3.277
164	14.000	8.000	25.826	13.927	-0.107	204	17.000	12.000	0.161	0.484	2.953
165	14.000	9.000	22.405	14.963	-0.165	205	18.000	1.000	0.659	2.618	3.965
166	14.000	10.000	8.943	7.773	0.174	206	18.000	2.000	1.303	5.398	4.139
167	14.000	11.000	2.433	3.025	0.347	207	18.000	3.000	0.661	2.569	3.880
168	14.000	12.000	2.004	2.691	0.540	208	18.000	4.000	0.649	4.092	6.307
169	15.000	1.000	0.173	0.593	3.409	209	18.000	5.000	9.388	8.867	0.068
170	15.000	2.000	0.081	0.290	3.566	210	18.000	6.000	25.457	12.188	-0.126
171	15.000	3.000	0.521	2.057	3.943	211	18.000	7.000	24.965	12.795	0.229
172	15.000	4.000	0.293	1.003	3.402	212	18.000	8.000	26.996	10.635	0.080
173	15.000	5.000	7.317	6.826	0.308	213	18.000	9.000	27.702	12.523	-0.077
174	15.000	6.000	27.127	14.440	-0.433	214	18.000	10.000	15.618	11.028	-0.171

	Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma		Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma
215	18.000	11.000	2.543	3.599	0.685	255	22.000	3.000	0.121	0.554	4.579
216	18.000	12.000	0.574	2.086	3.621	256	22.000	4.000	0.374	1.344	3.580
217	19.000	1.000	0.036	0.147	4.035	257	22.000	5.000	11.269	7.017	-0.369
218	19.000	2.000	0.008	0.017	1.943	258	22.000	6.000	24.311	12.640	-0.159
219	19.000	3.000	1.150	5.409	4.704	259	22.000	7.000	31.213	10.502	0.178
220	19.000	4.000	0.632	2.263	3.568	260	22.000	8.000	33.965	12.164	-0.212
221	19.000	5.000	8.181	7.243	0.076	261	22.000	9.000	29.959	10.408	-0.078
222	19.000	6.000	27.620	13.471	-0.141	262	22.000	10.000	19.323	11.881	-0.075
223	19.000	7.000	28.555	12.712	0.130	263	22.000	11.000	1.349	5.777	4.279
224	19.000	8.000	30.761	12.930	-0.140	264	22.000	12.000	0.374	1.513	4.043
225	19.000	9.000	27.810	13.356	-0.011	265	23.000	1.000	1.900	7.937	4.172
226	19.000	10.000	7.957	8.797	0.524	266	23.000	2.000	0.031	0.608	19.373
227	19.000	11.000	0.837	3.450	4.117	267	23.000	3.000	0.753	2.935	3.887
228	19.000	12.000	0.303	1.009	3.308	268	23.000	4.000	1.684	7.222	4.285
229	20.000	1.000	2.021	8.535	4.218	269	23.000	5.000	6.028	6.860	0.334
230	20.000	2.000	0.106	0.328	3.081	270	23.000	6.000	27.914	14.599	-0.213
231	20.000	3.000	1.704	9.093	5.335	271	23.000	7.000	28.430	11.873	-0.024
232	20.000	4.000	3.706	4.483	0.358	272	23.000	8.000	23.616	10.829	0.118
233	20.000	5.000	11.963	8.055	0.116	273	23.000	9.000	21.627	10.839	0.154
234	20.000	6.000	27.636	12.999	0.031	274	23.000	10.000	14.781	12.741	0.057
235	20.000	7.000	28.910	12.080	-0.017	275	23.000	11.000	0.026	0.067	2.435
236	20.000	8.000	29.105	16.001	0.027	276	23.000	12.000	0.042	0.143	3.334
237	20.000	9.000	23.662	13.883	-0.165	277	24.000	1.000	0.036	0.099	2.687
238	20.000	10.000	14.032	12.571	0.129	278	24.000	2.000	0.031	0.083	2.596
239	20.000	11.000	3.315	4.215	0.494	279	24.000	3.000	0.004	0.006	1.468
240	20.000	12.000	2.046	8.314	4.059	280	24.000	4.000	1.019	5.336	5.235
241	21.000	1.000	1.991	9.465	4.753	281	24.000	5.000	7.228	7.935	0.406
242	21.000	2.000	0.013	0.031	2.221	282	24.000	6.000	27.690	14.371	0.215
243	21.000	3.000	1.331	7.463	5.602	283	24.000	7.000	28.266	13.547	-0.064
244	21.000	4.000	0.194	0.587	2.975	284	24.000	8.000	31.078	12.168	-0.130
245	21.000	5.000	10.939	8.972	0.018	285	24.000	9.000	26.515	12.208	0.237
246	21.000	6.000	22.602	12.827	-0.185	286	24.000	10.000	10.935	9.157	0.137
247	21.000	7.000	26.761	9.846	-0.155	287	24.000	11.000	1.799	7.810	4.338
248	21.000	8.000	20.009	7.240	0.055	288	24.000	12.000	0.018	0.174	9.310
249	21.000	9.000	21.990	14.165	0.123	289	25.000	1.000	0.407	1.376	3.361
250	21.000	10.000	9.829	10.512	0.367	290	25.000	2.000	0.113	0.328	2.845
251	21.000	11.000	0.974	4.389	4.504	291	25.000	3.000	0.847	3.365	3.964
252	21.000	12.000	0.064	0.199	3.051	292	25.000	4.000	0.502	1.742	3.452
253	22.000	1.000	0.095	0.278	2.882	293	25.000	5.000	7.945	5.865	-0.008
254	22.000	2.000	0.033	0.090	2.553	294	25.000	6.000	24.724	12.046	-0.125

	Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma		Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma
295	25.000	7.000	25.124	10.904	0.239	335	28.000	11.000	1.120	4.920	4.389
296	25.000	8.000	26.788	10.320	0.125	336	28.000	12.000	0.158	0.519	3.240
297	25.000	9.000	25.192	14.014	0.014	337	29.000	1.000	1.968	8.458	4.298
298	25.000	10.000	12.116	9.924	0.223	338	29.000	2.000	1.060	5.100	4.808
299	25.000	11.000	3.052	4.068	0.688	339	29.000	3.000	0.783	3.107	3.963
300	25.000	12.000	1.648	2.467	0.900	340	29.000	4.000	0.413	1.410	3.396
301	26.000	1.000	2.479	10.723	4.323	341	29.000	5.000	8.515	7.635	0.236
302	26.000	2.000	0.029	0.087	2.998	342	29.000	6.000	27.298	12.136	-0.072
303	26.000	3.000	0.909	3.421	3.753	343	29.000	7.000	29.155	11.917	-0.093
304	26.000	4.000	0.156	0.502	3.193	344	29.000	8.000	30.835	11.234	0.025
305	26.000	5.000	6.304	7.009	0.145	345	29.000	9.000	27.448	13.371	0.058
306	26.000	6.000	32.149	14.526	-0.259	346	29.000	10.000	17.001	11.589	0.057
307	26.000	7.000	36.540	12.464	-0.266	347	29.000	11.000	1.258	6.798	5.402
308	26.000	8.000	31.002	14.730	-0.284	348	29.000	12.000	0.534	1.871	3.486
309	26.000	9.000	26.218	13.816	0.086	349	30.000	1.000	0.059	0.215	3.589
310	26.000	10.000	7.694	8.848	0.462	350	30.000	2.000	0.541	2.508	4.632
311	26.000	11.000	1.124	4.771	4.243	351	30.000	3.000	0.265	0.933	3.512
312	26.000	12.000	0.266	1.771	6.654	352	30.000	4.000	1.054	6.281	5.951
313	27.000	1.000	2.073	8.894	4.288	353	30.000	5.000	8.018	9.194	0.536
314	27.000	2.000	1.990	9.774	4.911	354	30.000	6.000	28.718	16.088	-0.371
315	27.000	3.000	0.886	5.009	5.648	355	30.000	7.000	25.491	6.785	0.383
316	27.000	4.000	0.817	3.029	3.695	356	30.000	8.000	25.007	9.051	0.024
317	27.000	5.000	8.125	9.403	0.469	357	30.000	9.000	25.032	11.032	0.068
318	27.000	6.000	16.664	13.203	0.185	358	30.000	10.000	10.007	9.395	0.220
319	27.000	7.000	26.995	16.083	-0.192	359	30.000	11.000	1.247	7.147	5.731
320	27.000	8.000	21.542	12.352	-0.087	360	30.000	12.000	0.422	1.798	4.256
321	27.000	9.000	20.948	16.242	-0.077	361	31.000	1.000	0.323	1.034	3.165
322	27.000	10.000	8.719	9.160	0.293	362	31.000	2.000	0.464	1.643	3.522
323	27.000	11.000	0.393	1.448	3.679	363	31.000	3.000	1.106	4.771	4.312
324	27.000	12.000	0.766	4.932	6.434	364	31.000	4.000	5.724	6.298	0.106
325	28.000	1.000	1.986	8.478	4.264	365	31.000	5.000	9.165	6.411	0.235
326	28.000	2.000	0.360	1.730	4.793	366	31.000	6.000	21.868	11.479	0.128
327	28.000	3.000	1.443	5.877	4.069	367	31.000	7.000	28.238	8.797	0.364
328	28.000	4.000	2.435	10.373	4.258	368	31.000	8.000	23.444	10.276	-0.047
329	28.000	5.000	1.269	5.121	4.034	369	31.000	9.000	24.161	14.417	0.063
330	28.000	6.000	22.675	15.739	-0.037	370	31.000	10.000	12.250	10.922	0.190
331	28.000	7.000	33.388	18.177	-0.282	371	31.000	11.000	3.689	4.000	0.075
332	28.000	8.000	30.474	14.621	-0.239	372	31.000	12.000	0.931	3.521	3.773
333	28.000	9.000	24.144	13.805	-0.464	373	32.000	1.000	2.038	8.677	4.255
334	28.000	10.000	2.553	10.812	4.231	374	32.000	2.000	0.118	0.346	2.879

	Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma		Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma
375	32.000	3.000	2.260	9.642	4.264	415	35.000	7.000	21.077	12.521	-0.085
376	32.000	4.000	1.871	8.064	4.308	416	35.000	8.000	23.542	11.311	-0.262
377	32.000	5.000	8.267	7.624	0.250	417	35.000	9.000	20.192	12.675	0.135
378	32.000	6.000	19.572	13.026	-0.032	418	35.000	10.000	10.332	8.906	0.090
379	32.000	7.000	21.122	12.783	0.032	419	35.000	11.000	0.125	0.352	2.755
380	32.000	8.000	22.148	12.418	-0.072	420	35.000	12.000	0.275	0.884	3.181
381	32.000	9.000	19.409	11.604	-0.103	421	36.000	1.000	1.356	7.080	5.222
382	32.000	10.000	8.390	7.848	0.202	422	36.000	2.000	1.015	4.342	4.276
383	32.000	11.000	0.030	0.085	2.791	423	36.000	3.000	1.350	6.224	4.607
384	32.000	12.000	0.157	0.536	3.391	424	36.000	4.000	0.743	3.075	4.133
385	33.000	1.000	0.059	0.161	2.658	425	36.000	5.000	7.195	7.606	0.204
386	33.000	2.000	0.261	0.843	3.205	426	36.000	6.000	21.212	10.476	0.083
387	33.000	3.000	0.854	3.822	4.474	427	36.000	7.000	31.173	11.617	-0.000
388	33.000	4.000	0.356	1.194	3.329	428	36.000	8.000	30.508	14.015	-0.161
389	33.000	5.000	10.051	9.073	0.266	429	36.000	9.000	26.194	14.499	-0.520
390	33.000	6.000	24.274	12.947	-0.434	430	36.000	10.000	10.478	9.629	0.136
391	33.000	7.000	24.738	15.019	-0.074	431	36.000	11.000	1.015	5.353	5.270
392	33.000	8.000	23.019	13.100	0.109	432	36.000	12.000	2.031	9.658	4.754
393	33.000	9.000	24.724	16.110	-0.129	433	37.000	1.000	0.275	0.888	3.190
394	33.000	10.000	7.817	9.585	0.472	434	37.000	2.000	0.758	3.058	4.031
395	33.000	11.000	0.054	0.139	2.475	435	37.000	3.000	0.025	0.149	5.794
396	33.000	12.000	1.373	6.359	4.631	436	37.000	4.000	0.054	0.156	2.865
397	34.000	1.000	0.036	0.098	2.691	437	37.000	5.000	5.922	6.246	0.384
398	34.000	2.000	0.018	0.042	2.227	438	37.000	6.000	21.775	10.309	0.146
399	34.000	3.000	0.295	1.064	3.604	439	37.000	7.000	36.712	18.429	-0.346
400	34.000	4.000	0.504	2.133	4.231	440	37.000	8.000	27.271	12.760	-0.239
401	34.000	5.000	6.187	6.099	0.191	441	37.000	9.000	19.025	8.125	0.360
402	34.000	6.000	25.093	14.886	-0.189	442	37.000	10.000	8.948	9.527	-0.084
403	34.000	7.000	25.210	15.080	0.005	443	37.000	11.000	0.082	0.234	2.822
404	34.000	8.000	25.773	13.456	-0.213	444	37.000	12.000	0.060	0.174	2.847
405	34.000	9.000	25.338	14.190	-0.224	445	38.000	1.000	1.176	9.311	7.914
406	34.000	10.000	10.783	9.213	0.155	446	38.000	2.000	0.008	0.020	2.220
407	34.000	11.000	0.516	1.960	3.793	447	38.000	3.000	1.086	9.405	8.658
408	34.000	12.000	0.221	0.890	4.009	448	38.000	4.000	1.757	8.045	4.577
409	35.000	1.000	0.130	0.419	3.198	449	38.000	5.000	6.033	6.986	0.308
410	35.000	2.000	0.200	0.704	3.514	450	38.000	6.000	26.687	13.667	-0.059
411	35.000	3.000	1.384	5.836	4.214	451	38.000	7.000	30.388	13.866	-0.131
412	35.000	4.000	0.106	0.374	3.510	452	38.000	8.000	27.229	11.435	0.009
413	35.000	5.000	10.188	6.885	0.011	453	38.000	9.000	22.427	12.985	0.178
414	35.000	6.000	21.434	11.885	0.009	454	38.000	10.000	9.525	9.814	0.359

	Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma		Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma
455	38.000	11.000	0.034	0.085	2.407	495	42.000	3.000	1.122	5.356	4.774
456	38.000	12.000	0.836	4.305	5.148	496	42.000	4.000	0.829	3.158	3.807
457	39.000	1.000	0.471	2.214	4.691	497	42.000	5.000	10.281	8.722	0.178
458	39.000	2.000	0.599	2.204	3.667	498	42.000	6.000	17.601	11.399	0.060
459	39.000	3.000	0.070	0.206	2.896	499	42.000	7.000	16.793	12.985	0.059
460	39.000	4.000	0.550	1.954	3.535	500	42.000	8.000	15.848	12.161	0.045
461	39.000	5.000	9.062	7.926	0.252	501	42.000	9.000	14.831	12.433	-0.074
462	39.000	6.000	28.466	11.855	-0.237	502	42.000	10.000	5.895	7.047	0.556
463	39.000	7.000	26.232	8.683	-0.051	503	42.000	11.000	0.167	0.512	3.032
464	39.000	8.000	28.139	11.506	0.042	504	42.000	12.000	0.451	1.581	3.491
465	39.000	9.000	26.559	13.067	0.036	505	43.000	1.000	2.466	10.407	4.216
466	39.000	10.000	13.151	12.363	0.064	506	43.000	2.000	0.504	1.809	3.577
467	39.000	11.000	0.740	2.834	3.821	507	43.000	3.000	1.095	4.270	3.893
468	39.000	12.000	0.141	0.688	4.870	508	43.000	4.000	1.859	2.940	1.019
469	40.000	1.000	2.101	10.019	4.768	509	43.000	5.000	9.541	6.928	0.167
470	40.000	2.000	0.662	3.706	5.593	510	43.000	6.000	18.263	10.278	0.034
471	40.000	3.000	1.279	7.272	5.686	511	43.000	7.000	20.154	10.823	0.060
472	40.000	4.000	1.128	4.574	4.054	512	43.000	8.000	21.020	10.261	-0.161
473	40.000	5.000	9.946	9.573	0.265	513	43.000	9.000	22.656	14.175	-0.288
474	40.000	6.000	24.980	19.186	-0.137	514	43.000	10.000	9.581	9.138	0.160
475	40.000	7.000	27.728	19.564	-0.261	515	43.000	11.000	0.369	1.561	4.224
476	40.000	8.000	26.234	18.299	-0.452	516	43.000	12.000	0.439	1.566	3.550
477	40.000	9.000	23.404	16.812	-0.242	517	44.000	1.000	0.351	1.263	3.581
478	40.000	10.000	10.122	12.466	0.220	518	44.000	2.000	0.533	1.877	3.507
479	40.000	11.000	1.096	4.651	4.240	519	44.000	3.000	0.179	0.730	4.071
480	40.000	12.000	1.558	7.820	5.017	520	44.000	4.000	8.692	7.890	-0.163
481	41.000	1.000	2.315	10.216	4.411	521	44.000	5.000	14.329	8.578	0.192
482	41.000	2.000	0.492	1.860	3.776	522	44.000	6.000	22.379	11.960	0.092
483	41.000	3.000	1.438	8.066	5.610	523	44.000	7.000	25.079	12.130	-0.189
484	41.000	4.000	1.296	5.828	4.495	524	44.000	8.000	24.968	7.780	0.199
485	41.000	5.000	0.732	2.688	3.659	525	44.000	9.000	20.890	10.956	0.055
486	41.000	6.000	24.511	12.004	-0.086	526	44.000	10.000	7.534	8.536	0.524
487	41.000	7.000	26.028	7.798	0.424	527	44.000	11.000	2.022	2.736	0.669
488	41.000	8.000	24.398	9.426	-0.251	528	44.000	12.000	0.152	0.455	2.941
489	41.000	9.000	17.145	11.747	0.062	529	45.000	1.000	1.108	5.191	4.682
490	41.000	10.000	5.014	7.346	0.736	530	45.000	2.000	0.684	2.701	3.945
491	41.000	11.000	0.081	0.242	2.961	531	45.000	3.000	1.299	5.563	4.280
492	41.000	12.000	1.463	6.249	4.269	532	45.000	4.000	0.095	0.276	2.861
493	42.000	1.000	0.076	0.231	3.010	533	45.000	5.000	8.184	8.400	0.223
494	42.000	2.000	0.017	0.042	2.348	534	45.000	6.000	17.719	13.600	0.061

	Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma		Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma
535	45.000	7.000	13.524	10.601	0.092	575	48.000	11.000	2.175	2.849	0.619
536	45.000	8.000	12.585	9.038	0.155	576	48.000	12.000	0.062	0.164	2.555
537	45.000	9.000	14.652	13.542	0.143	577	49.000	1.000	1.155	4.591	3.969
538	45.000	10.000	6.020	6.634	0.356	578	49.000	2.000	0.065	0.193	2.917
539	45.000	11.000	0.249	1.208	4.848	579	49.000	3.000	1.227	5.369	4.373
540	45.000	12.000	1.448	5.924	4.086	580	49.000	4.000	1.723	7.698	4.465
541	46.000	1.000	2.064	8.525	4.125	581	49.000	5.000	7.862	7.068	0.190
542	46.000	2.000	0.063	0.172	2.643	582	49.000	6.000	15.368	12.825	-0.140
543	46.000	3.000	0.130	0.398	3.013	583	49.000	7.000	19.625	12.460	-0.035
544	46.000	4.000	3.129	3.904	0.593	584	49.000	8.000	17.049	8.789	0.329
545	46.000	5.000	8.486	6.789	0.048	585	49.000	9.000	13.529	12.980	0.005
546	46.000	6.000	25.913	11.835	0.054	586	49.000	10.000	0.773	3.005	3.881
547	46.000	7.000	28.053	8.960	0.157	587	49.000	11.000	0.987	6.868	6.957
548	46.000	8.000	29.344	14.200	-0.210	588	49.000	12.000	0.956	6.598	6.902
549	46.000	9.000	26.368	14.820	0.047	589	50.000	1.000	0.457	1.660	3.617
550	46.000	10.000	13.147	11.061	0.024	590	50.000	2.000	0.153	0.442	2.818
551	46.000	11.000	2.946	3.248	0.227	591	50.000	3.000	0.975	4.040	4.141
552	46.000	12.000	1.592	2.312	0.745	592	50.000	4.000	1.726	2.315	0.624
553	47.000	1.000	0.523	1.901	3.619	593	50.000	5.000	9.640	8.715	0.298
554	47.000	2.000	0.344	1.202	3.472	594	50.000	6.000	24.338	11.099	-0.378
555	47.000	3.000	1.359	5.260	3.862	595	50.000	7.000	25.296	11.222	-0.292
556	47.000	4.000	0.298	0.982	3.266	596	50.000	8.000	21.337	10.344	0.040
557	47.000	5.000	9.190	7.500	0.060	597	50.000	9.000	24.817	12.835	-0.017
558	47.000	6.000	30.124	10.510	-0.240	598	50.000	10.000	14.222	10.990	-0.184
559	47.000	7.000	27.286	9.055	0.316	599	50.000	11.000	3.156	3.391	0.425
560	47.000	8.000	28.865	12.845	-0.001	600	50.000	12.000	0.970	3.674	3.785
561	47.000	9.000	27.447	13.289	0.009	601	51.000	1.000	0.045	0.310	6.847
562	47.000	10.000	13.981	12.873	0.106	602	51.000	2.000	0.068	0.335	4.934
563	47.000	11.000	3.277	4.496	0.712	603	51.000	3.000	0.497	2.986	6.009
564	47.000	12.000	0.189	0.580	3.023	604	51.000	4.000	2.782	3.623	0.411
565	48.000	1.000	1.112	4.330	3.885	605	51.000	5.000	11.115	8.536	-0.026
566	48.000	2.000	0.278	1.519	5.436	606	51.000	6.000	22.149	11.539	-0.297
567	48.000	3.000	1.448	6.654	4.594	607	51.000	7.000	26.526	10.643	-0.217
568	48.000	4.000	1.001	3.951	3.941	608	51.000	8.000	25.889	8.712	-0.082
569	48.000	5.000	7.574	6.897	0.166	609	51.000	9.000	26.880	13.761	0.090
570	48.000	6.000	27.001	14.625	-0.109	610	51.000	10.000	15.387	11.737	-0.011
571	48.000	7.000	29.804	11.205	-0.002	611	51.000	11.000	2.911	4.025	0.660
572	48.000	8.000	30.327	11.719	-0.117	612	51.000	12.000	0.493	2.220	4.500
573	48.000	9.000	24.890	16.418	0.048	613	52.000	1.000	2.041	8.499	4.160
574	48.000	10.000	13.322	11.096	0.030	614	52.000	2.000	0.378	1.276	3.357

	Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma		Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma
615	52.000	3.000	0.230	0.841	3.649	655	55.000	7.000	24.659	8.313	-0.066
616	52.000	4.000	2.678	3.391	0.169	656	55.000	8.000	27.498	15.190	0.127
617	52.000	5.000	9.748	5.917	0.297	657	55.000	9.000	22.834	11.316	0.083
618	52.000	6.000	25.494	13.872	-0.026	658	55.000	10.000	10.037	9.553	0.293
619	52.000	7.000	28.159	13.043	-0.020	659	55.000	11.000	0.860	3.007	3.477
620	52.000	8.000	29.850	10.557	0.218	660	55.000	12.000	0.276	0.900	3.223
621	52.000	9.000	24.444	13.084	-0.024	661	56.000	1.000	1.455	6.254	4.295
622	52.000	10.000	10.771	10.539	-0.040	662	56.000	2.000	0.416	2.081	4.999
623	52.000	11.000	1.450	2.464	1.359	663	56.000	3.000	1.077	9.147	8.494
624	52.000	12.000	0.072	0.205	2.766	664	56.000	4.000	1.739	3.014	1.322
625	53.000	1.000	1.940	8.484	4.370	665	56.000	5.000	8.661	5.738	0.209
626	53.000	2.000	0.024	0.064	2.632	666	56.000	6.000	27.985	11.418	-0.328
627	53.000	3.000	0.054	0.141	2.481	667	56.000	7.000	42.166	11.405	-0.269
628	53.000	4.000	5.155	6.371	0.360	668	56.000	8.000	33.352	14.969	0.059
629	53.000	5.000	16.107	9.609	0.141	669	56.000	9.000	21.800	10.177	0.325
630	53.000	6.000	24.073	15.420	-0.155	670	56.000	10.000	13.935	13.135	0.144
631	53.000	7.000	20.021	13.322	-0.232	671	56.000	11.000	1.072	4.149	3.864
632	53.000	8.000	22.480	13.719	-0.168	672	56.000	12.000	1.607	7.280	4.528
633	53.000	9.000	21.357	13.948	0.060	673	57.000	1.000	1.852	8.192	4.419
634	53.000	10.000	8.684	9.229	0.516	674	57.000	2.000	0.038	0.098	2.451
635	53.000	11.000	1.467	7.565	5.156	675	57.000	3.000	0.160	0.534	3.321
636	53.000	12.000	1.005	4.060	4.034	676	57.000	4.000	6.394	6.600	-0.118
637	54.000	1.000	0.597	2.139	3.564	677	57.000	5.000	11.508	8.962	0.100
638	54.000	2.000	0.357	1.346	3.756	678	57.000	6.000	19.276	10.678	0.053
639	54.000	3.000	1.058	8.808	8.328	679	57.000	7.000	23.353	12.639	-0.045
640	54.000	4.000	1.344	5.282	3.922	680	57.000	8.000	25.081	11.177	-0.151
641	54.000	5.000	15.632	11.366	0.045	681	57.000	9.000	21.814	12.886	0.060
642	54.000	6.000	27.886	15.648	-0.217	682	57.000	10.000	9.207	9.264	0.465
643	54.000	7.000	31.800	21.233	-0.297	683	57.000	11.000	0.969	3.938	4.059
644	54.000	8.000	19.256	12.705	0.448	684	57.000	12.000	0.260	0.947	3.622
645	54.000	9.000	29.866	17.099	-0.117	685	58.000	1.000	2.416	10.253	4.239
646	54.000	10.000	9.796	9.572	0.376	686	58.000	2.000	1.131	4.638	4.097
647	54.000	11.000	1.084	4.114	3.784	687	58.000	3.000	0.513	1.880	3.648
648	54.000	12.000	0.126	0.404	3.177	688	58.000	4.000	0.224	1.043	4.635
649	55.000	1.000	1.435	7.022	4.894	689	58.000	5.000	6.469	7.033	0.053
650	55.000	2.000	0.017	0.041	2.367	690	58.000	6.000	26.233	14.556	-0.180
651	55.000	3.000	0.049	0.135	2.734	691	58.000	7.000	31.833	13.496	-0.024
652	55.000	4.000	0.302	1.002	3.290	692	58.000	8.000	32.786	13.355	0.021
653	55.000	5.000	10.108	6.979	0.009	693	58.000	9.000	30.000	17.450	-0.329
654	55.000	6.000	27.964	13.799	-0.311	694	58.000	10.000	1.971	8.086	4.097

	Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma		Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma
695	58.000	11.000	0.463	2.157	4.655	735	62.000	3.000	0.356	1.209	3.372
696	58.000	12.000	1.758	7.198	4.090	736	62.000	4.000	0.055	0.163	2.915
697	59.000	1.000	0.121	0.379	3.122	737	62.000	5.000	7.892	6.619	0.201
698	59.000	2.000	0.409	2.410	5.885	738	62.000	6.000	27.113	12.735	-0.001
699	59.000	3.000	0.953	4.160	4.364	739	62.000	7.000	31.222	13.385	0.063
700	59.000	4.000	0.553	1.952	3.512	740	62.000	8.000	29.504	13.141	0.023
701	59.000	5.000	7.608	7.636	0.136	741	62.000	9.000	26.422	14.861	-0.098
702	59.000	6.000	21.472	16.402	-0.003	742	62.000	10.000	13.245	11.183	0.046
703	59.000	7.000	23.376	14.772	-0.168	743	62.000	11.000	2.354	10.256	4.353
704	59.000	8.000	18.960	12.433	0.123	744	62.000	12.000	0.364	1.340	3.674
705	59.000	9.000	22.394	13.591	-0.201	745	63.000	1.000	1.170	5.104	4.359
706	59.000	10.000	6.346	7.310	0.430	746	63.000	2.000	0.631	2.404	3.802
707	59.000	11.000	0.842	3.225	3.825	747	63.000	3.000	1.267	6.156	4.860
708	59.000	12.000	1.410	5.685	4.026	748	63.000	4.000	0.175	0.535	3.017
709	60.000	1.000	0.514	1.176	2.131	749	63.000	5.000	7.568	8.885	0.386
710	60.000	2.000	0.973	4.595	4.720	750	63.000	6.000	24.296	8.742	0.035
711	60.000	3.000	0.608	2.824	4.642	751	63.000	7.000	32.350	11.152	-0.010
712	60.000	4.000	0.271	0.881	3.220	752	63.000	8.000	27.032	9.941	0.128
713	60.000	5.000	6.950	6.160	0.731	753	63.000	9.000	26.411	12.640	-0.003
714	60.000	6.000	30.446	13.009	0.138	754	63.000	10.000	12.968	10.442	-0.039
715	60.000	7.000	32.825	11.015	0.418	755	63.000	11.000	0.076	0.219	2.816
716	60.000	8.000	26.672	13.392	-0.151	756	63.000	12.000	1.081	5.199	4.807
717	60.000	9.000	24.191	15.055	0.015	757	64.000	1.000	1.320	6.306	4.776
718	60.000	10.000	13.284	10.791	-0.089	758	64.000	2.000	0.151	0.499	3.284
719	60.000	11.000	1.692	2.855	1.332	759	64.000	3.000	0.128	0.425	3.298
720	60.000	12.000	2.730	12.487	4.574	760	64.000	4.000	0.258	1.123	4.338
721	61.000	1.000	1.149	4.553	3.957	761	64.000	5.000	7.472	7.233	0.256
722	61.000	2.000	0.052	0.202	3.848	762	64.000	6.000	29.458	10.668	0.069
723	61.000	3.000	0.821	3.080	3.742	763	64.000	7.000	27.621	10.377	-0.062
724	61.000	4.000	0.230	0.725	3.120	764	64.000	8.000	24.674	10.594	0.005
725	61.000	5.000	7.035	6.395	0.150	765	64.000	9.000	25.995	12.622	-0.122
726	61.000	6.000	22.997	11.276	-0.032	766	64.000	10.000	6.160	7.144	0.625
727	61.000	7.000	28.088	12.912	0.160	767	64.000	11.000	0.160	0.514	3.175
728	61.000	8.000	28.401	11.038	-0.009	768	64.000	12.000	1.443	5.986	4.147
729	61.000	9.000	25.735	14.106	-0.098	769	65.000	1.000	0.791	2.901	3.653
730	61.000	10.000	12.182	9.439	0.019	770	65.000	2.000	0.706	3.257	4.615
731	61.000	11.000	0.414	1.550	3.737	771	65.000	3.000	0.858	5.988	6.971
732	61.000	12.000	0.414	1.540	3.716	772	65.000	4.000	0.156	0.827	5.296
733	62.000	1.000	1.234	7.262	5.882	773	65.000	5.000	7.444	7.767	0.435
734	62.000	2.000	0.422	1.506	3.555	774	65.000	6.000	24.888	13.225	0.010

	Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma		Estación	Mes	Loc.	Escala	Forma
775	65.000	7.000	35.244	11.588	0.665	802	67.000	10.000	8.649	9.364	0.277
776	65.000	8.000	25.244	11.928	0.125	803	67.000	11.000	0.399	1.415	3.532
777	65.000	9.000	23.960	15.781	0.099	804	67.000	12.000	0.380	1.375	3.607
778	65.000	10.000	16.873	12.081	-0.238	805	68.000	1.000	0.774	2.889	3.722
779	65.000	11.000	0.235	0.749	3.159	806	68.000	2.000	2.482	3.291	-0.487
780	65.000	12.000	1.397	5.512	3.939	807	68.000	3.000	0.862	4.068	4.717
781	66.000	1.000	1.829	7.578	4.143	808	68.000	4.000	3.071	14.656	4.772
782	66.000	2.000	0.799	3.666	4.588	809	68.000	5.000	6.636	7.926	0.023
783	66.000	3.000	0.382	1.417	3.703	810	68.000	6.000	13.924	16.937	0.313
784	66.000	4.000	1.540	2.355	1.069	811	68.000	7.000	21.939	13.865	-0.843
785	66.000	5.000	6.449	5.441	-0.115	812	68.000	8.000	13.155	12.919	-0.047
786	66.000	6.000	27.735	12.792	-0.004	813	68.000	9.000	19.576	11.608	0.180
787	66.000	7.000	30.035	14.314	-0.093	814	68.000	10.000	19.151	16.498	-0.363
788	66.000	8.000	24.334	9.207	0.255	815	68.000	11.000	7.325	7.308	-0.123
789	66.000	9.000	20.568	10.135	0.601	816	68.000	12.000	1.059	4.364	4.114
790	66.000	10.000	8.421	9.653	0.103	817	69.000	1.000	0.006	0.011	1.846
791	66.000	11.000	0.637	2.293	3.584	818	69.000	2.000	0.118	0.490	4.146
792	66.000	12.000	0.035	0.095	2.692	819	69.000	3.000	0.657	2.596	3.946
793	67.000	1.000	0.664	3.445	5.184	820	69.000	4.000	1.395	6.282	4.500
794	67.000	2.000	0.062	0.183	2.898	821	69.000	5.000	6.323	7.452	0.374
795	67.000	3.000	0.095	0.369	3.871	822	69.000	6.000	12.973	11.936	0.400
796	67.000	4.000	1.301	6.585	5.060	823	69.000	7.000	14.435	10.584	0.183
797	67.000	5.000	7.904	7.475	0.201	824	69.000	8.000	13.499	9.096	-0.527
798	67.000	6.000	19.676	9.602	-0.048	825	69.000	9.000	10.017	9.947	-0.198
799	67.000	7.000	27.937	15.424	-0.252	826	69.000	10.000	6.135	6.642	0.103
800	67.000	8.000	25.517	12.075	-0.150	827	69.000	11.000	1.420	5.656	3.978
801	67.000	9.000	22.190	16.263	-0.124	828	69.000	12.000	0.789	3.334	4.220

Apéndice C

Ejes de las elipses del modelo de Smith

	Eje 1	Eje 2		Eje 1	Eje 2
Enero (1)	30.95	0.39	Julio (1)	50.99	0.99
Enero (2)	11.71	1.03	Julio (2)	12.19	4.13
Febrero (1)	55.35	0.26	Agosto (1)	26.08	0.83
Febrero (2)	14.85	0.95	Agosto (2)	6.65	3.25
Marzo (1)	22.13	0.91	Septiembre (1)	37.73	1.40
Marzo (2)	30.40	0.67	Septiembre (2)	23.22	2.28
Abril (1)	5.66	0.62	Octubre (1)	17.68	0.77
Abril (2)	2.44	1.44	Octubre (2)	8.40	1.62
Mayo (1)	14.85	0.87	Noviembre (1)	8.82	0.30
Mayo (2)	11.41	1.13	Noviembre (2)	1.82	1.43
Junio (1)	49.66	1.62	Diciembre (1)	9.54	0.51
Junio (2)	37.70	2.13	Diciembre (2)	4.94	0.98

Dimensiones de los ejes

Bibliografía

- [1] Adler, R.J. (1981) The geometry of random fields, *John Wiley & Sons*.
- [2] Balakrishnan, N., Lai, C.D. (2009) Continuous bivariate distributions, *Springer*.
- [3] Castillo, E., Hadi, A.S., Balakrishnan, N., Sarábia, J.M., (2005) Extreme value and related models with applications in engineering and science, *John Wiley & Sons*.
- [4] Coles, S. (2002) An introduction to statistical modeling of extreme values, *Springer*.
- [5] Cressie, N. (1993) Statistics for spatial data, *John Wiley & Sons*
- [6] de Haan, L., Ferreira, A. (2006) Extreme value theory, an introduction, *Springer*.
- [7] Embrechts, P., Kluppelberg, C., Mikosch, T. (1997) Modelling extremal event for insurance and finance, *Springer-Verlag*.
- [8] Galambos, J. (1987) The asymptotic theory of extreme order statistics, *John Wiley & Sons*.
- [9] Gaeton, C., Guyon, X. (2008) Modélisation et statistique spatiales, *Springer*.
- [10] Kotz, S., Nadarajah, S. (2000) Extreme value distributions: theory and applications, *Imperial College Press*.
- [11] López-Quintero, F.(2010) Estudio de la distribución espacial de valores máximos para datos de lluvia, *Tesis de maestría, Maestría en Modelos Aleatorios, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas*.
- [12] Ribatet, Mathieu (2011) A User's Guide to the SpatialExtremes Package, *Chair of Statistics, École Polytechnique Fédérale de Lausanne*.

- [13] Schlather, M. (2002) Models for stationary max-stable random fields, *Extremes*, 33-44.
- [14] Smith, R. L. (1990) Max-stable processes and spatial extremes.
<http://www.stat.unc.edu/postscript/rs/spatex.pdf>