Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

Teorema del límite central para integrales de Skorohod vía el cálculo de Malliavin

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

Probabilidad y Estadística

P r e s e n t a

Arturo Jaramillo Gil

Director de Tesis:

Dr. Juan Carlos Pardo Millán

Guanajuato, Gto. Septiembre de 2013

Teorema del límite central para integrales de Skorohod via el cálculo de Malliavin

Arturo Jaramillo Gil

Agradecimientos

A mi familia:

Mis padres Sara y Arturo, por sus enriquecedoras enseñanzas, por el gran amor que me brindan, y por siempre estar conmigo cuando los necesito.

Mis hermanos Adrián y Fernando, por escucharme, orientarme y apoyarme constantemente.

A Erika, por su inmenso apoyo y cariño.

A mi asesor, el Dr. Juan Carlos Pardo Millán, por ayudarme en el proceso de aprendizaje y elaboración del presente trabajo.

A mis sinodales, el Dr. Daniel Hernández Hernández y el Dr. José Alfredo López Mimbela, por sus valiosas observaciones, preguntas y sugerencias.

A mis profesores, por el gran esfuerzo que realizan para ofrecer cursos de calidad, y por preocuparse por la formación integral de sus alumnos.

A los Drs. Victor Rivero Mercado, Daniel Hernández Hernández, Victor Manuel Pérez-Abreu Carrion y Juan Carlos Pardo Millán, quienes me han brindando un inmenso apoyo durante mi formación académica.

Al CIMAT, por la formación y los conocimientos que ahí adquirí durante mis estudios de maestría y licenciatura.

Al CONACYT, por el apoyo económico que me otorgó para poder realizar mis estudios de maestría.

Índice general

Introducción

La teoría del cálculo de Malliavin, también conocido como cálculo estocástico de variaciones, consiste en la aplicación de técnicas de cálculo diferencial en el espacio de Wiener. Esta teoría fue introducida en 1976 por Paul Malliavin con el objetivo de establecer condiciones que aseguraran la suavidad de las densidades de soluciones a ecuaciones diferenciales estocásticas. Dichas condiciones[1] se establecieron mediante el uso de operadores diferenciables y técnicas de integración por partes en espacios de dimensión infinita (para mayores referencias ver [14]). Durante el desarrollo de dicho trabajo se introdujo el operador de derivada para variables aleatorias en el espacio de Wiener, cuya definición se asemeja en ciertos aspectos a la derivada de Frechét. Posteriormente esta teoría fue enriquecida con el trabajo de Stroock, Bismut y Watanabe (para mayores referencias ver [10], [11], [12] y [6]).

Entre las subsecuentes contribuciones al desarrollo del cálculo de Malliavin resaltan dos aplicaciones al área de finanzas, realizadas por Ocone en 1989 y por Fournié en 1999. Ocone dio una interpretación de la fórmula de Clark en términos de la derivada de Malliavin; dicho resultado se conoce actualmente como fórmula de Clark-Ocone y se utiliza en la replicación de portafolios financieros. Posteriormente, Fournié utilizó la fórmula de integración por partes para desarrollar un método numérico computacionalmente económico para el cálculo de los parámetros de sensibilidad de derivados financieros.

Otra importante aplicación del cálculo de Malliavin consiste en el uso del operador divergencia (definido como el adjunto del operador de derivada y conocido también con el nombre de integral de Skorohod) como una generalización de la integral estocástica. Esta interpretación facilita el estudio de integrales respecto a procesos anticipantes (para mayores referencias ver [8] y [32]) y respecto al movimiento Browniano Fraccionario (mayores referencias ver [3]).

El presente trabajo se enfoca en el estudio de los conceptos básicos de la teoría del cálculo de Malliavin y en el desarrollo de resultados distribucionales asintóticos para sucesiones de integrales de Skorohod múltiples. Adicionalmente se mencionarán algunas aplicaciones de dichos resultados para el movimiento Browniano fraccionario.

[1]Dicha condición lleva el nombre de “condición de Hörmander” y se conocía antes del trabajo de Malliavin, sin embargo, las herramientas que se utilizaban en ese tiempo eran muy distintas a las que el desarrolló.

El trabajo consta de dos capítulos y un apéndice. El primero es de carácter introductorio, y se divide en tres secciones. La primera de ellas se dedica al estudio de los procesos gaussianos isonormales y a la descomposición en caos de variables aleatorias cuadrado integrables. En el caso particular en que el proceso gaussiano isonormal subyacente es un ruido blanco, se demostrará que los términos de la descomposición en caos pueden expresarse de manera sencilla en términos de integrales de Itô múltiples.

En la segunda y tercera sección se definirán los operadores de derivada y divergencia, se describirán sus dominios y se estudiará el comportamiento que tienen en términos de la descomposición en caos. Veremos que en el caso del ruido blanco, la descomposición en caos y los operadores de derivada y divergencia guardan una relación similar a la que tienen las series de potencias con los operadores de derivada y antiderivada para funciones reales. Adicionalmente se estudiará el comportamiento de dichos operadores cuando se les aplica un condicionamiento respecto a cierta clase de σ-algebras. Esto nos permitirá mostrar que la integral de Skorohod coincide con la integral de Itô, en caso de que esta exista.

El segundo capítulo se dedica al estudio de las leyes límite de sucesiones de integrales de Skorohod y se divide a su vez en dos secciones. En la primera se estudiará el teorema del límite central para integrales de Skorohod múltiples, el cual establece condiciones para la convergencia en ley de integrales de Skorohod múltiples a una mezcla de variables aleatorias gaussianas. Como aplicaciones inmediatas de dicho resultado se encuentran la descripción de un nuevo criterio para la convergencia en ley de integrales de Itô múltiples y la convergencia de funcionales cuadráticos del movimiento Browniano. En la segunda sección se presentaran algunas aplicaciones al movimiento Browniano fraccionario, en particular se describirá el comportamiento asintótico de las p-variaciones de Hermite de dicho proceso (para mayores referencias ver [17] y [19]). El material que se presentará en este capítulo está principalmente basado en [18].

En el apéndice se presentan algunos resultados de análisis funcional y productos tensoriales, necesarios para el desarrollo del trabajo. El material referente al análisis funcional puede consultarse en 1001[30] mientras que el material de tensoriales puede consultarse en 1001[29].

Capítulo 1

Elementos de la teoría del cálculo de Malliavin

En este capítulo introduciremos algunos de los conceptos y resultados básicos de la teoría del cálculo de Malliavin. Se hará énfasis principalmente en la descomposición en caos de variables aleatorias cuadrado integrables, y posteriormente, en las propiedades del operador de derivada de Malliavin y su operador adjunto, conocido también como integral de Skorohod.

1.1. Descomposición en caos

En esta sección se mostrará el teorema de descomposición en caos. A groso modo, dicho teorema afirma que las variables aleatorias medibles respecto a un movimiento browniano se pueden descomponer como suma de variables aleatorias más "sencillas". No obstante, esta descomposición se puede generalizar a variables aleatorias medibles respecto a una clase más rica de procesos conocidos como procesos gaussianos isonormales. Este tipo de procesos incluyen al movimiento Browniano, a las medidas aleatorias gaussianas y al movimiento browniano fraccionario. Por ello, en lo sucesivo se trabajará en el contexto general de dichos procesos, aunque para ganar intuición es bueno pensar en el caso particular del movimiento browniano.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y H un espacio de Hilbert separable con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ y norma inducida $|| \cdot ||_H$.

Definición 1. *Un proceso estocástico $\{W(h)\}_{h \in H}$, es un proceso gaussiano isonormal si satisface las siguientes propiedades*

1. *Para cualesquiera $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $h_1, ..., h_n \in H$ la variable $\lambda_1 W(h_1) + \cdots + \lambda_n W(h_n)$ tiene distribución normal.*

2. *Las variables $W(h)$ son centradas y su función de covarianza está dada por*

$$\mathbb{E}[W(h_1)W(h_2)] = \langle h_1, h_2 \rangle_H .$$

Con el fin de familiarizarse con los conceptos y resultados que en lo sucesivo se presentarán para espacios de Hilbert H arbitrarios (por ejemplo la definición de proceso gaussiano isonormal), es de gran utilidad tener siempre presente el caso $H = L^1([0,1],\mathrm{dt})$, donde d$t$ es la medida de Lebesgue. De esta manera, la teoría resultante cobra un enfoque de cálculo estocástico, y consecuentemente, es hasta cierto punto más intuitiva. Por ejemplo, un proceso W con las características enunciadas previamente, puede obtenerse simplemente al integrar funciones deterministas respecto al movimiento browniano estándar (ver ejemplo 1).

Cabe mencionar que para fines del presente escrito no se está interesado en estudiar propiemente a los procesos gaussianos isonormales. Más bien se pretende estudiar a los funcionales de dicho proceso con ayuda de la estructura hilbertiana que tiene su función de covarianzas.

