

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN
MATEMÁTICAS, A.C.



Dividendo óptimo en el modelo dual de
riesgo

Tesis que presenta

José Eduardo Martínez Sosa

para obtener el grado de

Maestro en ciencias con orientación en probabilidad y

estadística

Directora de la Tesis

Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska

Agradecimientos

Índice general

Introducción	5
1. Pago de dividendos en el modelo dual de riesgo	7
1.1. Preliminares	7
1.1.1. Instituciones de seguros, rentas vitalicias.	9
1.1.2. Empresas petroleras.	9
1.1.3. Industria farmacéutica.	10
1.2. Definiciones y propiedades básicas del modelo.	11
1.3. Cálculo de la función de valor cuando la distribución de los saltos es exponencial.	15
1.4. Cálculo de la función de valor cuando la distribución de los saltos es mezcla de exponenciales.	16
1.5. Nivel de barrera óptimo	19
1.6. Método alternativo	23
1.7. Método de transformadas de Laplace	25
1.8. Proceso de ingresos $S(t)$ es un subordinador.	26
1.9. Ejemplos numéricos.	31
2. Pago de dividendos en el modelo dual de riesgo perturbado por una difusión.	34
2.1. Preliminares	34
2.2. Estrategia de pago de dividendos y la función de valor	35
2.3. Cuando los ingresos tienen distribución mezcla de exponenciales.	37
2.4. Método de la transformada de Laplace.	38
2.5. Nivel de barrera óptimo	39

2.6. Proceso de saltos $S(t)$ un subordinador	40
2.7. Ejemplos numéricos.	42

Introducción

El interés actuarial por estudiar el capital de una compañía de seguros hizo del modelo clásico de riesgo una herramienta y objeto de estudio muy importante. Este modelo no sólo funciona en compañías de seguros, sino también en cualquier empresa cuyos gastos sean aleatorios y se considere un ingreso fijo, entre otros supuestos.

En este trabajo de tesis se estudia al modelo dual de riesgo, el cual busca modelar el comportamiento del capital en empresas que reconocen un gasto constante y tienen ingresos aleatorios. Los artículos en los cuales se basa este trabajo son Avanzi, Gerber y Shiu (2007) y Avanzi y Gerber (2008).

En el capítulo 1 se trabajará con el modelo dual de riesgo sin preturbar. En la sección 1.1 se encuentran definiciones y ejemplos que nos permiten conocer al modelo dual de riesgo y tres tipos de empresas donde puede ser usado. En la sección 1.2 se define la estrategia de barrera para el pago de dividendos y a la función de valor $V(u; b)$, la cual nos servirá para determinar preferencias sobre los niveles de barrera b . En esta misma sección encontramos el resultado principal del capítulo 1, en el Teorema 1.1, porque con base en este se caracteriza a la función de valor con una ecuación íntegro-diferencial. En las secciones 1.3 y 1.4 encontramos explícitamente a la función de valor $V(u; b)$ para el caso de que los ingresos se distribuyan exponencial o mezcla de exponenciales. En la sección 1.5 se dan fórmulas para el nivel de barrera óptimo en el caso de ingresos con distribución exponencial y se muestra una fórmula importante para hallar el nivel de barrera óptimo en casos más generales. La sección 1.6 ofrece un método alternativo para el cálculo de la función de valor en el caso de mezcla de exponenciales. En la sección 1.7 se usa la transformada de Laplace para poder

caracterizar a la función de valor. Con esto se ofrece la alternativa de encontrar a $V(u; b)$ usando fórmulas de inversión de la transformada de Laplace o métodos numéricos. En la sección 1.8 se generalizan los resultados de las secciones 1.2 y 1.7 considerando un proceso de ingresos más general, siendo éste un subordinador y no un proceso Poisson compuesto. En la sección 1.9 se calculan los niveles de barrera óptimo para tres distribuciones mezcla de exponenciales y se analiza lo observado.

En el capítulo 2 se estudia al modelo dual de riesgo perturbado por una difusión. En este capítulo se generalizan algunos resultados obtenidos en el capítulo 1. En las secciones 2.1 y 2.2 se define al modelo dual de riesgo, el proceso de dividendos y se obtiene de nuevo una ecuación íntegro-diferencial que nos será de utilidad para conocer a la función de valor $V(u; b)$. La sección 2.3 trata el caso cuando los ingresos tienen distribución mezcla de exponenciales, obteniendo para este caso la función de valor $V(u; b)$ de manera explícita. En la sección 2.4 se explica el método de la transformada de Laplace para caracterizar a $V(u; b)$, como se vió en la sección 1.7. La sección 2.5 halla una fórmula muy importante para la función de valor $V(u; b)$ evaluada en el nivel de barrera óptimo b^* . Esto se usa en el método de la transformada de Laplace como condición de frontera para poder hallar el valor de b^* . En la sección 2.6 se considera el modelo dual de riesgo cuando el proceso de ganancias $S(t)$ es un subordinador. Esto generaliza lo encontrado en la sección 1.8 para el caso con el modelo perturbado. En la sección 2.7 se presentan ejemplos numéricos utilizando el método de la transformada de Laplace y usando los resultados de la sección 2.3.

El interés de este trabajo es presentar resultados que nos permitan conocer de manera tanto exacta como aproximada al nivel de barrera óptimo b^* en el modelo dual de riesgo con y sin perturbación.

Capítulo 1

Pago de dividendos en el modelo dual de riesgo

1.1. Preliminares

En este trabajo es de interés estudiar el desarrollo del capital de cierto tipo de compañías considerando una estrategia de pago de dividendos. La finalidad es maximizar de alguna manera el dividendo que los accionistas perciben durante toda la vida de la compañía.

Supongamos que la compañía tiene un capital inicial aportado por un grupo de accionistas y un gasto constante conocido que se paga de manera continua, el cual es interpretado como la consecuencia de pagar nómina, renta, proveedores, etc. También supondremos que los ingresos en la empresa son aleatorios tanto en tiempo de aparición como en monto. Más adelante se darán ejemplos sobre empresas que presentan estas cualidades. Entonces, sin considerar aún una estrategia de pago de dividendos, el capital de la empresa es regido por una parte determinista, en el capital inicial y el gasto en el tiempo, y por una parte aleatoria, en los ingresos.

Para modelar los ingresos supondremos que siguen un proceso de Poisson compuesto $S(t)$ definido de la siguiente manera:

Definición 1.1 Sean $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias positivas independientes e idénticamente distribuidas con distribución común $P(y)$. Sea $N(t), t \geq 0$ un proceso de Poisson con tasa λ . Definimos al proceso Poisson compuesto $S(t)$ como:

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i & \text{si } N(t) > 0; \\ 0 & \text{si } N(t) = 0. \end{cases}$$

Llamaremos a este proceso $S(t)$ como el proceso de ingresos. Considerando los supuestos anteriores, se tiene la siguiente definición del modelo dual de riesgo.

Definición 1.2 El proceso $\{U(t), t \geq 0\}$ representa al capital al tiempo t , definido como:

$$U(t) = u - ct + S(t), \tag{1.1}$$

donde:

- u capital inicial,
- c gasto por unidad de tiempo,
- $S(t)$ proceso de ingresos de la definición anterior.

A este modelo se le conoce como el proceso dual de riesgo.

En adelante, a lo largo de este trabajo se considerará que

$$\mu = \mathbb{E}[S(1)] - c = \lambda \int_0^{\infty} yp(y)dy - c > 0. \tag{1.2}$$

Esto significa que el valor esperado de $U(t+1) - U(t)$ es estrictamente positivo. Se considera de esta manera porque al constituirse una empresa se espera que el capital vaya aumentando, y la condición (1.2) representa este hecho. En lo consecuente se dan ejemplos donde se usa el modelo dual de riesgo.

1.1.1. Instituciones de seguros, rentas vitalicias.

En la dinámica general del sector asegurador intervienen dos entes, el cliente y la institución aseguradora. Cuando el cliente reconoce un riesgo que amenaza un estado cómodo para él en términos financieros, y existe una institución aseguradora con un producto que cubre total o parcialmente las necesidades del cliente, entonces se conviene el pago de una prima por parte del cliente, a cambio de obtener una protección total o parcial del impacto financiero proveniente del riesgo en discusión.

En el ramo de seguros de vida, se tiene una serie de productos conocidos como rentas vitalicias. Después de una prolongada etapa de trabajo lo que se desea es descansar y disponer de una pensión que otorgue tranquilidad financiera. La renta vitalicia es un seguro en convenio con una compañía de seguros, el cual ofrece una modalidad de jubilación y garantiza una renta periódica que se mantiene fija durante la vida del asegurado.

En este caso, el cliente se cubre del riesgo de no tener dinero en su futuro al gozar con una renta de manera periódica por el resto de su vida, y la institución aseguradora recibe el capital constitutivo considerando monto, periodo y la información del cliente. Al momento del fallecimiento del cliente, se considera al capital constitutivo no devengado como ganancia para la institución.

El modelo dual de riesgo da la posibilidad de interpretar el parámetro u como un presupuesto inicial con el que cuenta el área de rentas vitalicias dentro de una compañía de seguros. El gasto por unidad de tiempo c se interpreta como la ponderación de todos aquellos gastos tales como nómina, infraestructura y misceláneos. Como el tiempo de defunción y el monto de capital constitutivo no devengado son no conocidos, se consideran aleatorios y se modelan con el proceso Poisson compuesto $S(t)$.

1.1.2. Empresas petroleras.

En el mercado petrolero interactúan diferentes entes, tales como los países productores, países consumidores y las empresas petroleras. Estas últimas tienen la oportunidad de intervenir en una o más de las siguientes fases: exploración, perforación, extracción, almacenamiento, transporte, refinación y distribución. Considerando una empresa que se desenvuelva en al menos las primeras

tres fases, por tener un gasto conocido en la inversión de la exploración y por la naturaleza de lo aleatorio al encontrar yacimientos petroleros, es posible usar el modelo dual de riesgo de la siguiente manera:

- u es el capital inicial,
- c es la tasa de gasto derivado de la nómina de los trabajadores y administrativos, costos de materiales y misceláneos,
- $S(t)$ representa el ingreso aleatorio en tiempo y monto. Aleatorio en tiempo por que no se sabe cuánto se demora el proceso de exploración en encontrar un yacimiento petrolero y en monto porque se desconoce la cantidad de petróleo que se va a encontrar y el precio que tendrá.

Es importante tener en cuenta que los ingresos Y_i de cada yacimiento encontrado se contabilizan en valor presente porque no es un ingreso inmediato. Esto es para a todo proceso de perforación, extracción, y comercialización.

1.1.3. Industria farmacéutica.

El sector empresarial de la industria farmacéutica se dedica a la fabricación, preparación y comercialización de productos para la prevención y tratamiento de enfermedades. Este tipo de empresas desarrollan tareas tales como la producción de agentes activos, fármacos dosificados e investigación y desarrollo.

Considerando empresas que desempeñen esta última labor, se tiene un esquema determinista en cuestión de nómina y gastos materiales dirigidos a la investigación y desarrollo de nuevos y mejores medicamentos. Como no se conoce el tiempo de desarrollo para un medicamento y tampoco el valor de la patente de este, esta información se considera aleatoria. Por estas razones, se usa el modelo dual de riesgo para modelar el capital de la empresa de la siguiente manera:

- u representa el presupuesto inicial con el que cuenta el departamento de investigación y desarrollo,
- c es el gasto contemplado para los proyectos. Incluye costos materiales y humanos,

- $S(t)$ son los ingresos provenientes de cada producto desarrollado y vendido. El valor de Y_i representa el valor presente del producto o el costo por la venta de la patente, según sea el caso.

1.2. Definiciones y propiedades básicas del modelo.

Siendo el problema de interés en este trabajo el estudiar el desarrollo de un capital respecto al tiempo considerando el pago de dividendos, es necesario definir la estrategia de pago de dividendos que estudiaremos y al dividendo de acuerdo a la estrategia escogida.

Una estrategia de barrera con parámetro b , llamado nivel de barrera o umbral, es aquella en la que el pago de dividendos se realiza inmediatamente después de que el capital haya alcanzado el umbral b y el monto del dividendo es igual al excedente del capital sobre el nivel de barrera b . De manera formal, se tiene la siguiente definición de dividendo bajo una estrategia de barrera con parámetro b .

Definición 1.3 Considerando a $u - ct + S(t)$ como el capital al tiempo t sin considerar pago de dividendos, se define el dividendo al tiempo t como:

$$D(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} (u - c\tau + S(\tau) - b)_+ \quad (1.3)$$

Una vez definido el proceso de dividendos relacionado con el capital $U(t)$, se define al modelo dual de riesgo con pago de dividendos de la siguiente manera:

Definición 1.4 Considerando una estrategia de barrera para el pago de dividendos en el modelo dual de riesgo, se tiene a $U(t)$ como el capital al tiempo t determinado como:

$$U(t) = u - ct + S(t) - D(t). \quad (1.4)$$

Entendiendo que los dividendos serán pagados a los accionistas durante la vida de la compañía, es decir, hasta el tiempo de ruina, considerando el evento ruina como alcanzar un capital estrictamente negativo en algún tiempo finito, se tiene la siguiente definición para el tiempo de ruina T .

Definición 1.5 Consideramos al capital $U(t)$ como en la definición anterior. Se llama tiempo de ruina T al instante en el que el capital $U(t)$ es negativo por primera vez, es decir:

$$T = \begin{cases} \inf \{t \geq 0 | U(t) < 0\} & \text{si } U(t) < 0 \text{ para algún } t > 0, \\ \infty & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Ahora, estudiando la estrategia de barrera definida anteriormente, se define la función de valor.

Definición 1.6 Se define a la función de valor de la estrategia de barrera con umbral b de la siguiente manera:

$$V(u; b) = \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta t} dD(t) \right], \quad (1.5)$$

donde T es el tiempo de ruina y δ constante dada llamada tasa de interés.

La función de valor es el valor esperado del valor presente de todos los dividendos pagados hasta que la ruina ocurra. De esta manera, el **problema** planteado desde el principio de este trabajo se reduce a elegir el parámetro de umbral b que maximice la función de valor, es decir, maximice la percepción promedio de los accionistas.

Para obtener la función de valor para un b dado y calcular el umbral b^* tal que maximiza $V(u; b)$ como función de b , primero estudiamos a la función de valor. Teniendo en cuenta que el proceso dual de riesgo disminuye inmediatamente después de iniciar, entonces se tiene que para capital inicial $u = 0$, el tiempo de ruina T es igual a cero con probabilidad 1, y de la definición de la función de valor es inmediato que para todo $b > 0$,

$$V(0; b) = 0. \quad (1.6)$$

Debido a la dinámica de la estrategia de pago de dividendos, se tiene que si el capital inicial u está por encima del umbral b , entonces inmediatamente se paga el excedente $u - b$ como dividendo y el capital inicial bajo el cual se calculará la función de valor será b . De aquí que,

$$V(u; b) = u - b + V(b; b), \text{ para } u > b. \quad (1.7)$$

Ahora, el teorema principal del primer capítulo, es el siguiente:

Teorema 1.1 Para $0 \leq u \leq b$, la función de valor $V(u; b)$ satisface la siguiente ecuación íntegro diferencial:

$$cV'(u; b) + (\lambda + \delta)V(u; b) - \lambda \int_0^{b-u} V(u+y; b)p(y)dy - \lambda \int_{b-u}^{\infty} (u-b+y)p(y)dy - \lambda V(b; b)[1 - P(b-u)] = 0. \quad (1.8)$$

Demostración

Para probar esto, se considera un tiempo τ pequeño tal que $u - c\tau > 0$. Entonces, condicionando al tiempo τ ,

$$\begin{aligned} V(u; b) &= \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta s} dD(s) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta s} dD(s), T_1 \leq \tau \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta t} dD(t), T_1 > \tau \right] \\ &= \int_0^\tau \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta s} dD(s) | T_1 \in dt \right] P[T_1 = t] + \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta t} dD(t), T_1 > \tau \right] \\ &= \int_0^\tau \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta s} dD(s) | T_1 = t \right] dt + \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta t} dD(t) | T_1 > \tau \right] P[T_1 > \tau] \\ &= \int_0^\tau \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta s} dD(s) | T_1 = t, Y_1 = y \right] p(y) dy dt + V(u - c\tau; b) e^{-(\delta + \lambda)\tau} \\ &= \int_0^\tau \lambda e^{-(\lambda + \delta)t} \int_0^\infty V(u - ct + y; b) p(y) dy dt + V(u - c\tau; b) e^{-(\delta + \lambda)\tau}. \end{aligned}$$

Ahora, restando $V(u - c\tau)$ y dividiendo entre $c\tau$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{V(u; b) - V(u - c\tau; b)}{c\tau} &= \frac{\int_0^\tau \lambda e^{-(\lambda + \delta)t} \int_0^\infty V(u - ct + y; b) p(y) dy dt}{c\tau} + \frac{V(u - c\tau; b)(e^{-(\delta + \lambda)\tau} - 1)}{c\tau} \\ &= \frac{\lambda}{c\tau} \int_0^\tau e^{-(\lambda + \delta)t} \int_0^\infty V(u - ct + y; b) p(y) dy dt + V(u - c\tau; b) \frac{(e^{-(\delta + \lambda)\tau} - 1)}{c\tau}. \end{aligned}$$

Haciendo $\tau \rightarrow 0$, multiplicando todo por c y evaluando en $\tau = 0$, se obtiene

$$cV'(u; b) = \lambda \int_0^\infty V(u + y; b) p(y) dy - (\delta + \lambda)V(u; b). \quad (1.9)$$

Escribiendo la integral como la suma de 0 a $b - u$ y de $b - u$ a ∞ y usando (1.7) tenemos

$$\begin{aligned}
 cV'(u; b) &= \lambda \int_0^{b-u} V(u+y; b)p(y)dy + \lambda \int_{b-u}^{\infty} (u+y-b+V(b; b))p(y)dy - (\delta + \lambda)V(u; b) \\
 &= \lambda \int_0^{b-u} V(u+y; b)p(y)dy + \lambda \int_{b-u}^{\infty} (u+y-b)p(y)dy + V(b; b) \int_{b-u}^{\infty} p(y)dy - (\delta + \lambda)V(u; b) \\
 &= \lambda \int_0^{b-u} V(u+y; b)p(y)dy + \lambda \int_{b-u}^{\infty} (u+y-b)p(y)dy + V(b; b)[1 - P(b-u)] - (\delta + \lambda)V(u; b) .
 \end{aligned}$$

Despejando se obtiene (1.8).

□

El siguiente corolario nos permite tener una ecuación equivalente a la anterior y será la que utilizaremos en lo consecuente del trabajo.

Corolario 1.1 *Para todo $u < b$, la función de valor $V(u; b)$ cumple que*

$$cV'(u; b) + (\lambda + \delta)V(u; b) - \lambda \int_u^b V(x; b)p(x-u)dx - \lambda \int_{b-u}^{\infty} [1 - P(y)]dy - \lambda V(b; b)[1 - P(b-u)] = 0 . \tag{1.10}$$

Demostración

Usando el cambio de variable $x = u + y$, obtenemos

$$-\lambda \int_0^{b-u} V(u+y; b)p(y)dy = -\lambda \int_u^b V(x; b)p(x-u)dx .$$

Ahora, por el teorema de Fubini y usando que $1 - P(y) = \int_y^{\infty} p(x)dx$,

$$\lambda \int_{b-u}^{\infty} (u-b+y)p(y)dy = -\lambda \int_{b-u}^{\infty} [1 - P(y)]dy .$$

Por último, sustituyendo estas expresiones en (1.8), se obtiene el resultado.