Note que la aplicación $h \mapsto W(h)$ es lineal casi seguramente, ya que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(W(\lambda h_1 + h_2) - \lambda W(h_1) - W(h_2))^2] \\
&\qquad = \mathbb{E}[W(\lambda h_1 + h_2)^2 + \lambda^2 W(h_1)^2 + W(h_2)^2 + \\
&\qquad\quad 2(-\lambda W(\lambda h_1 + h_2)W(h_1) - W(h_2)W(\lambda h_1 + h_2) + \lambda W(h_1)W(h_2))] \\
&\qquad = ||\lambda h_1 + h_2||_H^2 + \lambda^2 ||h_1||_H^2 + ||h_2||_H^2 + \\
&\qquad\quad 2(-\lambda \langle \lambda h_1 + h_2, h_1\rangle_H - \langle h_2, \lambda h_1 + h_2\rangle_H + \lambda \langle h_1, h_2\rangle_H) \\
&\qquad = \lambda^2 ||h_1||_H^2 + ||h_2||_H^2 + 2\langle \lambda h_1, h_2\rangle_H + \lambda^2 ||h_1||_H^2 + ||h_2||_H^2 + \\
&\qquad\quad 2(-\lambda^2 ||h_1||_H^2 - \lambda \langle h_2, h_1\rangle_H - \lambda \langle h_2, h_1\rangle_H - ||h_2||_H^2 + \lambda \langle h_1, h_2\rangle_H) = 0.
\end{aligned}$$

Es posible mostrar mediante el teorema de consistencia de Kolmogorov, que dado cualquier espacio de Hilbert separable H existe un proceso gaussiano isonormal indexado por H. Para verificar la condición de consistencia basta definir, para toda colección finita de elementos $h_1, ..., h_n \in H$, la familia de medidas de probabilidad dadas por la densidad

$$f_{h_1,...,h_n}(x_1, ..., x_n) \quad := \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(x_1, ..., x_n)^T \Sigma^{-1} (x_1, ..., x_n) \right\},$$

con $\Sigma_{i,j} = \langle h_i, h_j\rangle_H$. Es decir,

$$\mu_{h_1,...,h_n}(\mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_n) \quad := \quad f_{h_1,...,h_n}(x_1, ..., x_n)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Debido a que la función de distribución normal multivariada está completamente determinada por su matriz de covarianzas, para verificar que la familia de medidas de probabilidad $\mu_{h_1,...,h_n}$ es consistente, es suficiente mostrar lo siguiente:

Si $h_1, ..., h_n, v_1, ..., v_{n+m} \in H$ son tales que $h_j = v_{i_j}$, para ciertos subindices $i_1, ..., i_j \leq n + m$, entonces las matrices de covarianzas Σ^1 y Σ^2, asociadas a las medidas de probabilidad $\mu_{h_1}, ..., \mu_{h_n}$ y $\mu_{v_1}, ..., \mu_{v_{n+m}}$ respectivamente, satisfacen la relación

$$\Sigma^1_{j,k} = \Sigma^2_{i_j,i_k}.$$

Esto se sigue del hecho de que $\Sigma^1_{k,j} = \langle h_k, h_j \rangle_H = \langle v_{i_k}, v_{i_j} \rangle_H = \Sigma^2_{i_k,i_j}$.

A continuación se presentan algunos ejemplos estándar de procesos gaussianos isonormales

Ejemplo 1 (**Movimiento browniano estándar**). *Para $T > 0$ fijo considere el espacio medible $([0,T], \mathcal{B}([0,T]), dt)$, donde dt denota la medida de Lebesgue. Sea H el espacio de Hilbert definido por $H := L^2([0,T], dt)$, con producto interno dado por $\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t)g(t)dt$. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento browniano real definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Entonces el proceso*

$$W(f) = \int_0^T f(t) dW_t \qquad f \in H,$$

define un proceso gaussiano isonormal en H.

Ejemplo 2 (**Ruido blanco basado en μ**). *Dado un espacio medible $(\mathbb{T}, \mathcal{G}, \mu)$, donde μ es una medida σ-finita sin átomos, defina el espacio de Hilbert H como $H := L^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}), \mu)$ con el producto interno usual. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $B : \Omega \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ una medida aleatoria Gaussiana en $\mathbb{T}$. Esto quiere decir que $W' : \Omega \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ cumple que para todo $A \in \mathbb{T}$, la variable aleatoria $W'(\cdot, A)$ tiene distribución normal de media cero y varianza $\mu(A)$, y es tal que para cualquier colección de conjuntos ajenos a pares $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$, se tiene que*

$$W'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} W'(B_n) \qquad c.s. \tag{1.1}$$

Es importante notar que la condición anterior no necesariamente implica para casi todo $\omega \in \Omega$ la función $W'(\cdot, \omega)$ sea una medida signada[1]*. Los procesos gaussianos en $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ quedan caracterizados por su valor en las funciones simples, y por ende, podemos construír a un proceso gaussiano isonormal en H simplemente definiendo*

$$W(\mathbb{1}_A) := B(\cdot, A).$$

Este tipo de procesos gaussianos isonormales son más generales que los del ejemplo 1 y se conocen con el nombre de ruido blanco (para referencias sobre la construcción del ruido blanco ver [5] o [27], y para referencias sobre medidas gaussianas ver [13])

Ejemplo 3 (**Movimiento Browniano fraccionario**). *Considere el espacio H_0 de funciones reales de la forma $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,t_k]}(x) a_k$, donde $t_k \in \mathbb{R}^+$ y $a_k \in \mathbb{R}$. Podemos dotar a H_0 con el producto interno definido por*

$$\left\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, \mathbb{1}_{[0,s]} \right\rangle_H = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

[1] Para esto debería existir un conjunto $\Omega' \subset \Omega$ de probabilidad 1 en el cual para toda sucesión de conjuntos ajenos $\{B_n\}_n$ la ecuación (1.1) fuera válida, lo cual es mucho más fuerte que pedir que para toda sucesión de conjuntos exista un espacio de medida total en el cual (1.1) sea válida.

Entonces $H = \overline{H}_0$ *es un espacio de Hilbert, y el mapeo*

$$\mathbb{1}_{[0,t]} \longmapsto W_t$$

puede extenderse linealmente a una función $h \mapsto W(h)$ *definida para todo* $h \in H$*. Entonces* $\{W(h)\}_{h\in H}$ *es un proceso gaussiano isonormal.*

A continuación se definirá una clase de polinomios con propiedades de ortogonalidad respecto a la medida gaussiana conocidos como polinomios de Hermite. Se enunciarán algunas de sus propiedades, aunque no se hará mucho incapié en la naturaleza e intuición de dichos polinomios (para ello se recomienda ver [16]). Más adelante, utilizaremos estos objetos para demostrar el teorema de descomposición en caos.

Definición 2. *Definimos al* n*-ésimo polinomio de Hermite, el cual denotamos por* H_n*, como la función*[2]

$$H_n(x) = \frac{1}{n!}(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1.2}$$

Es fácil verificar que dicha función es polinomial, y que se satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= H_{n-1}(x) \\ (n+1)H_n(x) &= xH_n(x) + H_{n-1}(x) \\ H_n(-x) &= (-1)^n H_n(x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

La siguiente propiedad nos permite ortogonalizar variables aleatorias Gaussianas mediante su evaluación en polinomios de Hermite de grado distinto, esto sin importar el grado de dependencia que estas tengan. Esta propiedad es clave para mostrar el teorema de descomposición en caos.

Lema 1. *Sean* X *y* Y *dos variables aleatorias con media cero, varianza unitaria, y distribución conjunta normal estándar. Entonces para* $n, m \geq 0$ *se tiene*

$$\mathbb{E}[H_n(X)H_m(Y)] = \begin{cases} 0 & si\ n \neq m \\ \frac{1}{n!}(\mathbb{E}[XY])^n & si\ n = m \end{cases}$$

Demostración. Considere las variables aleatorias

$$G(s,t) = \exp\left\{sX - \frac{s^2}{2}\right\} \exp\left\{tY - \frac{t^2}{2}\right\} \qquad s,t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.4}$$

Note que G es infinitamente derivable respecto a las variables s y t, más aún, sus derivadas son de la forma

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial s^m \partial t^n} G(s,t) = \left(\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} X^i Y^j P_{i,j}(s) \right) \exp\{sX\} \exp\{tY\} \tag{1.5}$$

[2] Algunos autores definen a los polinomios de Hermite sin el término $\frac{1}{n!}$ en la ecuación (1.2).

para ciertos polinomios $P_{i,j}$. Ya que las funciones polinomiales en las variables x y y (en particular la función entre paréntesis tomando como argumentos X y Y en la igualdad (1.5)) están dominadas por funciones de la forma $C_3 \exp\{C_1|x| + C_2|y|\}$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}^+$, podemos deducir de (1.5), que para $s, t \in [0, T]$ y $n, m \in \mathbb{N}$ arbitrarias existe una constante $K_T \geq 0$ que depende de T tal que

$$\left| \frac{\partial^{n+m}}{\partial s^m \partial t^n} G(s,t) \right| \leq K_T \exp\{s|X| + t|Y|\} \in L^1(\Omega), \tag{1.6}$$