□

1.3. Cálculo de la función de valor cuando la distribución de los saltos es exponencial.

En esta parte del trabajo se encuentra de manera explícita la función de valor $V(u; b)$ cuando $p(y)$ es de la forma

$$p(y) = \beta e^{-\beta y}, \quad y > 0. \quad (1.11)$$

Teorema 1.2 Si la distribución de los saltos en el modelo dual de riesgo es de la forma (1.11), entonces la función de valor es

$$V(u; b) = \frac{\lambda}{\beta} \frac{e^{ru} - e^{su}}{(cr + \delta)e^{rb} - (cs + \delta)e^{sb}} \quad 0 \leq u \leq b, \quad (1.12)$$

donde r y s son las raíces de

$$c\xi^2 + (\lambda + \delta - \beta c)\xi - \beta\delta = 0. \quad (1.13)$$

Demostración

Primero usamos la forma de $p(y)$ sustituyendo en (1.10), obtenemos

$$\begin{aligned} & cV'(u; b) + (\lambda + \delta)V(u; b) - \lambda \int_u^b V(x; b)\beta e^{-\beta(x-u)} dx - \lambda \int_{b-u}^{\infty} e^{-\beta y} dy - \lambda V(b; b)e^{-\beta(b-u)} \\ &= cV'(u; b) + (\lambda + \delta)V(u; b) - \lambda\beta e^{\beta u} \int_u^b V(x; b)e^{-\beta x} dx - \frac{\lambda}{\beta} \int_{b-u}^{\infty} \beta e^{-\beta y} dy - \lambda V(b; b)e^{-\beta(b-u)} \\ &= cV'(u; b) + (\lambda + \delta)V(u; b) - \lambda\beta e^{\beta u} \int_u^b V(x; b)e^{-\beta x} dx - \frac{\lambda}{\beta} e^{-\beta(b-u)} - \lambda V(b; b)e^{-\beta(b-u)} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ahora, derivando a (1.14) respecto a u de la misma manera que en la sección anterior, se tiene

$$\begin{aligned} & cV''(u; b) + (\lambda + \delta)V'(u; b) - \lambda\beta^2 e^{\beta u} \int_u^b V(x; b)e^{-\beta x} dx + \lambda\beta V(u; b) - \lambda e^{-\beta(b-u)} - \lambda\beta V(b; b)e^{-\beta(b-u)} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Multiplicando (1.14) por $-\beta$ y sumando a (1.15) obtenemos la siguiente ecuación diferencial homogénea de segundo orden.

$$cV''(u; b) + (\lambda + \delta - \beta c)V'(u; b) - \beta\delta V(u; b) = 0 .$$

Usando (1.6) para las condiciones iniciales y Braun [6] se sigue que

$$V(u; b) = k(e^{ru} - e^{su}), \quad 0 \leq u \leq b , \quad (1.16)$$

donde r y s son soluciones de la ecuación característica

$$c\xi^2 + (\lambda + \delta - \beta c)\xi - \beta\delta = 0 . \quad (1.17)$$

Para determinar el valor de k , se sustituye (1.16) en (1.14) con $u = b$:

$$\begin{aligned} & ck(re^{rb} - se^{sb}) + (\lambda + \delta)k(e^{rb} - e^{sb}) - \lambda\beta e^{\beta b} \int_b^b k(e^{rx} - e^{sx})e^{-\beta x} dx - \frac{\lambda}{\beta} e^{-\beta(b-b)} - \lambda k(e^{rb} - e^{sb})e^{-\beta(b-b)} \\ & = ck(re^{rb} - se^{sb}) + (\lambda + \delta)k(e^{rb} - e^{sb}) - \frac{\lambda}{\beta} - \lambda k(e^{rb} - e^{sb}) \\ & = 0 . \end{aligned} \quad (1.18)$$

Despejando k en (1.18) se concluye el teorema.

□

1.4. Cálculo de la función de valor cuando la distribución de los saltos es mezcla de exponenciales.

Ahora estudiamos el caso en que las ganancias tienen una distribución que es mezcla de exponenciales, es decir,

$$p(y) = \sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{-\beta_i y}, \quad y > 0 \quad (1.19)$$

donde $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n$, $A_i > 0$ y $A_1 + \dots + A_n = 1$.

Teorema 1.3 Si la distribución de los saltos en el modelo dual de riesgo es de la forma (1.19), entonces la función de valor es

$$V(u; b) = \sum_{k=0}^n C_k e^{r_k u}, \quad 0 \leq u \leq b,$$

donde los coeficientes C_k dependen de b y son la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_k \frac{r_k}{\beta_i - r_k} e^{r_k b} &= \frac{1}{\beta_i}, \quad i = 1, \dots, n. \\ \sum_{k=0}^n C_k &= 0, \end{aligned}$$

y las constantes r_k se determinan por el sistema de ecuaciones

$$cr_k + (\lambda + \delta) - \lambda \sum_{i=1}^n A_i \frac{\beta_i}{\beta_i - r_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Demostración

Usando la forma de $p(y)$ en (1.19) y sustituyendo en (1.10)

$$\begin{aligned} &cV'(u; b) + (\lambda + \delta)V(u; b) - \lambda \int_u^b V(x; b) \sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{-\beta_i(x-u)} dx - \lambda \int_{b-u}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n A_i e^{-\beta_i y} \right] dy - \lambda V(b; b) \left[\sum_{i=1}^n A_i e^{-\beta_i(b-u)} \right] \\ &= cV'(u; b) + (\lambda + \delta)V(u; b) - \lambda \sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{\beta_i u} \int_u^b V(x; b) e^{-\beta_i x} dx - \lambda \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\beta_i} \int_{b-u}^{\infty} \beta_i e^{-\beta_i y} dy - \lambda V(b; b) \sum_{i=1}^n A_i e^{-\beta_i(b-u)} \\ &= cV'(u; b) + (\lambda + \delta)V(u; b) - \lambda \sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{\beta_i u} \int_u^b V(x; b) e^{-\beta_i x} dx - \lambda \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\beta_i} e^{-\beta_i(b-u)} - \lambda V(b; b) \sum_{i=1}^n A_i e^{-\beta_i(b-u)} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

De manera análoga a la sección anterior, usamos la ecuación (1.20) para derivarla respecto a u y despues restarle ella misma multiplicada por β_i . Al resultado le hacemos lo mismo y repetimos hasta que se hallan usado todas las β 's. El resultado es una ecuación diferencial homogenea de orden $n + 1$ para la función de valor $V(u; b)$. Por lo tanto $V(u; b)$ es de la forma

$$V(u; b) = \sum_{k=0}^n C_k e^{r_k u}, \quad 0 \leq u \leq b, \quad (1.21)$$

Para obtener los coeficientes C_k y r_k , sustituimos (1.21) en (1.20)

$$\begin{aligned} c \sum_{k=0}^n C_k r_k e^{r_k u} + (\lambda + \delta) \sum_{k=0}^n C_k e^{r_k u} - \lambda \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^n C_k A_i \frac{\beta_i}{\beta_i - r_k} (e^{r_k u} - e^{r_k b - \beta_i(b-u)}) \\ - \lambda \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\beta_i} e^{-\beta_i(b-u)} - \lambda V(b; b) \sum_{i=1}^n A_i e^{-\beta_i(b-u)} \\ = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Como esta ecuación debe cumplirse para toda $u \in [0, b]$, entonces los coeficientes de $e^{r_k u}$ deben ser nulos. Esto implica que r_k cumplen

$$c r_k + (\lambda + \delta) - \lambda \sum_{i=1}^n A_i \frac{\beta_i}{\beta_i - r_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.23)$$

Definimos la función $f(\xi)$ de la siguiente manera:

$$f(\xi) = c\xi + (\lambda + \delta) - \lambda \sum_{i=1}^n A_i \frac{\beta_i}{\beta_i - \xi} = \sum_{i=1}^n A_i \left(c\xi - \frac{\lambda\beta_i}{\beta_i - \xi} \right) + (\lambda + \delta). \quad (1.24)$$

Entonces r_0, r_1, \dots, r_n son las $n + 1$ raíces reales de $f(\xi)$, y ellas cumplen

$$r_0 < 0 < r_1 < \beta_1 < \dots < r_n < \beta_n. \quad (1.25)$$

Esto puede verse usando la continuidad de $f(\xi)$ y calculando los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} f(\xi) &= \sum_{i=1}^n A_i \left(\lim_{\xi \rightarrow -\infty} c\xi - \frac{\lambda\beta_i}{\beta_i - \xi} \right) + (\lambda + \delta) = -\infty \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi) &= \sum_{i=1}^n A_i \left(\lim_{\xi \rightarrow 0} c\xi - \frac{\lambda\beta_i}{\beta_i - \xi} \right) + (\lambda + \delta) = \sum_{i=1}^n A_i \left(-\frac{\lambda\beta_i}{\beta_i} \right) + (\lambda + \delta) = \delta > 0 \\ \lim_{\xi \uparrow \beta_i} f(\xi) &= \sum_{i=1}^n A_i \left(\lim_{\xi \uparrow \beta_i} c\xi - \frac{\lambda\beta_i}{\beta_i - \xi} \right) + (\lambda + \delta) = -\infty \\ \lim_{\xi \downarrow \beta_i} f(\xi) &= \sum_{i=1}^n A_i \left(\lim_{\xi \downarrow \beta_i} c\xi - \frac{\lambda\beta_i}{\beta_i - \xi} \right) + (\lambda + \delta) = \infty \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} f(\xi) &= \sum_{i=1}^n A_i \left(\lim_{\xi \rightarrow \infty} c\xi - \frac{\lambda\beta_i}{\beta_i - \xi} \right) + (\lambda + \delta) = \infty. \end{aligned}$$

Ahora calcularemos los coeficientes C_k , $k = 0, 1, \dots, n$. De la condición (1.6) y el hecho que (1.22) debe cumplirse para toda u , se tiene que los coeficientes de la función $\lambda A_i e^{-\beta_i(b-u)}$ deben ser iguales a cero, lo que da lugar al siguiente sistema de $n + 1$ ecuaciones que cumplen C_k :

$$\sum_{k=0}^n C_k \frac{r_k}{\beta_i - r_k} e^{r_k b} = \frac{1}{\beta_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.26)$$

$$\sum_{k=0}^n C_k = 0, \quad (1.27)$$

de donde determinaremos los coeficientes C_0, C_1, \dots, C_n .