Por otro lado, tomando esperanza en (1.4), obtenemos

$$\mathbb{E}[G(s,t)] = \exp\{st\mathbb{E}[XY]\}. \tag{1.7}$$

Utilizando la igualdad (1.7), así como el teorema de derivación sobre la integral (el cual es válido gracias a la condición (1.6)), podemos calcular las derivadas en ambos lados de la ecuación (1.4), obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m} \exp\left\{sX - \frac{s^2}{2}\right\} \exp\left\{tY - \frac{t^2}{2}\right\}\right] \\
&\qquad = \frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m} \mathbb{E}\left[\exp\left\{sX - \frac{s^2}{2}\right\} \exp\left\{tY - \frac{t^2}{2}\right\}\right] \\
&\qquad = \frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m} \exp\{st\mathbb{E}[XY]\} \\
&\qquad = \mathbb{E}[XY]^m \frac{\partial^n}{\partial s^n} s^m \exp\{st\mathbb{E}[XY]\} \\
&\qquad = \mathbb{E}[XY]^m \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{\partial^k}{\partial s^k} s^m\right) \left(\frac{\partial^{n-k}}{\partial s^{n-k}} \exp\{st\mathbb{E}[XY]\}\right) \\
&\qquad = \mathbb{E}[XY]^m \sum_{k=0}^{n \wedge m} \binom{n}{k} \frac{m!}{(m-k)!} s^{m-k} t^{n-k} \mathbb{E}[XY]^{n-k} \exp\{st\mathbb{E}[XY]\}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Si evaluamos en $(t, s) = (0, 0)$, el lado derecho de la igualdad se reduce a $\mathbb{1}_{\{n=m\}}\mathbb{E}[XY]^n$, y por ende

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m} \exp\left\{sX - \frac{s^2}{2}\right\} \exp\left\{tY - \frac{t^2}{2}\right\} \Bigg|_{(t,s)=(0,0)}\right] = \mathbb{1}_{\{m=n\}}\mathbb{E}[XY]^n. \tag{1.9}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m} & \exp\left\{sX - \frac{s^2}{2}\right\} \exp\left\{tY - \frac{t^2}{2}\right\} \\
&= \frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m} \exp\left\{-\frac{(X-s)^2}{2} + \frac{1}{2}X^2\right\} \exp\left\{-\frac{(Y-t)^2}{2} + \frac{1}{2}Y^2\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}X^2\right\} \frac{\partial^n}{\partial s^n} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\}\Bigg|_{y=X-s} (-1)^n \times \qquad (1.10) \\
&\quad \exp\left\{\frac{1}{2}Y^2\right\} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\}\Bigg|_{z=Y-t} (-1)^m.
\end{aligned}$$

Evaluando en $(s,t) = (0,0)$, el lado derecho de la igualdad se reduce a $H_n(X)H_m(Y)$. Por lo tanto, de las ecuaciones (1.10) y (1.9) se sigue el resultado. □

Lema 2. *Sea $\mathcal{G}$ la σ-álgebra generada por las variables $W(h)$. Entonces las variables $e^{W(h)}$ generan a $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.*

Demostración. Considere el espacio cerrado $W := \overline{\text{span}\{e^{W(h)}\ ;\ h \in H\}}$ (donde $\overline{A}$ denota a la cerradura del conjunto $A \subset H$). Por el teorema de descomposición ortogonal (ver Apéndice, lema 9), se tiene que $L^2(\Omega, \mathbb{P}) = W \bigoplus W^\perp$, y por ende, para probar el lema 2 basta verificar que $W^\perp = 0$. Para ello considere una variable $X \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ tal que $\mathbb{E}[X \exp\{W(h)\}] = 0$ para toda $h \in H$. De aquí se sigue, utilizando la linealidad del mapeo $h \mapsto W(h)$, que para todo conjunto de índices $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^+$, y para cualquier elección de vectores $h_1, ..., h_n \in H$,

$$\mathbb{E}\left[X \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} t_k W(h_k)\right\}\right] = 0.$$

Note que el lado izquierdo de la igualdad es la transformada de Laplace de la medida en $\mathbb{R}^n$ dada por $\nu(B) = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B(W(h_1), ..., W(h_n))]$[3], con $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Esto implica que $\nu = 0$ y por ende $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = 0$ para toda $A \in \sigma(W(h_1, ..., W(h_n)))$, de donde se sigue el resultado. □

A partir del resultado anterior se tiene lo siguiente: para $n \in \mathbb{N}$ fijo definimos el subespacio $\mathcal{H}_n \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ como

$$\mathcal{H}_n \quad = \quad \overline{\text{span}\{H_n(W(h)) \mid ||h|| = 1)\}}, \qquad (1.11)$$

dicho espacio se conoce como el n-ésimo caos de Wiener. Note que las variables $W(h)$, con $h \in H$ de norma unitaria son normales estándar, por lo que, del lema 1 se sigue que los espacios $\mathcal{H}_n$ y $\mathcal{H}_m$ son ortogonales para $n \neq m$.

[3]Para verificar esto se puede mostrar, utilizando el método usual, que para toda función medible y acotada $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se satisface la ecuación $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\nu(\mathrm{d}x) = \mathbb{E}[Xg(W(h_1, ..., W(h_n)))]$

Observación 1. *Considere el espacio* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu)$*, donde* ν *es la medida gaussiana estándar en* $\mathbb{R}$*, el espacio de Hilbert* $H = \mathbb{R}$ *con el producto interno usual y el proceso gaussiano isonormal* $W(x) = hx$*. Por el lema anterior se tiene que los polinomios* $H_n(x)$ *son ortogonales con el producto interno de* $L^2(\Omega, \nu)$*. En particular, el conjunto* $H_0, ..., H_n$ *es linealmente independiente, lo cual implica que* $dim(span\{H_0, ..., H_n\}) = n$*. Por lo tanto, podemos concluír que* $span\{H_0, ..., H_n\} = \mathbb{R}_n[x]$*, donde* $\mathbb{R}_n[x]$ *denota a los polinomios de grado menor o igual a* n

Teorema 1. *Sea* $\mathcal{G}$ *la* σ*-álgebra generada por el proceso* W*. Entonces el espacio* $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *puede descomponerse como suma directa de los espacios ortogonales* $\mathcal{H}_n$*:*

$$L^2(\Omega, \mathcal{G}, P) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n, \tag{1.12}$$

donde $\mathcal{H}_n$ *están definidos por* $\{\mathcal{H}_n\}_{n\geq 1}$*.*

Demostración. Sabemos que los espacios $\mathcal{H}_n$ son ortogonales, por lo que basta ver que generan a $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Utilizando un razonamiento análogo a la prueba del lema 2, vemos que es suficiente mostrar que si $X \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ es una variable aleatoria tal que $X \perp \mathcal{H}_n$ para todo n, entonces $X = 0$ c.s. Para ello tomamos $X \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\mathbb{E}[XH_n(W(h))] = 0$$

para todo $h \in H$. Por la observación 1, los polinomios de grado menor o igual a n pueden escribirse como combinación lineal de polinomios de Hermite de grado menor o igual a n, consecuentemente, existen constantes $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ tales que, para $t \in \mathbb{R}^+$ arbitrario

$$\mathbb{E}[XW(h)^k] \;=\; \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbb{E}[H_j(W(h_j))],$$

y por ende, a partir de la condición $\mathbb{E}[XH_n(W(h))] = 0$, se puede deducir que

$$\mathbb{E}[X \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(tW(h))^k] = 0.$$

Finalmente, por el teorema de convergencia dominada[4] se concluye que

$$\mathbb{E}[X \exp\{tW(h)\}] = 0,$$

y del lema 2 se sigue que $X = 0$.

□

En lo sucesivo denotaremos por $J_n : L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) \to \mathcal{H}_n$ a la proyección sobre el n-ésimo caos de Wiener. A partir del lema 1 se puede concluir lo siguiente

[4] La sucesión $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(W(h))^k$ está dominada por $\exp\{|W(h)|\} \in L^1(\Omega)$

Corolario 1. *Sea $\mathcal{P}_n^0$ el espacio de variables $p(W(h_1), ..., W(h_k))$, donde p es un polinomio real de grado n sobre k variables y sea $\mathcal{P}_n := \overline{\mathcal{P}_n^0}$ (donde, $\overline{A}$ denota la cerradura del subconjunto $A \subset H$), entonces*

$$\bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}_n = \mathcal{P}_n. \tag{1.13}$$

Demostración. La inclusión $\bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}_n \subset \mathcal{P}_n$ es directa. Para verificar la inclusión recíproca note que, por el teorema 1, toda variable $X \in \mathcal{P}_n$ tiene la forma

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k,$$

con $X_k \in \mathcal{H}_k$ y por ende, puede ser expresada en la forma $X = Y_X + Z_X$, con $Y_X \in \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}_k$ y $Z_X \in \bigoplus_{k=n+1}^{\infty} \mathcal{H}_k$. Basta mostrar entonces que $Z_X = 0$ para todo $X \in \mathcal{P}_n$, o equivalentemente, que $\mathcal{H}_m \perp \mathcal{P}_n$ para todo $m > n$. Para mostrar esto considere un polinomio p, de k variables, orden n, y de la forma

$$p(x_1, ..., x_k) = \sum_{i_1, ..., i_k = 0}^{n} a_{i_1, ..., i_k} x_1^{\alpha_{i_1}} \cdots x_k^{\alpha_{i_k}},$$

y sea $Y \in \mathcal{P}_n$ de la forma

$$Y \;=\; p(W(h_1), ..., W(h_k)), \tag{1.14}$$

para ciertos $h_k \in H$. Queremos ver que para $h \in H$ con $||h|| = 1$ arbitrario, se tiene que $\mathbb{E}[YH_m(W(h))] = 0$ para $m > n$. Considere elementos $e_1, ..., e_{k-1} \in H$ tales que el conjunto $\{e_1, ..., e_{k-1}, h\}$ genera a $\text{span}\{h_1, ..., , h_n\}$, y es ortonormal (y consecuentemente $W(e_i), ..., W(e_{k-1}), W(h)$ son independientes). Se tiene entonces que $h_j = \sum_{i=1}^{k-1} c_{j,i} e_i + b_j h$ para ciertas constantes $c_{j,i}, b_j \in \mathbb{R}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[YH_m(W(h))] \\
&\quad = \sum_{i_1, ..., i_k = 0}^{n} a_{i_1, ..., i_k} \mathbb{E}\left[H_m(W(h)) \prod_{p=1}^{k} W(h_p)^{\alpha_{i_p}} \right] \\
&\quad = \sum_{i_1, ..., i_k = 0}^{n} a_{i_1, ..., i_k} \mathbb{E}\left[H_m(W(h)) \prod_{p=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k-1} c_{p,j} W(e_j) + b_p W(h) \right)^{\alpha_{i_p}} \right] \\
&\quad = \sum_{i_1, ..., i_k = 0}^{n} a_{i_1, ..., i_k} \mathbb{E}\left[H_m(W(h)) \prod_{p=1}^{k} \sum_{l=0}^{\alpha_{i_p}} \binom{\alpha_{i_p}}{l} \left(\sum_{j=1}^{k-1} c_{p,j} W(e_j) \right)^{\alpha_{i_p - l}} b_p^l W(h)^l \right],
\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[YH_m(W(h))] \\
&= \sum_{\substack{0\le i_1,\dots,i_k\le n\\ 0\le l_1\le \alpha_{i_1}\\ \dots\\ 0\le l_k\le \alpha_{i_k}}} a_{i_1,\dots,i_k}\mathbb{E}\left[H_m(W(h))\prod_{p=1}^{k}\sum_{l=0}^{\alpha_{i_p}}\binom{\alpha_{i_p}}{l}\left(\sum_{j=1}^{k-1}c_{p,j}W(e_j)\right)^{\alpha_{i_p}-l} b_p^l W(h)^l\right] \\
&= \sum_{\substack{0\le i_1,\dots,i_k\le n\\ 0\le l_1\le \alpha_{i_1}\\ \dots\\ 0\le l_k\le \alpha_{i_k}}} a_{i_1,\dots,i_k}\mathbb{E}\left[\prod_{p=1}^{k}\sum_{l=0}^{\alpha_{i_p}}\binom{\alpha_{i_p}}{l}\left(\sum_{j=1}^{k-1}c_{p,j}W(e_j)\right)^{\alpha_{i_p}-l} b_p^l\right]\mathbb{E}[H_m(W(h))W(h)^l].
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Ya que los monomios x^l pueden expresarse como combinación lineal de polinomios de Hermite de grado menor a n, los términos $\mathbb{E}\left[H_m(W(h))W(h)^l\right]$ en la ecuación anterior pueden expresarse como combinación lineal de términos de la forma $\mathbb{E}\left[H_m(W(h))H_l(W(h))\right]$ (los cuales son iguales a cero puesto que $l \le n < m$), y por ende $\mathbb{E}\left[H_m(W(h))W(h)^l\right] = 0$. Esto muestra que $\mathbb{E}[YH_m(W(h))] = 0$ para toda Y de la forma (1.14). El resultado se deduce para $Y \in \mathcal{P}_n$ arbitraria mediante un argumento de aproximación. $\square$

Resulta natural preguntarnos de que manera podemos calcular los términos que componen al caos de una variable aleatoria. Esto puede responderse de manera relativamente sencilla utilizando una base del espacio de Hilbert H. Suponga que H es un espacio de dimensión infinita con base ortonormal $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Denotaremos por Λ al conjunto de sucesiones $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ tales que $a_k = 0$ salvo en un número finito de índices, utilizaremos la notación $a! = \prod_{k=1}^{\infty}(a_k!)$ y $|a| = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Para $a \in \Lambda$ definimos el polinomio de Hermite generalizado H_a por

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{H_a} & \mathbb{R} \\
x & \longmapsto & \prod_{k=1}^{\infty} H_{a_k}(x_k)
\end{array}
$$

y las variables

$$
\Phi_a = \prod_{k=1}^{\infty} H_{a_k}(W(e_k)). \tag{1.16}
$$

Note que $W(e_k)$ y $W(e_j)$ son variables normales estándar independientes para $j \neq k$ por lo que del lema 1 se sigue que, para $a, b \in \Lambda$ arbitrarios de la forma $a = (a_k;\ k \ge 1)$, $b = (b_k;\ k \ge 1)$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Phi_a\Phi_b\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{\infty} H_{a_k}(W(e_k))H_{b_k}(W(e_k))\right] \\
&= \prod_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[H_{a_k}(W(e_k))H_{b_k}(W(e_k))\right] \\
&= \begin{cases} \frac{1}{a!} & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases}.
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Proposición 1. *Considere las variables* $\{\Phi_a\}_{a\in\Lambda}$*, donde* Φ_a *está definida por* (1.16)*. Para* $n \geq 1$*, las variables aleatorias*

$$\{\Phi_a, \ |a| = n\}$$

forman un sistema ortonormal completo de $\mathcal{H}_n$*.*

Demostración. Primeramente verificaremos que $\mathcal{P}_n = \text{span}\{\Phi_a \mid a \in \Lambda, \quad |a| \leq n\}$, para lo cual procedemos de la siguiente manera: comenzaremos mostrando la inclusión

$$\mathcal{P}_n \subset \text{span}\{\Phi_a \mid a \in \Lambda, \quad |a| \leq n\}.$$

considere la variable aleatoria

$$P_n = p_n(W(h_1), ..., W(h_k)) \in \mathcal{P}_n, \tag{1.18}$$

donde p_n es un polinomio de grado n en k variables con $h_1, ..., h_k \in \text{span}\{W(e_1), ..., W(e_N)\}$, para cierto $N \in \mathbb{N}$. Expresando los términos $W(h_k)$ como combinación lineal de términos de la forma $W(e_j)$, y sustituyendo dichas expresiones en la ecuación (1.18), se puede deducir que

$$\begin{aligned} P_n &= q_n(W(e_1), ..., W(e_N)) \\ &= \sum_{i_1,...,i_N=0}^{n} a_{i_1,...,i_N} (W(e_1))^{\alpha_{i_1}} \cdots (W(e_N))^{\alpha_{i_N}} \end{aligned} \tag{1.19}$$

para cierto polinomio q_n de grado n en N variables. Ya que los términos $(W(e_1))^{\alpha_{i_k}}$ en la igualdad (1.19) pueden expresarse como combinación lineal de polinomios de Hermite de grado menor o igual a α_{i_k}, se puede concluir que las variables $(W(e_1))^{\alpha_{i_1}} \cdots (W(e_N))^{\alpha_{i_N}}$, y consecuentemente la variable P_n, pertenecen a $\text{span}\{\Phi_a \mid a \in \Lambda, \quad |a| \leq n\}$, lo cual demuestra la afirmación para el caso en que P_n tiene la forma (1.18).