□

Este resultado es muy importante porque el modelo dual de riesgo utiliza variables aleatorias Y_i no negativas que representan los ingresos y como la familia de distribuciones de me (ver Dufresne [7]), aproximan la distribución de Y_i . Dufresne ([7]) presenta dos métodos para obtener estas aproximaciones, uno basado en la expansión polinomial de Jacobi y el otro en la distribución logbeta.

1.5. Nivel de barrera óptimo

En esta sección discutiremos sobre como obtener la función de valor $V(u; b)$ en el caso que $p(y)$ permite la existencia del nivel de barrera óptimo b^* , el cual maximiza a $V(u; b)$ para cualquier

valor de u . Esto puede verse en la Figura (1.1). En este ejemplo, se tiene el supuesto (1.11) y se usa la fórmula (1.12).

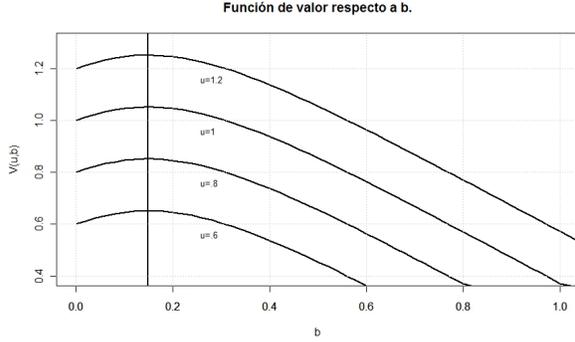


Figura 1.1: $V(u;b)$ como función de b con $u = 0.6, 0.8, 1, 1.2$. $\lambda = \delta = ,1, \beta = 2, c = ,03$

En este caso, de la sección 3 se tiene la fórmula de la función de valor $V(u;b)$, y se puede encontrar de manera analítica el parámetro b^* .

Teorema 1.4 *En el modelo dual de riesgo con distribución de saltos exponencial, de la forma $p(y) = \beta e^{-\beta y}$, el nivel de barrera óptimo b^* es de la forma*

$$b^* = \frac{1}{r-s} \ln \left(\frac{s(cs + \delta)}{r(cr + \delta)} \right). \quad (1.28)$$

donde r y s son las raíces de la ecuación característica (1.13).

Demostración

Como la ecuación característica (1.13) no depende de b , entonces para maximizar (1.12) respecto a b basta minimizar la función

$$h(b) = (cr + \delta)e^{rb} - (cs + \delta)e^{sb}.$$

Derivando con respecto a b e igualando a 0, se obtiene

$$h'(b^*) = (cr + \delta)re^{rb^*} - (cs + \delta)se^{sb^*} = 0 ,$$

de donde despejando b^* , se concluye que:

$$b^* = \frac{1}{r-s} \ln \left(\frac{s(cs + \delta)}{r(cr + \delta)} \right).$$

Para ver que efectivamente se trata de un mínimo, vemos que la segunda derivada de h es:

$$\begin{aligned} h''(b^*) &= (cr + \delta)r^2e^{rb^*} - (cs + \delta)s^2e^{sb^*} \\ &= (cr + \delta)r^2e^{r \frac{1}{r-s} \ln \left(\frac{s(cs + \delta)}{r(cr + \delta)} \right)} - (cs + \delta)s^2e^{s \frac{1}{r-s} \ln \left(\frac{s(cs + \delta)}{r(cr + \delta)} \right)} \\ &= (cr + \delta)r^2 \ln \left(\frac{s(cs + \delta)}{r(cr + \delta)} \right)^{\frac{r}{r-s}} - (cs + \delta)s^2 \ln \left(\frac{s(cs + \delta)}{r(cr + \delta)} \right)^{\frac{s}{r-s}} \\ &= (r-s) \left(\frac{(s(cs + \delta))^{\frac{r}{r-s}}}{(r(cr + \delta))^{\frac{s}{r-s}}} \right). \end{aligned}$$

Usando que $s < 0 < r$ (esto es así porque los límites calculados en la sección 4), tenemos que $h''(b^*) > 0$, lo que indica que b^* es un mínimo para h .

□

Corolario 1.2 *Bajo las mismas condiciones del teorema anterior, una fórmula equivalente para el nivel de barrera óptimo b^* es*

$$b^* = \frac{1}{r-s} \ln \left(\frac{\delta - \mu s}{\delta - \mu r} \right). \quad (1.29)$$

Demostración

Usando (1.2) se tiene que $c = \frac{\lambda}{\beta} - \mu$, sustituyendo en (1.13) obtenemos que r y s cumplen

$$\begin{aligned} \xi(c\xi + \delta) &= \xi(\beta c - \lambda) + \beta\delta \\ &= \beta\delta + \beta c\xi - \lambda\xi \\ &= \beta\delta + \beta \left(\frac{\lambda}{\beta} - \mu \right) \xi - \lambda\xi \\ &= \beta\delta + \lambda\xi - \mu\beta\xi - \lambda\xi \\ &= \beta(\delta - \mu\xi), \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo en (1.28), se obtiene el resultado.

□

En el caso general de $p(y)$, no se tiene una forma explícita para $V(u; b)$ y b^* . Una forma de estimar b^* es aproximando la distribución $p(y)$ con una mezcla de exponenciales y usando el teorema 4.1 .

Más adelante se desarrollará un método considerando la siguiente fórmula

$$V(b^*; b^*) = \frac{\mu}{\delta}. \quad (1.30)$$

Para demostrar que esto es cierto, primero se tiene por definición de b^* ,

$$\left. \frac{\partial V(u; b)}{\partial b} \right|_{b=b^*} \equiv 0, \quad (1.31)$$

lo cual implica que

$$\left. \frac{dV(b, b)}{db} \right|_{b=b^*} = V'(b^* -; b^*), \quad (1.32)$$

donde $V'(b^* -; b^*)$ denota la derivada por la izquierda de $V(u; b)$ en el punto $u = b$. Para ver esto, se usa la definición de derivada por la izquierda y por la derecha. Para el caso de la derivada por la izquierda,

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{V(b^* - h, b^* - h) - V(b^*, b^*)}{h} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{V(b^* - h, b^* - h) - V(b^* - h, b^*) + V(b^* - h, b^*) - V(b^*, b^*)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{V(b^* - h, b^* - h) - V(b^* - h, b^*)}{h} + \lim_{h \downarrow 0} \frac{V(b^* - h, b^*) - V(b^*, b^*)}{h} \\ &= V(b^* -, b^*) \end{aligned}$$

donde la última igualdad es resultado de la continuidad de $V(u, b)$ como función de u y por (1.32). De manera análoga se muestran los límites por la derecha. Ahora, usando que la derivada de (1.7) respecto a b es igual a 0 por (1.31), se tiene que

$$-1 + \left. \frac{dV(b, b)}{db} \right|_{b=b^*} = -1 + V'(b^* -; b^*) = 0. \quad (1.33)$$

Con esto y la derivada de (1.7) respecto a u y luego hacer $u \downarrow b$, concluye que

$$V'(b^* -; b^*) = 1 = V'(b^* +; b^*). \quad (1.34)$$

A esta propiedad se le conoce como *condición de alto contacto*. Haciendo $u = b = b^*$ en (1.10) y usando (1.34) se obtiene

$$c + (\lambda + \delta)V(b^*, b^*) - \lambda \int_0^\infty [1 - P(y)]dy - \lambda V(b^*, b^*) = 0. \quad (1.35)$$

Despejando $V(b^*, b^*)$ y usando (1.2), se concluye que

$$V(b^*, b^*) = \frac{\mu}{\delta}. \quad (1.36)$$

1.6. Método alternativo

La propuesta de este método consiste en reemplazar la variable u por $z = b - u$, la distancia entre el nivel de barrera y el capital inicial. Definimos $W(z; b)$ como

$$W(z; b) = V(u; b), \quad 0 \leq z \leq b. \quad (1.37)$$

De (1.6) y el hecho de que $z = 0$ cuando $u = b$ se tiene que

$$W(0; b) = V(b; b) \quad (1.38)$$

y

$$W(b; b) = V(0; b) = 0. \quad (1.39)$$

En esta sección se analizará el caso en que $p(y)$ es mezcla de exponenciales como en (1.19). Reemplazando u por $b - z$ en (1.21), se tiene que

$$W(z; b) = \sum_{k=0}^n C_k e^{r_k(b-z)} = \sum_{k=0}^n D_k e^{-r_k z}, \quad (1.40)$$

donde $D_k = C_k e^{r_k b}$ y r'_k s son las raíces de (1.24). Usando las relaciones (1.26) y (1.38), los coeficientes D_0, D_1, \dots, D_n satisfacen el siguiente sistema de $n + 1$ ecuaciones:

$$\sum_{k=0}^n D_k \frac{r_k}{\beta_i - r_k} e^{r_k b} = \frac{1}{\beta_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.41)$$

$$\sum_{k=0}^n D_k = V(b; b). \quad (1.42)$$

Para encontrar el nivel de barrera óptimo b^* , se usa la condición (1.30) en (1.42) con $b = b^*$ para obtener

$$\sum_{k=0}^n D_k = \frac{\mu}{\delta} \quad (1.43)$$

Resolviendo el sistema formado por (1.41) y (1.43), se obtienen los coeficientes b^* para la función $W(z; b^*)$. De aquí la ventaja del método alternativo, porque encontrar b^* deja de ser un problema de optimización por (1.39) y se convierte en calcular la raíz de una función.