Para mostrar que $P_n \in \text{span}\{\Phi_a \mid a \in \Lambda, \quad |a| \leq n\}$ para $P_n \in \mathcal{P}_n$ arbitraria (es decir, sin suponer que los elementos $h_1, ..., h_n \in \text{span}\{e_1, ..., e_N\}$ para cierta $N \in \mathbb{N}$), el resultado se sigue de aproximar a P_n con una sucesión $\{P_n^{(m)}\}_{m\geq 1}$, de elementos de la forma (1.18) como se muestra a continuación: supongamos que Y tiene la forma (1.18), esta vez sin la restricción de que $h_1, ..., h_k \in \text{span}\{e_1, ..., e_N\}$. Para cada vector $h_j \in H$, y para todo $N \in \mathbb{N}$, se tiene la siguiente igualdad

$$h_j = v_{j,N} + r_{j,N},$$

donde

$$v_{j,N} = \sum_{i=1}^{N} \langle h_j, e_i \rangle_H e_i, \qquad r_{j,N} = \sum_{i=N+1}^{\infty} \langle h_j, e_i \rangle_H e_i.$$

Usando el teorema de binomio, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\prod_{l=1}^{n} W(h_l)^{\alpha_l} &= \prod_{l=1}^{n} (W(v_{j,N}) + W(r_{j,N}))^{\alpha_l} \\
&= \sum_{\substack{0\leq j_1\leq \alpha_1 \\ \cdots \\ 0\leq j_n\leq\alpha_n}} \prod_{l=1}^{n} \binom{\alpha_l}{j_j} W(v_{l,N})^{\alpha_l - j_l} W(r_{l,N})^{j_l} \\
&= \prod_{l=1}^{n} W(v_{l,N})^{\alpha_l} + \sum_{\substack{0\leq j_1\leq \alpha_1 \\ \cdots \\ 0\leq j_n\leq\alpha_n, \\ j_1\cdots j_n\neq 0}} \prod_{l=1}^{n} \binom{\alpha_l}{j_j} W(v_{l,N})^{\alpha_l - j_l} W(r_{l,N})^{j_l}.
\end{aligned}$$

Por lo probado anteriormente, el término $\prod_{l=1}^{n} W(v_{l,N})^{\alpha_l} \in \text{span}\{\Phi_a \mid |a| \leq n\}$. A continuación probaremos que los términos de la suma en el lado derecho de la igualdad convergen a cero en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$, de donde se sigue que $\prod_{l=1}^{n} W(v_{l,N})^{\alpha_l}$ converge a Y en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$, y por ende, $Y \in \mathcal{H}_n$. Para probar esto, supongamos sin pérdida de generalidad que $j_1 \neq 0$. Entonces, por la desigualdad de Hölder generalizada se tiene que

$$\begin{aligned}
&||\prod_{l=1}^{n} W(v_{l,N})^{\alpha_l - j_1} W(r_{l,N})^{j_l}||^2_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} \\
&\quad = ||W(r_{1,N})^2 W(v_{1,N})^{2(\alpha_l - j_1)} W(r_{1,N})^{2(j_1-1)} \prod_{l=2}^{n} W(v_{l,N})^{2(\alpha_l - j_1)} W(r_{l,N})^{2j_l}||_{L^1(\Omega)} \\
&\quad \leq ||W(r_{1,N})||_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} ||W(v_{1,N})^{\alpha_l - j_1} W(r_{1,N})^{j_1-1} \prod_{l=2}^{n} W(v_{l,N})^{\alpha_l - j_1} W(r_{l,N})^{j_l}||_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} \\
&\quad = ||W(r_{1,N})||_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} ||W(v_{1,N})^{2(\alpha_l - j_1)} W(r_{1,N})^{2(j_1-1)} \prod_{l=2}^{n} W(v_{l,N})^{2(\alpha_l - j_1)} W(r_{l,N})^{2j_l}||_{L^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

y por lo tanto, existen ciertas constantes $\beta_l, \gamma_l \geq 0$ que no dependen de N, tales que

$$\begin{aligned}
&||\prod_{l=1}^{n} W(v_{l,N})^{\alpha_l - j_1} W(r_{l,N})^{j_l}||^2_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} \\
&\qquad \leq ||W(r_{1,N})||_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} ||W(v_{1,N})^{2(\alpha_l - j_1)}||^{2n}_{L^{2n}(\Omega)} ||W(r_{1,N})^{2(j_1-1)}||^{2n}_{L^{2n}(\Omega)} \times \\
&\qquad\quad \prod_{l=2}^{n} ||W(v_{l,N})^{2(\alpha_l - j_1)}||^{2n}_{L^{2n}(\Omega)} ||W(r_{l,N})^{2j_l}||^{2n}_{L^{2n}(\Omega)} \\
&\qquad = ||W(r_{1,N})||_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} \prod_{l=1}^{n} \mathbb{E}\left[|W(v_{l,N})|^{\beta_{j_1}}\right] \mathbb{E}\left[|W(r_{l,N})|^{\gamma_l}\right] \\
&\qquad = ||r_{1,N}||^2_H \prod_{l=1}^{n} \mathbb{E}\left[|W(v_{l,N})|^{\beta_{j_1}}\right] \mathbb{E}\left[|W(r_{l,N})|^{\gamma_l}\right].
\end{aligned}$$

Es posible verificar que los términos $\mathbb{E}\left[W(v_{l,N})^{\beta_l}W(r_{l,N})^{\gamma_l}\right]$ en la igualdad anterior están acotados, mientras que el término $||r_{l,N}||_H$ tiende a cero cuando $N \to \infty$. De aquí concluimos que $\prod_{l=1}^{n} W(v_{l,N})^{\alpha_l - j_1}W(r_{l,N})^{j_l}$ converge a cero en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$, y como se mencionó previamente, de aquí se sigue que $Y \in \mathcal{H}_n$, y por lo tanto $\mathcal{P}_n = \text{span}\{\Phi_a \mid a \in \Lambda, \quad |a| \leq n\}$.

Utilizando la igualdad $\mathcal{P}_n = \text{span}\{\Phi_a \mid a \in \Lambda, \quad |a| \leq n\}$, la ortogonalidad de los espacios $\text{span}\{\Phi_a \mid a \in \Lambda\ |a| = n\}$ y el corolario 1, se tiene que

$$\bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}_k = \bigoplus_{k=0}^{n} \text{span}\{\Phi_a \mid a \in \Lambda, \quad |a| = k\}.$$

Finalmente, como $\text{span}\{\Phi_a \mid a \in \Lambda, \quad |a| = k\}$ es ortogonal a $\mathcal{H}_j$ para $j \neq k$ se concluye que $\mathcal{H}_k = \text{span}\{\Phi_a \mid a \in \Lambda, \quad |a| = k\}$. $\square$

Sea $a \in \Lambda$, en lo sucesivo denotaremos por $H^{\otimes n}$ al n-ésimo producto tensorial de H (para mayores referencias ver Apéndice, sección de productos tensoriales), por $H^{\widehat{\otimes}}$ al n-ésimo producto tensorial simétrico, por $\text{symm}(\otimes_{k=1}^{\infty} e_k^{\otimes a_k})$ a la simetrización de $\otimes_{k=1}^{\infty} e_k^{\otimes a_k}$. Note que $H^{\otimes n}$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$||h_1 \otimes \cdots \otimes h_n, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n||_{H^{\otimes n}} = \prod_{k=1}^{n} \langle h_k, v_k \rangle_H ,$$

y que $H^{\widehat{\otimes} n}$ es un subespacio de Hilbert de $H^{\otimes n}$. Como consecuencia de la proposición anterior se tiene que las variables aleatorias $\{\Phi_a\}_{a \in \Lambda}$ forman un sistema ortonormal de $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ y por ende, se tiene el siguiente corolario

Corolario 2. *El mapeo $I_n(symm(\oplus_{k=1}^{\infty} e_k^{\otimes a_k})) = \sqrt{a}\Phi_a$ es una isometría entre $H^{\widehat{\otimes} n}$ equipado de la norma $\sqrt{n!}||\cdot||$, y el n-ésimo caos de $L^2(\Omega, \mathbb{P})$.*

Más adelante se mostrará que cuando $H = L^2([0,1], \mathrm{d}t)$, los términos de la descomposición en caos son simplemente integrales de Itô múltiples. Este tipo de v.a. son fáciles de manipular (por ejemplo puede aplicárseles técnicas de cálculo estocástico), y por ende nos permiten deducir fuertes resultados acerca de ellas (para mayores referencias ver capítulo dos). La importancia del corolario anterior radica en el hecho de que la isometría I_n es una generalización de la integral de Itô múltiple, y esto nos permite en muchas ocaciones trasladar los resultados que se obtienen para el caso $H = L^2([0,1], \mathrm{d}t)$ a resultados para H generales mediante la elección de una base.

Demostración del corolario 2. Considere un vector en $h \in H^{\otimes n}$ de la forma

$$h = \otimes_{k=1}^{m} e_{i_k}^{\otimes a_{i_k}}.$$

Supongamos adicionalmente, que h puede expresarse como

$$h = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n},$$

para ciertos índices $i_1, ..., i_n$, no necesariamente distintos. A continuación mostraremos que $||\text{symm}(h)||_{H^{\otimes n}} = \frac{a!}{n!}$. Denotemos por S_n al conjunto de permutaciones de n elementos y definamos en S_n, una relación de equivalencia $\sim$, dada por

$$\sigma_1 \sim \sigma_2 \qquad \text{si} \qquad (i_{\sigma_1(1)}, ..., i_{\sigma_1(n)}) = (i_{\sigma_2(1)}, ..., i_{\sigma_2(n)}).$$

Esta relación de equivalencia induce una partición de S_n en conjuntos ajenos $B_1, ..., B_k$. Para cada elemento de esta partición podemos elegir un único representante $\theta_j \in B_j$, a partir de los cuales podemos definir el conjunto

$$S'_n := \{\theta_1, ..., \theta_k\}.$$

Por construcción, S'_n esta formado por todas las permutaciones $\theta \in S_n$ que dan lugar, mediante el mapeo $\sigma \to (i_{\sigma(1)}, ..., i_{\sigma(n)})$, a índices diferentes. Es fácil verificar, a partir de la definición de h, que el índice i_j aparece exactamente a_{i_j}-veces en el vector $(i_{1,n})$, y por lo tanto, la cardinalidad de S'_n puede pensarse como el número de maneras distintas en pueden acomodarse a_1 pelotas de color 1, a_2 pelotas de color 2,..., hasta a_m pelotas de color m en una fila, distinguiendo únicamente el color de las pelotas. Esta cantidad es $n!/a!$, y por lo tanto, $\#S'_n = n!/a!$. Por otro lado, es posible verificar que cada permutación $\sigma \in S'_n$ está relacionada (mediante $\sim$) con exactamente $a!$ permutaciones en S_n, y por ende,

$$\begin{aligned} \text{Symm}(h) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} e_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma(i_n)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in S'_n} a! e_{\theta(i_1)} \otimes \cdots \otimes e_{\theta(i_n)}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Es fácil mostrar que $e_{\theta(i_1)} \otimes \cdots \otimes e_{\theta(i_n)}$ y $e_{\theta'(i_1)} \otimes \cdots \otimes e_{\theta'(i_n)}$, con $\theta, \theta' \in S'_n$ son ortogonales siempre que θ y θ' sean distintos. Por lo tanto, de la ecuación (1.20), se sigue que

$$\begin{aligned} ||\text{Symm}(h)||^2_{H^{\otimes n}} &= \frac{a!^2}{n!^2} \sum_{\theta \in S'_n} ||e_{\theta(i_1)} \otimes \cdots \otimes e_{\theta(i_n)}||^2_{H^{\otimes n}}, \\ &= \frac{a!^2}{n!^2} \frac{n!}{a!} \end{aligned}$$

□

Finalizaremos esta sección enunciando una generalización de la desomposición en caos para variables aleatorias con valores en un espacio de Hilbert. Esto nos permitirá en particular descomponer a los procesos estocáticos en sus corresponodientes componentes en caos.

Teorema 2. *Sea $\{W(h)\}_{h \in H}$ un proceso gaussiano isonormal definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde $\mathcal{F}$ está generada por $\{W(h)\}_{h \in H}$. Sea V un espacio de Hilbert real separable. Entonces se cumple*

$$L^2(\Omega, V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n(V),$$

donde $\mathcal{H}_n(V)$ es el subespacio cerrado de $L^2(\Omega, V)$, generado por las variables aleatorias V-valuadas de la forma $\sum_{k=1}^{m} F_k v_k$, $F_k \in \mathcal{H}_n$ y $v_k \in V$. Más aún, si $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de H, entonces para todo multi-índice a se tiene que el mapeo lineal

$$\begin{array}{ccc} H^{\widehat{\otimes} n} \otimes V & \xrightarrow{I_n^V} & \mathcal{H}_n(V) \\ symm(\otimes_{k=1}^{\infty} v_k^{\otimes a_k}) \otimes v & \longmapsto & \sqrt{a!}\Phi_a v \end{array}$$

es una isometría.

Demostración. Para la primera parte supongamos que $X \in L^2(\Omega, V)$ es ortogonal a $\mathcal{H}_n(V)$ para todo $n \geq 1$, queremos ver que esto implica que $X = 0$. Para ello tomemos una base ortonormal $\{e_k\}_k$ de V y supongamos que X es de la forma

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k e_k$$

para ciertas variables aleatorias reales X_k. Como $X \in L^2(\Omega, V)$, entonces $X_k \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$. Luego, ya que X es ortogonal a $\mathcal{H}_n$ para todo $n \geq 1$ se tiene que, para $h \in H$ de norma uno arbitrario y $k, m \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\mathbb{E}[X_k H_m(W(h))] = \mathbb{E}[\langle X, H_m(W(h)) e_k \rangle_V] = 0.$$

Por lo tanto, del teorema 1 se sigue que $X_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y por ende, $X = 0$. El hecho de que I_k^V sea una isometría es consecuencia del corolario 2.

$\square$

1.1.1. Descomposición en caos e integrales de Itô múltiples

Como se mencionó con anterioridad, la naturaleza de las definiciones y resultados presentados hasta el momento, pueden entenderse y manipularse de mejor manera cuando $H = L^2([0,1], \mathrm{d}t)$. En esta sección se justificará dicha afirmación. Veremos en particular que los procesos gaussianos isonormales basados en $L^2([0,1], \mathrm{d}t)$, así como las componentes en caos de sus funcionales tienen una forma muy simple.

A lo largo de esta sección supondremos que el espacio de Hilbert H es un espacio $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}, \mu)$, donde $(\mathbb{T}, \mathcal{B})$ es un espacio medible y μ es una medida σ-finita sin átomos ($\mathbb{T}$ puede ser por ejemplo el intervalo $[0,1]$ y μ la medida de Lebesgue). Sea W' una medida aleatoria Gaussiana[5] definida como en el ejemplo 2 (ruido blanco basado en μ). Es decir, $W' : \Omega \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ cumple que para todo $A \in \mathbb{T}$ la variable aleatoria $W'(\cdot, A)$ tiene distribución normal de media cero y varianza $\mu(A)$, y es tal que para cualquier colección de conjuntos ajenos a pares $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$,

$$W'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} W'(B_n) \qquad c.s. \tag{1.21}$$

[5] Para mayores referencias sobre las medidas aleatorias gaussianas ver [13]

Es importante notar que la condición anterior no necesariamente implica para casi todo $\omega \in \Omega$ la función $W'(\cdot,\omega)$ sea una medida signada[6]. Sea W el proceso gaussiano isonormal definido por $W(\mathbb{1}_A) = W'(A)$. Llamaremos a dicho proceso ruido blanco basado en μ. A continuación se presentará la construcción las integrales de Itô Múltiples para funciones definidas en $\mathbb{T}^n$, las cuales, como se verá más adelante, nos permitirán representar de manera única a los elementos del n-ésimo caos $\mathcal{H}_n$.

Sea $\mathcal{B}_0 = \{A \in \mathcal{B} \mid \mu(A) < \infty\}$. Queremos definir la integral estocástica de funciones $f \in L^2(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$ la cual llamaremos también integral de Itô múltiple, para ello, primeramente consideramos funciones f de la forma

$$f(t_1,...,t_m) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{n} a_{i_1,\ldots,i_m} \mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_m}}(t_1,...,t_m) \tag{1.22}$$

donde los $A_{i_k} \in \mathcal{B}_0$ son conjuntos ajenos dos a dos, y los coeficientes $a_{i_1,\ldots,i_m}$ se anulan si $i_j = i_{j'}$ para $j \neq j'$, denotaremos al conjunto de dichas funciones por $\mathcal{E}_n$. Para una función de la forma (1.22), definimos su integral múltiple por

$$I_m(f) := \sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{n} a_{i_1,\ldots,i_m} W(A_{i_1}) \cdots W(A_{i_m}) \tag{1.23}$$

Note que la definición de la integral es independiente de la representación de f, además, se cumplen las siguientes propiedades

1. I_m es lineal.

2. $I_m(f) = I_m(\tilde{f})$, donde $\tilde{f}$ denota la simetrización de f.

3. $\mathbb{E}[I_m(f)I_q(g)] = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq q \\ m!\langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle_{L^2(T^m,\mu^m)} & \text{si } m = q \end{cases}$.

Demostración. La propiedad 1 es clara. La propiedad 2 se sigue de la linealidad de I_m así como del hecho de que el resultado es válido para $f = \mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots A_{i_m}}$. Para probar la propiedad 3 consideramos funciones $f \in \mathcal{E}_m$ y $g \in \mathcal{E}_q$, es decir, funciones de la forma (1.22). Supongamos adicionalmente que $m < q$, y que

$$\begin{aligned} f(t_1,...,t_m) &= \sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{n} a_{i_1,\ldots,i_m} \mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_m}}(t_1,...,t_m) \\ g(t_1,...,t_q) &= \sum_{i_1,\ldots,i_q=0}^{n} b_{i_1,\ldots,i_q} \mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_m}}(t_1,...,t_m)\mathbb{1}_{A_{i_{m+1}}\times\cdots\times A_{i_q}}(t_{m+1},...,t_q). \end{aligned}$$

[6]Para esto debería existir un conjunto $\Omega' \subset \Omega$ de probabilidad 1 en el cual para toda sucesión de conjuntos ajenos $\{B_n\}_n$ la ecuación (1.21) fuera válida, lo cual es mucho más fuerte que pedir que para toda sucesión de conjuntos exista un espacio de medida total en el cual (1.21) sea válida.