Para dar un ejemplo de esto, se considera cuando $n = 1$, el caso exponencial. Fijando $r_0 = r$ y $r_1 = s$, se tiene que

$$W(z; b^*) = D_0 e^{-rz} + D_1 e^{-sz}. \quad (1.44)$$

Por (1.39),

$$\begin{aligned} 0 &= D_0 e^{-rb^*} + D_1 e^{-sb^*} \\ -D_0 e^{-rb^*} &= D_1 e^{-sb^*} \\ -\frac{D_0}{D_1} &= e^{b^*(r-s)} \\ \ln\left(-\frac{D_0}{D_1}\right) &= b^*(r-s). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$b^* = \frac{1}{r-s} \ln\left(-\frac{D_0}{D_1}\right). \quad (1.45)$$

Ahora, para determinar los coeficientes D_0 y D_1 , se tiene que resolver el siguiente sistema de ecuaciones,

$$D_0 \frac{r}{\beta - r} + D_1 \frac{s}{\beta - s} = \frac{1}{\beta} \quad (1.46)$$

$$D_0 + D_1 = \frac{\mu}{\delta} \quad (1.47)$$

Despejando D_0 de (1.47) se obtiene que $D_0 = \frac{\mu}{\delta} - D_1$, y sustituyendo esto en (1.46) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu}{\delta} - D_1\right) \frac{r}{\beta - r} + D_1 \frac{s}{\beta - s} &= \frac{1}{\beta} \\ \frac{\mu}{\delta} \frac{r}{\beta - r} + D_1 \left(\frac{s}{\beta - s} - \frac{r}{\beta - r}\right) &= \frac{1}{\beta}. \end{aligned}$$

Dando como resultado que

$$D_0 = -\frac{\frac{1}{\beta} - \frac{\mu}{\delta} \frac{s}{\beta - s}}{\frac{r}{\beta - s} - \frac{r}{\beta - r}}, \quad (1.48)$$

$$D_1 = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{\mu}{\delta} \frac{r}{\beta - r}}{\frac{r}{\beta - s} - \frac{r}{\beta - r}}, \quad (1.49)$$

obteniendo así que

$$-\frac{D_0}{D_1} = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{\mu}{\delta} \frac{s}{\beta - s}}{\frac{1}{\beta} - \frac{\mu}{\delta} \frac{r}{\beta - r}}. \quad (1.50)$$

Finalmente, sustituimos en (1.45), obtenemos el nivel de barrera óptimo b^* .

1.7. Método de transformadas de Laplace

En las secciones anteriores se hicieron supuestos sobre la forma de $p(y)$. Ahora, consideraremos una función de distribución general $P(y)$. Usando la ecuación (1.10) en términos de $W(z; b)$, se tiene que

$$-W'(z; b) + (\lambda + \delta)W(z; b) - \lambda \int_0^z W(y; b)p(z - y)dy - \lambda \int_z^\infty [1 - P(y)]dy - \lambda W(0; b)[1 - P(z)] = 0. \quad (1.51)$$

Denotando con $\omega(z)$ a la extensión de $W(z; b)$ sobre todo $0 \leq z \leq \infty$, que satisface (1.51). Tomando la transformada de Laplace en la ecuación íntegro-diferencial de $\omega(z)$ y usando las propiedades de la transformada de Laplace vistas en [1] se tiene que:

$$c\omega(0) - c\xi\hat{\omega}(\xi) + (\lambda + \delta)\hat{\omega}(\xi) - \lambda\hat{\omega}(\xi)\hat{p}(\xi) - \frac{\lambda}{\xi^2}[\hat{p}(\xi) - 1 - \xi\hat{p}'(0)] + \frac{\lambda}{\xi}w(0)[\hat{p}(\xi) - 1] = 0, \quad (1.52)$$

la cual es una ecuación lineal para $\hat{\omega}(\xi)$. Despejando se sigue que

$$\hat{\omega}(\xi) = \frac{c\omega(0) + \frac{\lambda}{\xi}w(0)[\hat{p}(\xi) - 1] - \frac{\lambda}{\xi^2}[\hat{p}(\xi) - 1 - \xi\hat{p}'(0)]}{c\xi - (\lambda + \delta) + \lambda\hat{p}(\xi)}. \quad (1.53)$$

Usando esta fórmula, con la condición de frontera $\omega(0)$, invirtiendo la transformada de Laplace cuando es posible, se obtiene la función $\omega(z)$. Usando (1.39), podemos hallar b con el valor z que haga $\omega(z) = 0$. Por último, de la definición de $W(z; b)$, calculamos la función de valor $V(u; b)$ de la siguiente manera:

$$V(u; b) = W(b - z; b) \text{ para } 0 \leq u \leq b .$$

En el libro de Abramowitz[1] hay fórmulas de inversión, propiedades y tablas de las transformadas de Laplace que pueden resolver de manera explícita para algunas funciones.

1.8. Proceso de ingresos $S(t)$ es un subordinador.

Supongamos que $S(t)$ es un proceso no decreciente con incrementos independientes y estacionarios, es decir, un subordinador. Definimos el tiempo de vida de un subordinador de la siguiente manera:

Definición 1.7 Sea $S(t)$ un subordinador. Se define el tiempo de vida ζ como

$$\zeta = \inf\{t \geq 0 : S(t) = \infty\} .$$

El subordinador $S(t)$ que trabajamos explica los ingresos recibidos hasta el tiempo t , por consiguiente es natural pensar que $\zeta \equiv \infty$ con probabilidad 1. De la proposición (1.3) de Bertoin[5] se tiene que el subordinador $S(t)$ puede descomponerse en una parte continua y una parte discreta de la siguiente manera:

$$S(t) = dt + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta_s ,$$

donde $\Delta = (\Delta_s, s \geq 0)$ es un proceso puntual de Poisson con medida característica la cola de la medida de Lévy $Q : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Trabajando con el modelo dual de riesgo, la deriva d puede incluirse en el gasto constante c y estudiar únicamente la parte de saltos del subordinador.

Por los Lemas 2.12 y 2.14 de Kyprianou[10] sabemos que el subordinador $S(t)$ es un proceso de variación acotada y junto con Bertoin[5] tenemos que $Q(x)$ satisface:

- i) $Q(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$,
- ii) $\int_0^\infty Q(x) dx = \int_0^\infty s[-dQ(x)] < \infty$.

Del Lema 2.13 de Kyprianou[10] y del Teorema 1 de Bertoin[4] sabemos que, o bien $S(t)$ es un proceso de Poisson compuesto, o es límite de procesos Poisson compuestos, dependiendo si el valor

$$Q(0) := \lim_{x \downarrow 0} Q(x)$$

es finito o no. Asumiendo el primer caso y utilizando lo visto en las secciones anteriores, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.5 *En el modelo dual de riesgo $U(t)$, definimos la función Q de la siguiente manera*

$$Q(x) = \lambda[1 - P(x)], \quad x \geq 0 .$$

Entonces la transformada de Laplace de la función de valor cumple:

$$\hat{\omega}(\xi) = \frac{c\omega(0) - \omega(0)\hat{Q}(\xi) + \frac{1}{\xi}\hat{Q}(\xi) - \frac{1}{\xi}\mathbb{E}[S(1)]}{c\xi - \delta - \xi\hat{Q}(\xi)} .$$

Demostración

Usando la definición de la función Q , sabemos que su transformada de Laplace es:

$$\begin{aligned}
 \xi \hat{Q}(\xi) &= \xi \int_0^\infty e^{-z\xi} Q(z) dz \\
 &= \xi \int_0^\infty e^{-z\xi} \lambda [1 - P(z)] dz \\
 &= \xi \int_0^\infty e^{-z\xi} \lambda \int_z^\infty p(y) dy dz \\
 &= \xi \lambda \int_0^\infty p(y) \int_0^y e^{-z\xi} dz dy \\
 &= \lambda \xi \int_0^\infty p(y) [1 - e^{-y\xi}] dy \\
 &= \lambda [1 - \hat{p}(\xi)].
 \end{aligned}$$

Con esto, y la fórmula $\mathbb{E}[S(1)] = -\lambda \hat{p}'(0)$, sustituyendo en (1.53) se obtiene directamente el resultado.

□

Ahora, considerando el segundo caso, cuando $Q(0) = \infty$, primero se demostrarán dos lemas útiles para generalizar el teorema 1.5.

Lema 1.1 *Considerando la cola de la medida de Lévy $Q(x)$, entonces:*

- a) $Q(x)x \xrightarrow{x \downarrow 0} 0$.
- b) $Q(x)[1 - e^{\xi x}] \xrightarrow{x \downarrow 0} 0$ para $\xi \geq 0$.

Demostración

Empezaremos probando a). Dado que $Q(x)$ cumple:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\epsilon Q(y) dy &< \infty \text{ para toda } \epsilon > 0, \\
 Q(x) &\xrightarrow{x \downarrow 0} \infty,
 \end{aligned}$$

entonces $Q(x) \sim Ax^{-\alpha}$ donde A es una constante y $\alpha < 1$. De aquí concluimos que:

$$\lim_{x \downarrow 0} xQ(x) = \lim_{x \downarrow 0} Ax^{1-\alpha} = 0.$$

Ahora probemos b). Por L'Hopital tenemos la siguiente convergencia,

$$\frac{Q(x)x}{Q(x)(1 - e^{-\xi x})} \xrightarrow{x \downarrow 0} \frac{1}{\xi}.$$

Usando esto y lo mostrado en a), se termina la prueba.