Entonces

$$\mathbb{E}[I_m(f)I_m(g)] = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_m=0\\ j_1,\ldots,j_q=0}}^{n} a_{i_1,\ldots,i_m} b_{j_1,\ldots,j_q} \mathbb{E}\left[\prod_{l=1}^{m} W(A_{i_l})W(A_{j_l})\right] \times$$
$$\mathbb{E}\left[W(A_{j_{m+1}})\right] \cdots \mathbb{E}[W(A_{j_q})] = 0$$

para el caso $m = q$ supongamos que

$$\begin{aligned} f(t_1,...,t_m) &= \sum_{i_1,...,i_m=0}^{n} a_{i_1,...,i_m} \mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_m}}(t_1,...,t_m) \\ g(t_1,...,t_m) &= \sum_{i_1,...,i_q=0}^{n} b_{i_1,...,i_m} \mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_m}}(t_1,...,t_m) \end{aligned}$$

Como f es simétrica se tiene que $a_{i_1,...,i_m} = a_{\sigma(i_1),...,\sigma(i_m)}$ para toda permutación σ, en particular $a_{i_1,...,i_m} = a_{i_{(1)},...,i_{(m)}}$ donde $i_{(1)},...,i_{(m)}$ es un reordenamiento creciente de $i_1,...,i_m$. Finalmente, como $a_{i_1,...,i_m} = 0$ siempre que dos índices i_j e i_k coincidan se tiene que

$$\begin{aligned} f(t_1,...,t_m) &= m! \sum_{i_1<\cdots<i_m} a_{i_1,...,i_m} \mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_m}}(t_1,...,t_m) \\ g(t_1,...,t_m) &= m! \sum_{i_1<\cdots<i_m} b_{i_1,...,i_m} \mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_m}}(t_1,...,t_m) \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_m(f)I_m(g)] &= \mathbb{E}\left[\left(m! \sum_{i_1<\cdots<i_m} a_{i_1,...,i_m} W(A_{i_1})\cdots W(A_{i_m})\right)\right. \\ &\qquad \left. \times \left(m! \sum_{i_1<\cdots<i_m} a_{i_1,...,i_m} W(A_{i_1})\cdots W(A_{i_m})\right)\right] \\ &= (m!)^2 \sum_{i_1<\cdots<i_m} b_{i_1,...,i_m} a_{i_1,...,i_m} \mu(A_{i_1})\cdots\mu(A_{i_m}) \\ &= m! \left\langle \tilde{f}, \tilde{g} \right\rangle_{L^2(T^m,\mu^m)}. \end{aligned}$$

□

Resta extender el operador I_m a todo $L^2(T^m, \mu^m)$, para ello, comenzaremos por verificar que[7] $\mathcal{E}_n$ es denso en $L^2(T, , \mu^m)$, aproximando las funciones indicadoras con elementos de $\mathcal{E}_n$. Sea $A = A_1 \times \cdots \times A_m$, usando la no existencia de átomos bajo la medida μ podemos asegurar, para cada $\varepsilon > 0$, la existencia de una colección de conjuntos

[7]donde $\mathcal{E}_n$ está definido como el conjunto de funciones en $\mathbb{T}^n$, de la forma (1.22)

$R = \{B_1, ..., B_n\} \subset \mathcal{B}_0$ con $\mu(B_j) < \varepsilon$ y tales que A_j puede expresarse como unión de elementos de R. Por construcción se tiene que

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A_1 \times \cdots \times A_m} = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} \epsilon_{i_1, \ldots, i_m} \mathbb{1}_{B_{i_1} \times \cdots \times B_{i_m}},$$

para ciertas constantes $\epsilon_{i_1, \ldots, i_m} \in \{0, 1\}$. Dividimos esta suma en dos partes: sea I el conjunto de índices $i_1, ..., i_n$ que son distintos a pares y sea J el resto de los índices. Definimos

$$g = \sum_{(i_1, \ldots, i_m) \in I} \epsilon_{i_1, \ldots, i_m} \mathbb{1}_{B_{i_1} \times \cdots \times B_{i_m}}$$

entonces g pertenece al conjunto $\mathcal{E}_m$ (recordemos que dicho conjunto consiste en las funciones de la forma (1.22)), y se tiene

$$\begin{aligned} ||\mathbb{1}_A - g||^2_{L^2(\Omega, \mathbb{P})} &= || \sum_{(i_1, \ldots, i_m) \in J \cup I} \epsilon_{i_1, \ldots, i_m} \mathbb{1}_{B_{i_1} \times \cdots \times B_{i_m}} - \sum_{(i_1, \ldots, i_m) \in I} \epsilon_{i_1, \ldots, i_m} \mathbb{1}_{B_{i_1} \times \cdots \times B_{i_m}} ||^2_{L^2(\Omega, \mathbb{P})} \\ &= || \sum_{(i_1, \ldots, i_m) \in J} \epsilon_{i_1, \ldots, i_m} \mathbb{1}_{B_{i_1} \times \cdots \times B_{i_m}} ||^2_{L^2(\Omega, \mathbb{P})} \\ &= \sum_{(i_1, \ldots, i_m) \in J} \epsilon_{i_1, \ldots, i_m} \mu(B_{i_1}) \cdots \mu(B_{i_m}), \end{aligned} \tag{1.24}$$

donde la última igualdad se debe al hecho de que el producto de $\mathbb{1}_{B_{i_1} \times \cdots \times B_{i_m}}$ y $\mathbb{1}_{B_{j_1} \times \cdots \times B_{j_m}}$ es igual a cero si $(i_1, ..., i_m) \neq (j_1, ..., j_m)$. De la definición de J se sigue que para todo $(i_1, ..., i_m) \in J$ existe $1 \leq i \leq n$ tal que i aparece al menos dos veces en el vector $(i_1, ..., i_m)$, y por ende, podemos acotar a los términos $\mu(B_{i_1}) \cdots \mu(B_{i_m})$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mu(B_{i_1}) \cdots \mu(B_{i_m}) &\leq \mu(B_j)^2 \prod_{\substack{1 \leq l \leq m \\ i_l \neq j}} \mu(B_{i_l}) \\ &\leq \mu(B_j)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \right)^{m-2}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Adicionalmente, se tiene que cada índice $j \leq n$ se repite (es decir, aparece dos veces) en exactamente $\binom{m}{2}$ índices $(i_1, ..., i_m) \in J$. Por lo tanto, a partir de las desigualdades

(1.25) y (1.24), se tiene que

$$\begin{aligned}
||\mathbb{1}_A - g||^2_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} &\leq \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in J} \epsilon_{i_1,\dots,i_m}\mu(B_{i_1})\cdots\mu(B_{i_m}) \\
&\leq \binom{m}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)^2\left(\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)\right)^{m-2} \\
&\leq \binom{m}{2}\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)\left(\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)\right)^{m-2} \\
&= \binom{m}{2}\varepsilon\mu\left(\cup_j A_j\right)^{m-1}
\end{aligned}$$

de aquí se sigue el resultado. Resta ver que I_m puede extenderse a $L^2(T^m, \mu^m)$. Por el teorema de Hahn Banch (para mayores referencias ver apéndice, teorema 10) basta verificar que I_m es un operador lineal acotado, y que el conjunto $\mathcal{E}_m$ es denso en T^m. Esto puede deducirse de la propiedad 3 gracias a la desigualdad

$$\mathbb{E}[I_m(f)^2] = m!||\widehat{f}||^2 \leq m!||f||^2.$$

Definición 3. *Si $f \in L^2(T^p, \mu^p)$ y $g \in L^2(T^q, \mu^q)$ son funciones simétricas, definimos para cada $0 \leq r \leq q \wedge p$, la contracción de r índices de f y g como*

$$(f \otimes_r g)(t_1, ..., t_{p+q-2r}) := \int_{T^r} f(t_1, ..., t_{p-r}, s)g(t_{p-r+1}, ..., t_{p+q-2r}, s)\mu^r(ds). \tag{1.26}$$

En lo sucesivo, denotaremos por $f\widehat{\otimes}_r g$ a la simetrización de $f \otimes_r g$.

Observaciones

1. Cuando $r = 0$, la contracción $f \otimes_r g$ coincide con el producto tensorial de f y g.
2. La contracción $f \otimes_r g$ pertenece a $L^2(T^{p+q-2r}, \mu^{p+q-2r})$.
3. $f \otimes_r g$ no es una función simétrica aún cuando f y g lo sean.
4. La definición anterior puede extenderse a espacios de Hilbert más generales que $L^2(T, \mu)$ de la siguiente manera:

   Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert separable, y sea $\{e_i\}_{t\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathfrak{H}$. Entonces, dados dos vectores $f \in \mathfrak{H}^{\otimes p}$ y $g \in \mathfrak{H}^{\otimes q}$, y $0 \leq r \leq p \wedge q$, definimos la simetrización de f y g como el vector $f \otimes_r g \in \mathfrak{H}^{\otimes(p+q-2r)}$ (no necesariamente simétrico), definido por

$$f \otimes_r g \;=\; \sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{\infty} \langle f, e_{i_1}, ..., e_{i_r}\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}} \otimes \langle f, e_{i_1}, ..., e_{i_r}\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}\,. \tag{1.27}$$

Proposición 2. *Sea $f \in L^2(T^p, \mu^p)$ una función simétrica y $g \in L^2(T, \mu)$. Entonces*

$$I_p(f)I_1(g) = I_{p+1}(f \otimes g) + I_{p-1}(f \otimes_1 g), \tag{1.28}$$

donde $f \otimes g$ denota al producto tensorial de f y g, mientras que $f \otimes_1 g$ denota la contracción de un índice de f y g.