□

Para definir vía límite al proceso de saltos $S(t)$, definimos al proceso de Poisson compuesto $S(t; x)$ como la suma de los saltos de $S(t)$ mayores que x hasta el tiempo t .

El proceso puntual de Poisson $N(t; x)$ cuenta el número de saltos mayores a x hasta el tiempo t , y tiene intensidad $Q(x)$. La distribución de cada salto $P(y; x)$ está dada de la siguiente manera:

$$P(y; x) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \leq x \\ 1 - \frac{Q(y)}{Q(x)}, & \text{si } y > x \end{cases}$$

Lema 1.2 *Considerando al proceso $S(t; x)$ definido anteriormente, se tienen las siguientes convergencias:*

1. $\mathbb{E}[S(t; x)] \xrightarrow{x \downarrow 0} \mathbb{E}[S(t)].$
2. $-Q(x)[\hat{P}(\xi; x) - 1] \xrightarrow{x \downarrow 0} \xi \hat{Q}(\xi),$ para $\xi \geq 0.$

Demostración

Como $S(t; x)$ es un proceso Poisson compuesto, entonces su esperanza está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S(t; x)] &= tQ(x) \int_0^\infty [1 - P(y; x)] dy \\ &= txQ(x) + t \int_x^\infty Q(y) dy. \end{aligned}$$

Usando esto y el resultado a) del lema anterior, se concluye la primera convergencia. Para la segunda parte del lema, usando el teorema de Fubini y el hecho de que $e^{-\xi x} = \int_x^\infty \xi e^{-\xi y} dy$, se puede ver que:

$$\begin{aligned}
 -Q(x)[\hat{P}(\xi; x) - 1] &= -Q(x)\left[\int_0^\infty e^{-\xi y} dP(y; x) - 1\right] \\
 &= Q(x)\left[\int_0^\infty \xi e^{-\xi z} dz + \xi \int_x^\infty \int_y^\infty e^{-\xi z} dz \frac{dQ(y)}{Q(x)}\right] \\
 &= Q(x)\left[\int_0^x \xi e^{-\xi z} dz + \int_x^\infty \xi e^{-\xi z} dz + \int_x^\infty e^{-\xi z} \int_x^z \frac{dQ(y)}{Q(x)}\right] \\
 &= Q(x)\left[\int_0^x \xi e^{-\xi z} dz + \int_x^\infty e^{-\xi z} \left(1 + \frac{Q(z) - Q(x)}{Q(x)}\right)\right] \\
 &= \xi Q(x)(1 - e^{-\xi x}) + \xi \int_x^\infty e^{-\xi z} Q(z) dz,
 \end{aligned}$$

donde utilizando la parte b) del lema anterior y haciendo $x \downarrow 0$, se termina la prueba. □

Habiendo ya definido a los procesos Poisson compuesto $S(t; x)$ y con los lemas anteriores, podemos presentar la generalización del Teorema 1.5.

Teorema 1.6 *Considerando un modelo dual de riesgo con un proceso de ganancias $S(t)$ subordinador que no es un proceso de Poisson compuesto, con función Q , se cumple que:*

$$\hat{\omega}(\xi) = \frac{c\omega(0) - \omega(0)\hat{Q}(\xi) + \frac{1}{\xi}\hat{Q}(\xi) - \frac{1}{\xi}\mathbb{E}[S(1)]}{c\xi - \delta - \xi\hat{Q}(\xi)}.$$

Demostración

La prueba se basa en usar lo que sabemos para el proceso Poisson compuesto en $S(t; x)$ y despues pasar al límite $x \downarrow 0$.

Como $S(t; x)$ cuenta los saltos que son más grandes que x , entonces es decreciente respecto a x . Este hecho hace que los dividendos D^x definidos como

$$D^x(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} (u - c\tau + S(\tau; x))_+$$

sean también decrecientes respecto a x . Esto indica que también hay monotónia en la función de valor $V^x(u; b)$. Definiendo $\hat{\omega}^x$ como en (1.53) pero con el proceso Poisson compuesto $S(t; x)$ y utilizando el teorema de convergencia monótona dos veces, se concluye que:

$$\hat{\omega}^x(\xi) \xrightarrow{x \downarrow 0} \hat{\omega}(\xi) . \tag{1.54}$$

Con esto y por la ecuación (1.53) usada en el proceso $S(t; x)$ tenemos que:

$$\hat{\omega}(\xi) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{c\omega^x(0) + \frac{1}{\xi}\omega^x(0)Q(x)[\hat{p}(\xi) - 1] - \frac{1}{\xi^2}(Q(x)[\hat{p}(\xi) - 1] + \mathbb{E}[S(1; x)])}{c\xi - \delta + Q(x)[\hat{p}(\xi) - 1]} ,$$

Usando el lema 1.2 en el límite anterior, se termina la prueba.

□

1.9. Ejemplos numéricos.

Utilizando el método alternativo visto en la sección 6, se darán ejemplos concretos de distribuciones que son mezcla de exponenciales. Es importante dar ejemplos con este tipo de distribuciones, ya que para cualquier otra distribución en $[0, \infty)$, se puede aproximar usando mezcla de exponenciales. Para facilitar los cálculos, se considera que la media del monto de reclamación Y_i es 1, de lo contrario podemos trabajar con la variable $Y'_i = \frac{Y_i}{\mathbb{E}[Y_i]}$, y reinterpretamos las unidades. De igual manera podemos asumir que $\lambda = 1$, escogiendo unidades apropiadas para el tiempo.

Suponiendo ahora que $p(y) = \frac{1}{3}2e^{-2y} + \frac{2}{3}0.8e^{-0.8y}$, $y > 0$. La siguiente tabla muestra los valores del nivel de barrera óptimo b^* ,

CAPÍTULO 1. PAGO DE DIVIDENDOS EN EL MODELO DUAL DE RIESGO

δ	$\mu=0.95$	$\mu=0.80$	$\mu=0.65$	$\mu=0.50$	$\mu=0.35$	$\mu=0.25$	$\mu=0.15$
0.005	0.7064	2.8834	5.5040	8.7821	12.8414	15.6424	16.6269
0.010	0.6301	2.5083	4.6675	7.1781	9.8329	11.0582	10.2498
0.015	0.5847	2.2853	4.1707	6.2354	8.1379	8.6722	7.4436
0.030	0.5054	1.8971	3.3147	4.6563	5.5078	5.3391	4.1018
0.045	0.4577	1.6670	2.8185	3.7864	4.2068	3.8755	2.8341
0.060	0.4233	1.5035	2.4748	3.2115	3.4138	3.0457	2.1657
0.080	0.3884	1.3411	2.1432	2.6824	2.7333	2.3710	1.6479

Ahora, usando la distribución $p(y)=\frac{1}{4}\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}} + \frac{3}{4}3e^{-3y}$, $y > 0$, y los mismos valores para μ y la tasa de interés δ que en la tabla anterior, tenemos los siguientes valores de b^* :

δ	$\mu = 0,95$	$\mu = 0,80$	$\mu = 0,65$	$\mu = 0,50$	$\mu = 0,35$	$\mu = 0,25$	$\mu = 0,15$
0.005	0.7392	3.4697	7.4496	12.6978	18.5857	21.5010	20.2682
0.010	0.6580	2.9817	6.1497	9.9118	13.2477	13.9249	11.5509
0.015	0.6097	2.6914	5.3830	8.3196	10.4467	10.3769	8.0938
0.030	0.5251	2.1881	4.0895	5.7926	6.4965	5.9240	4.2737
0.045	0.4744	1.8930	3.3686	4.5056	4.7444	4.1573	2.9069
0.060	0.4377	1.6862	2.8873	3.7047	3.7451	3.2061	2.2038
0.080	0.4006	1.4839	2.4398	3.0054	2.9289	2.4591	1.6673

Por último, con la distribución $p(y)=\frac{4}{5}4e^{-4y} + \frac{1}{5}0.25e^{-0.25y}$, $y > 0$, obtenemos los valores correspondientes deb^*

δ	$\mu=0.95$	$\mu=0.80$	$\mu=0.65$	$\mu=0.50$	$\mu=0.35$	$\mu=0.25$	$\mu=0.15$
0.005	0.7680	4.0732	9.3344	15.8976	22.3907	24.7188	21.8065
0.010	0.6824	3.4595	7.5346	12.0164	15.3065	15.3365	12.0646
0.015	0.6315	3.0945	6.4834	9.8556	11.7614	11.1756	8.3496
0.030	0.5423	2.4656	4.7491	6.5646	7.0185	6.1895	4.3460
0.045	0.4887	2.1020	3.8168	4.9738	5.0233	4.2881	2.9400
0.060	0.4501	1.8509	3.2129	4.0185	3.9176	3.2831	2.2223
0.080	0.4110	1.6091	2.6669	3.2080	3.0325	2.5034	1.6774

Siendo que la varianza en la distribución de la primera tabla es 1,25, de 3,666 en la segunda tabla y 5,5 en la tercera tabla, de manera empírica podemos hacer las siguientes observaciones:

- El valor b^* incrementa junto con la varianza. Es razonable pensar que a mayor riesgo resulte necesario aplazar el pago a los accionistas para obtener mayor ganancia.
- Si la tasa de interés δ aumenta, el nivel de barrera óptimo b^* decrece. Esto indica que si los intereses por retener el capital son muy altos, lo mejor es pagar dividendos pronto, por lo que b^* disminuye.
- El parámetro b^* aumenta conforme μ aumenta, pero llega el punto máximo en el que disminuye al aumentar μ . Esto se relaciona con el tiempo que el capital tarda en llegar al nivel de barrera b . Si μ es muy pequeño o muy grande, conviene pagar pronto. Para valores regulares de μ es mejor esperar a que la compañía se consolide y por eso se eleva el nivel de barrera óptimo b^* .

Capítulo 2

Pago de dividendos en el modelo dual de riesgo perturbado por una difusión.

2.1. Preliminares

En este capítulo queremos estudiar el modelo dual de riesgo definido en (1.1) pero ahora perturbado por una difusión.

Definición 2.1 *Sea $U(t)$ el capital de una compañía al tiempo t . Se le conoce como el modelo dual de riesgo cuando $U(t)$ es de la forma:*

$$U(t) = u - ct + S(t) + \sigma W(t)$$

- u capital inicial,
- c gasto por unidad de tiempo,
- $S(t)$ proceso Poisson compuesto,
- $\sigma W(y)$ es un mov. browniano independiente de $S(t)$.

Este modelo es de interés porque la difusión puede representar la incertidumbre de los gastos generados por la compañía. Definiendo a μ como la ganancia esperada en una unidad de tiempo, se supondrá positiva, es decir:

$$\mu = \mathbb{E}[U(t+1) - U(t)] = \mathbb{E}[S(1)] - c > 0$$

Este supuesto es importante porque significa que de un periodo a otro se espera un crecimiento positivo en el capital de la compañía.

2.2. Estrategia de pago de dividendos y la función de valor

Suponiendo una estrategia de barrera para el pago de dividendos, definimos al proceso de dividendos de la siguiente manera:

Definición 2.2 *Con el modelo dual de riesgo perturbado $U(t)$, y la dinámica de la estrategia de barrera con umbral b para el pago de dividendos, se define a $D(t)$ como:*

$$D(t) = \max(u - c\tau + S(\tau) + \sigma W(\tau) - b)_{+0 \leq \tau \leq t} .$$

De esta manera, definimos al modelo dual de riesgo perturbado considerando pago de dividendos:

Definición 2.3 *Considerando una estrategia de barrera para el pago de dividendos en el modelo dual de riesgo perturbado, se tiene a $U(t)$ como el capital al tiempo t determinado como:*

$$U(t) = u - ct + S(t) + \sigma W(t) - D(t). \tag{2.1}$$

La función de valor $V(u; b)$ se define de la misma forma que en (1.5). En este modelo, el siguiente lema nos presenta tres propiedades básicas de la función de valor $V(u; b)$.

Lema 2.1 *En el modelo dual de riesgo perturbado, la función de valor $V(u; b)$ cumple:*

1. $V(y; b) = u - b + V(b; b)$ para $u > b$,
2. $V(0; b) = 0$,

3. $V'(b-; b) = 1$.

Demostración

Las primeras dos partes del lema son por las mismas razones que en el modelo sin perturbación. Para mostrar la última parte, se tiene que comparar las cantidades $V(b; b)$ y $V(b - h; b)$ donde h es un número muy pequeño. En estas circunstancias, por la oscilación del movimiento browniano se tiene que:

$$V(b; b) = V(b - h; b) + h ,$$

de donde, restando $V(b - h; b)$ y dividiendo por h , haciendo $h \downarrow 0$, se concluye el resultado. □

Para poder conocer el valor de $V(u; b)$ cuando $0 \leq u \leq b$, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *Cuando $u \in [0, b]$, la función de valor $V(u; b)$ está determinada por la ecuación íntegro-diferencial*

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V''(u; b) - cV'(u; b) - (\lambda + \delta)V(u; b) + \lambda \int_0^{b-u} V(u+y; b)p(y)dy + \lambda \int_{b-u}^{\infty} (u+y-b)p(y)dy + \lambda V(b; b)[1 - P(b-u)] = 0 , \quad (2.2)$$

Demostración

La prueba consiste en condicionar respecto al tiempo del primer salto T_1 tome valores antes y despues a un tiempo h muy pequeño, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} V(u; b) &= e^{-\lambda h} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta s} dD(s) | T_1 > h \right] + \lambda \int_0^h e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta s} dD(s) | T_1 = t, Y = y \right] p(y) dy dt \\ &= e^{-(\lambda + \delta)h} \mathbb{E} [V(u - ch + \sigma W(h); b)] + \lambda \int_0^h e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \mathbb{E} [V(u - ct + \sigma W(t) + y; b)] p(y) dy dt , \end{aligned}$$

donde restando $V(u; b)$, dividiendo por h y usando la expansión de Taylor de $e^{-(\lambda+\delta)h}$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{E}[V(u - ch + \sigma W(h); b)] - \mathbb{E}[V(u; b)]}{h} - (\lambda + \delta + o(h))\mathbb{E}[V(u - ch + \sigma W(h); b)] \\ & + \frac{\lambda}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} \int_0^\infty \mathbb{E}[V(u - ct + \sigma W(t) + y; b)] p(y) dy dt \\ & = 0 . \end{aligned}$$

Ahora, por el Lema (1.2) sabemos que la función $f(t, x) = V(u - ct + \sigma x; b)$ es continua y en \mathcal{C}^2 . Usando esto, y la fórmula de Itô, al hacer $h \downarrow 0$ tenemos lo siguiente,

$$-cV'(u; b) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(u; b) - (\lambda + \delta)V(u; b) + \lambda \int_0^\infty V(u + y; b)p(y)dy = 0 .$$

El resto de la prueba es análoga al caso no perturbado, usando la condición (1) del Lema anterior y dividiendo la integral antes y después de $b - u$, se concluye el resultado.

□

Corolario 2.1 Para $0 \leq u \leq b$, la función de valor $V(u; b)$ cumple que

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V''(u; b) - cV'(u; b) - (\lambda + \delta)V(u; b) + \lambda \int_u^b V(x; b)p(x-u)dx + \lambda \int_{b-u}^\infty [1 - P(y)]dy + \lambda V(b; b)[1 - P(b-u)] = 0 . \quad (2.3)$$

La prueba de este corolario es análoga al corolario (1.10).

2.3. Cuando los ingresos tienen distribución mezcla de exponenciales.

Suponiendo que la distribución $p(y)$ es la misma que en (1.19), es decir, tiene la forma

$$p(y) = \sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{-\beta_i y} , y > 0,$$

donde $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n$, $A_i > 0$ para toda i y $A_1 + \dots + A_n = 1$. Sustituyendo la forma de $p(y)$ en (2.3),

Teorema 2.2 *En el caso donde la distribución de los saltos en el modelo dual de riesgo perturbado es mezcla de exponenciales, entonces la función de valor tiene la forma:*

$$V(u; b) = \sum_{k=0}^{n+1} C_k e^{r_k u}, \quad 0 \leq u \leq b,$$

donde las constantes r_k se determinan por el sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r_k^2 - cr_k - (\lambda + \delta) + \lambda \sum_{i=1}^n A_i \frac{\beta_i}{\beta_i - r_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

y los coeficientes C_k dependen de b y son la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} C_k \frac{r_k}{\beta_i - r_k} e^{r_k b} &= \frac{1}{\beta_i}, \quad i = 1, \dots, n. \\ \sum_{k=0}^{n+1} C_k &= 0, \\ \sum_{k=0}^{n+1} C_k r_k e^{r_k b} &= 1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Demostración

Usando la forma de $p(y)$ en (1.19) y sustituyendo en la ecuación (2.3),

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V''(u; b) - cV'(u; b) - (\lambda + \delta)V(u; b) + \lambda \sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{\beta_i u} \int_u^b V(x; b) e^{-\beta_i x} dx + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\beta_i} e^{-\beta_i(b-u)} + \lambda V(b; b) \sum_{i=1}^n A_i e^{-\beta_i(b-u)} = 0$$

Entonces, el teorema se sigue análogamente al Teorema (1.3), con la diferencia de la ecuación (2.4). Esta ecuación resuta de la continuidad de la función $V(u; b)$ y de la parte (3) del Lema (2.1).

□

2.4. Método de la transformada de Laplace.

En la sección anterior encontramos la función de valor $V(u; b)$ de manera explícita asumiendo una forma particular de $p(y)$. El método mostrado en esta sección es para una forma general de $p(y)$. Definimos la función $W(z; b)$ como:

$$W(z; b) = V(b - z; b), \quad 0 \leq z \leq b .$$

Del Lema 2.1 es inmediato que:

$$W(b; b) = 0 , \tag{2.5}$$

$$W'(0; b) = -1 . \tag{2.6}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.3), obtenemos que:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 W''(z; b) - cW'(z; b) - (\lambda + \delta)W(z; b) + \lambda \int_u^b W(x; b)p(x-u)dx + \lambda \int_{b-u}^{\infty} [1-P(y)]dy + \lambda W(0; b)[1-P(z)] = 0 . \tag{2.7}$$

Considerando que esta ecuación se satisface para toda $z \geq 0$ y llamando a la función resultante $\omega(z)$. Usando las identidades de Abramowitz [1], calculamos la transformada de Laplace de (2.7) y despejamos $\hat{\omega}(\xi)$, teniendo como resultado:

$$\hat{\omega}(\xi) = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2[-1 + \xi\omega(0)] + c\omega(0) + \frac{\lambda}{\xi}\omega(0)[\hat{p}(\xi) - 1] - \frac{\lambda}{\xi^2}[\hat{p}(\xi) - 1 - \xi\hat{p}'(0)]}{\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + c\xi - (\lambda + \delta) + \lambda\hat{p}(\xi)} . \tag{2.8}$$

Esto nos dice un método para calcular la función de valor $V(u; b)$. Invirtiendo la fórmula (2.8), junto con la condición de frontera $\omega(0)$, obtenemos a la función $\omega(z)$. Para conocer b usamos (2.5) y calculamos la raíz de $\omega(z)$. Por último, de la definición de la función $W(z; b)$ tenemos que:

$$V(u; b) = \omega(b - u), \quad 0 \leq u \leq b.$$

2.5. Nivel de barrera óptimo

Usando la misma notación que en el capítulo 1, consideraremos que $p(y)$ permite la existencia del nivel de barrera óptimo b^* . Entonces,

$$\left. \frac{\partial V(u; b)}{\partial b} \right|_{b=b^*} \equiv 0. \tag{2.9}$$

Por la definición de $V(u; b)$, tenemos que:

$$V(u - h; b) = V(u; b + h) \text{ para } h \text{ pequeño.} \quad (2.10)$$

Usando esto, obtenemos por cálculo directo de las derivadas parciales

$$V''(b-; b) + \frac{\partial^2 V(u; b)}{\partial u \partial b} \Big|_{u=b-} = 0.$$

Con este resultado y (2.10), concluimos que $V''(b^* -; b^*) = 0$. Sustituyendo en (2.3) y usando el Lema 2.1 obtenemos

$$V(b^*; b^*) = \frac{\mu}{\delta}. \quad (2.11)$$

Esta fórmula es crucial para encontrar b^* . Utilizando el método de la transformada de Laplace, invirtiendo (2.8) y hallando la raíz de $\omega(z)$ como en la sección anterior.

2.6. Proceso de saltos $S(t)$ un subordinador

En esta sección supondremos al modelo dual de riesgo perturbado pero con un proceso de ingresos $S(t)$ el cual es un subordinador, es decir, un proceso no decreciente con incrementos independientes y estacionarios. Usando las mismas definiciones que en la sección 8 del capítulo anterior, se prueba el siguiente teorema:

Teorema 2.3 *En el modelo dual de riesgo perturbado $U(t)$, definimos la medida de Lévy Q de la siguiente manera*

$$Q(x) = \lambda[1 - P(x)], \quad x \geq 0.$$

Entonces la transformada de Laplace de la función $\omega(z)$ cumple:

$$\hat{\omega}(\xi) = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2[-1 + \xi\omega(0)] + c\omega(0) - \omega(0)\hat{Q}(\xi) + \frac{1}{\xi}\hat{Q}(\xi) - \frac{1}{\xi}\mathbb{E}[S(1)]}{\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2c\xi - \delta - \xi\hat{Q}(\xi)}.$$

Demostración

De la demostración del Teorema 1.5, sabemos que

$$\begin{aligned}\xi\hat{Q}(\xi) &= \lambda[1 - \hat{p}(\xi)] , \\ \mathbb{E}[S(1)] &= -\lambda\hat{p}'(0) .\end{aligned}$$

Sustituyendo estas fórmulas en (2.8), obtenemos directamente el resultado. □

Ahora suponemos el caso cuando $S(t)$ no es un proceso Poisson compuesto pero si un límite de procesos Poisson compuestos.

Teorema 2.4 *En el modelo dual de riesgo perturbado, con un proceso de ganancias $S(t)$ subordinador que no es un proceso de Poisson compuesto, con medida de Lévy Q , se cumple que:*

$$\hat{\omega}(\xi) = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2[-1 + \xi\omega(0)] + c\omega(0) - \omega(0)\hat{Q}(\xi) + \frac{1}{\xi}\hat{Q}(\xi) - \frac{1}{\xi}\mathbb{E}[S(1)]}{\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + c\xi - \delta - \xi\hat{Q}(\xi)} .$$

Demostración

Para la prueba usaremos al proceso Poisson compuesto en $S(t; x)$ y despues pasaremos al límite $x \downarrow 0$.

Dado $S(t; x)$ cuenta los saltos que son más grandes que x , entre más pequeño es x , más saltos cuenta, por lo que el proceso es decreciente respecto a x . Por esto los dividendos D^x definidos como

$$D^x(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} (u - c\tau + S(\tau; x) + \sigma W(\tau))_+ ,$$

también son decrecientes respecto a x . Esto indica que hay monotonía en la función de valor $V^x(u; b)$. Definiendo $\hat{\omega}^x$ como en (2.8) pero con el proceso Poisson compuesto $S(t; x)$, por el teorema de convergencia monótona, concluimos que:

$$\hat{\omega}^x(\xi) \xrightarrow{x \downarrow 0} \hat{\omega}(\xi) . \tag{2.12}$$

Con esto y por la fórmula (2.8) usada en el proceso $S(t; x)$ tenemos que:

$$\hat{\omega}(\xi) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\sigma^2[-1 + \xi\omega^x(0)] + c\omega^x(0) + \frac{1}{\xi}\omega^x(0)Q(x)[\hat{p}(\xi) - 1] - \frac{1}{\xi^2}(Q(x)[\hat{p}(\xi) - 1] + \mathbb{E}[S(1; x)])}{\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + c\xi - \delta + Q(x)[\hat{p}(\xi) - 1]},$$

Usando el lema 1.2 en el límite anterior, se termina la prueba.

□

2.7. Ejemplos numéricos.

En esta sección analizaremos un par de ejemplos concretos que nos permitirán conocer de manera empírica a la función de valor $V(u; b)$. En la tabla 1 utilizamos el Teorema 2.2 para calcular la forma de $V(u; b)$.

Tabla 1

$$b = 10, p(y) = e^y, \lambda = 1, c = 0.75, \delta = 0.005.$$

σ	$V(8; 10)$	$V(u; 10) = C_0e^{r_0u} + C_1e^{r_1u} + C_2e^{r_2u}$
2	12.67	$-18.02808e^{-0.10275u} + 18.02808e^{0.01867u} - 5 \cdot 10^{-9}e^{1.46109u}$
1	21.3	$-22.10986e^{-0.20635u} + 22.10986e^{0.01803u} - 5 \cdot 10^{-14}e^{2.68833u}$
0.5	30.76	$-28.83199e^{-0.29793u} + 28.83199e^{0.01844u} - 3 \cdot 10^{-34}e^{7.27948u}$
0.1	36.36	$-32.98860e^{-0.35554u} + 32.98860e^{0.01859u} - 3 \cdot 10^{-661}e^{151.338u}$
0.005	36.63	$-33.19103e^{-0.35858u} + 33.19103e^{0.01859u} - 4 \cdot 10^{-260589}e^{60001u}$
0	36.63	$-33.19154e^{-0.35859u} + 33.19154e^{0.01859u}$

En la Tabla 1 observamos que la función de valor $V(u; b)$ en el modelo dual de riesgo sin perturbación es el límite del modelo perturbado cuando $\sigma \downarrow 0$. La siguiente tabla muestra los valores del nivel de barrera óptimo b^* para distintas distribuciones que son mezcla de exponenciales.

Tabla 2

$$\lambda = 1, c = 0.5, \delta = 0.002$$

$\hat{p}(\xi)$	$\sigma = 2^5$	$\sigma = 2^2$	$\sigma = 2$	$\sigma = 1$	$\sigma = 2^{-2}$	$\sigma = 2^{-5}$	$\sigma = 0$
$\frac{1}{3} \frac{2}{2+\xi} + \frac{2}{3} \frac{0.8}{0.8+\xi}$	240.3195	87.7723	42.2831	22.3507	11.9479	10.8793	10.8610
$\frac{1}{4} \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\xi} + \frac{3}{4} \frac{3}{3+\xi}$	240.3399	92.6083	48.7877	28.5117	17.4682	16.3762	16.3579
$\frac{4}{5} \frac{4}{4+\xi} + \frac{1}{5} \frac{0.25}{0.25+\xi}$	240.3550	95.7978	53.0723	32.9539	22.1189	21.1007	21.0838

Las distribuciones en la Tabla 2 corresponden a las mismas usadas en la sección 1.9. Tienen la misma media y tres varianzas distintas, siendo el primer renglón la distribución con menor varianza y el tercer renglón la distribución que tiene una mayor varianza. Con esta configuración, podemos observar que los parámetros que impactan en b^* no es la mezcla, sino la media y varianza. En esta tabla estamos comparando dos fuentes de variación, la que proviene del proceso de ingresos y la que viene de la difusión. Interpretamos un modelo como más riesgoso que otro si tiene una mayor variación.

En este contexto, observamos que el nivel de barrera óptimo b^* es sensible ante el aumento del riesgo, siguiendo la idea intuitiva que si un modelo es más riesgoso que otro, entonces el nivel de b^* debe ir aumentando junto con el riesgo, para que la compañía no pague dividendos muy rápido y pueda consolidarse económicamente.

Es posible observar en la tabla que la influencia de la variación sobre b^* respecto a dónde se origina no es lineal, notando que para valores grandes de σ , la varianza de los ingresos no afectan mucho, pero para valores de σ pequeños, la varianza toma importancia en el nivel b^* .

Bibliografía

- [1] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55. Tenth Printing. 1019-1029. 1972.
- [2] AVANZI, B., GERBER, H. U., SHIU, E. S. W. *Optimal dividends in the dual model*, Insurance: Mathematics and Economics 41(1), 111-123. 2007.
- [3] AVANZI, B., GERBER, H. U. *Optimal dividends in the dual model with diffusion*, Astin Bulletin 32(2), 653-667. 2008.
- [4] BERTOIN, J. *Lévy Processes* Cambridge University Press. 13-17. 2005.
- [5] BERTOIN, J., MARTINELLI, F., PERES, Y. *Subordinators: examples and applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 5-9. 1999.
- [6] BRAUN, M. *Differential Equations and Their Applications*, Springer-Verlag, 3ra edición. 136-137. 1983.
- [7] DUFRESNE, D. *Fitting combinations of exponentials to probability distributions*, Applied Stochastic Models in Business and Industry. 2006.
- [8] DUFRESNE, F., GERBER, H. U., SHIU, E. S. W. *Risk theory with the Gamma process*, Astin Bulletin 21(2), 177-192. 1991.
- [9] GERBER, H. U., SHIU, E. S. W. *Optimal dividends: Analysis with Brownian Motion*, Astin Bulletin 32(2), 653-667. 2004.

- [10] KYPRIANOU, A. E. *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications* Springer. 54-56. 2006.
- [11] MIYASAWA, K. *An economic survival game*, Econometric Research Program, Research Memorandum No.31. 1961.