Demostración. Primeramente probaremos el resultado cuando f y g satisfacen alguna de las siguientes condiciones

1. $f = \mathbb{1}_{A_1 \times \cdots \times A_p}$ y $g = \mathbb{1}_B$, con $A_1, ..., A_p, B$ ajenos.

2. f es la simetrización de $\mathbb{1}_{A_1 \times \cdots \times A_p}$ y g es la simetrización de $\mathbb{1}_B$, con $A_1, ..., A_p$ ajenos, y $B = A_j$ para algún $1 \leq j \leq p$.

Si f y g satisfacen $f = \mathbb{1}_{A_1 \times \cdots \times A_p}$ y $g = \mathbb{1}_B$, con $A_1, ..., A_p, B$ ajenos. Entonces

$$\begin{aligned} f \otimes_1 g(t_1, ..., t_{p-1}) &= \int_T f(t_1, ..., t_{p-1}, s) g(s) \mu(\mathrm{d}s) \\ &= \mathbb{1}_{A_1 \times \cdots \times A_{p-1}}(t_1, ..., t_{p-1}) \int_T \mathbb{1}_{A_p}(s) \mathbb{1}_B(s) \mu(\mathrm{d}s) = 0 \end{aligned}$$

y ya que

$$I_p(f)I_1(g) = W(A_1) \cdots W(A_p) W(B) = I(\mathbb{1}_{A_1 \times \cdots \times A_p} \mathbb{1}_B) = I(f \otimes g),$$

concluimos que f y g satisfacen la relación (1.28).

Supongamos ahora que f es la simetrización de $\mathbb{1}_{A_1 \times \cdots \times A_p}$ y que g es la simetrización de $\mathbb{1}_B$, con $A_1, ..., A_p$ ajenos, y $B = A_j$ para algún $1 \leq j \leq p$. Para $\varepsilon > 0$ fijo, elegimos una partición de A_1 en conjuntos ajenos $\{B_1, ..., B_n\}$ tal que $\mu(B_k) < \varepsilon$. A partir de esto, podemos aproximar a f mediante la siguiente función:

$$h_\varepsilon(t_1, ..., t_{p+1}) = \sum_{i \neq j} \mathbb{1}_{B_i \times B_j \times A_2 \times \cdots \times A_p}(t_1, ..., t_{p+1})$$

Note que $h_\varepsilon(t_1, ..., t_{p+1}) \neq g(t_1) f(t_2, ..., t_{p+1})$ únicamente cuando $(t_1, t_2) \in B_k \times B_k$ para algún $k \leq n$, por lo que

$$
\begin{aligned}
I_p(f)I_1(g) &= I_p(\mathbb{1}_{A_1\times\ldots\times A_p})I_1(\mathbb{1}_{A_1})\\
&= W(A_1)^2\prod_{k=2}^{p}W(A_k) = \left(\sum_{i=1}^{n}W(B_i)\right)^2\prod_{k=2}^{p}W(A_k)\\
&= \sum_{i\neq j}W(B_i)W(B_j)\prod_{k=2}^{p}W(A_k) + \sum_{i=1}^{n}W(B_i)^2\prod_{k=2}^{p}W(A_k) +\\
&\quad \sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)\prod_{k=2}^{p}W(A_k) - \sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)\prod_{k=2}^{p}W(A_k)\\
&= \sum_{i\neq j}W(B_i)W(B_j)\prod_{k=2}^{p}W(A_k) + \sum_{i=1}^{n}(W(B_i)^2-\mu(B_i))\prod_{k=2}^{p}W(A_k) +\\
&\quad \mu(A_1)\prod_{k=2}^{p}W(A_k)\\
&= I_p(h_\varepsilon) + R_\varepsilon + \mu(A_1)\prod_{k=2}^{p}W(A_k), \qquad (1.29)
\end{aligned}
$$

donde

$$R_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n}(W(B_i)^2-\mu(B_i))\prod_{k=2}^{p}W(A_k).$$

Por otro lado, denotando por S_p al grupo de permutaciones de $\{1,...,p\}$, y por $S'_p = \{\sigma \in S_p \mid \sigma(p) = 1\}$, podemos calcular $f \otimes_1 g$ (definido en (1.26)) de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
f\otimes_1 g(t_1,...,t_{p-1}) &= \int_T \mathrm{symm}(\mathbb{1}_{A_1\times\ldots\times A_p})(t_1,...,t_{p-1},s)\mathbb{1}_{A_1}(s)\mu(\mathrm{d}s)\\
&= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\int_T \mathbb{1}_{A_{\sigma(1)}\times\cdots\times A_{\sigma(p-1)}}(t_1,...,t_{p-1})\mathbb{1}_{A_{\sigma(p)}}(t_p)\mathbb{1}_{A_1}(s)\mu(\mathrm{d}s)\\
&= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S'_p}\mathbb{1}_{A_{\sigma(1)}\times\cdots\times A_{\sigma(p-1)}}(t_1,...,t_{p-1})\mu(A_1)\\
&= \frac{1}{p}\mathrm{symm}(\mathbb{1}_{A_2\times\cdots\times A_p})\mu(A_1)
\end{aligned}
$$

de aquí se sigue, por (1.29), que

$$I_p(f)I_1(g) = I_p(h_\varepsilon) + R_\varepsilon + pI_{p-1}(f\otimes_1 g) \qquad (1.30)$$

Finalmente, utilizando el hecho de que $h_\varepsilon(t_1,...,t_{p+1})$ y $g(t_1)f(t_2,...,t_{p+1})$ sólo difieren cuando cuando $(t_1,t_2) \in B_k \times B_k$ para alguna $k \leq n$, y definiendo $\beta := \mu(A_1)\cdots\mu(A_p)$, se tiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
||I_m(\text{symm}(h_\varepsilon)) - I_m(g\tilde{\otimes}f)||^2_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} &\leq ||I_m(h_\varepsilon) - I_m(g\otimes f)||^2_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} \\
&= \left|\left|\sum_{i=1}^{n} W(B_i)^2 W(A_2)\cdots W(A_p)\right|\right|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)^2\mu(A_2)\cdots\mu(A_p) \\
&\leq \varepsilon\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)\mu(A_2)\cdots\mu(A_p) \\
&= \varepsilon\mu(A_1)\mu(A_2)\cdots\mu(A_p) = \varepsilon\beta
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

y

$$
\mathbb{E}[R_\varepsilon^2] = 2\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)^2\mu(A_2)\cdots\mu(A_p) \leq 2\varepsilon\beta \tag{1.32}
$$

De las desigualdades (1.32), (1.31) y (1.30) se sigue el resultado para el caso en que f y g satisfagan 1 o 2. Para el caso en que $f \in \mathcal{E}_p$ y $g \in \mathcal{E}_1$ (es decir, funciones del tipo (1.22)), podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$
\begin{aligned}
f(t_1,...,t_p) &= \sum_{i_1,...,i_p=1}^{n} a_{i_1,...,i_n}\mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_p}}(t_1,...,t_p) \\
g(t_1) &= \sum_{i=1}^{n} b_i\mathbb{1}_{B_i}(t_1),
\end{aligned}
$$

donde $A_1,...,A_p$ son conjuntos ajenos, y los B_j son tales que, o bien $B_j = A_k$ para alguna k, o $B_j\cap A_k = \emptyset$ para toda k. En dicho caso, gracias a la linealidad de las funciones I_p, I_1 y $\text{symm}(\cdot)$, y al hecho de que el resultado es válido para funciones indicadoras, se tiene que

$$\begin{aligned}
I_p(f)I_1(g) &= \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i_1,\ldots,i_p} b_i I_p(\mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_p}}) I_1(\mathbb{1}_{B_i}) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i_1,\ldots,i_p} b_i \Big(I_{p+1}(\mathrm{symm}(\mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_p}\times B_i})) + \\
&\quad pI_{p-1}(\mathrm{symm}(\mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_p}}) \otimes_1 \mathbb{1}_{B_i})\Big) \\
&= I_{p+1}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i_1,\ldots,i_p} b_i \ \mathrm{symm}(\mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_p}\times B_i}) \right) + \\
&\quad pI_{p-1}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i_1,\ldots,i_p} b_i \ \mathrm{symm}(\mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_p}}) \otimes_1 \mathbb{1}_{B_i} \right) \\
&= I_{p+1}(\mathrm{symm}\,(f\otimes g)) + pI_{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \ \mathrm{symm}(f) \otimes_1 \mathbb{1}_{B_i} \right) \\
&= I_{p+1}(f\otimes g) + I_{p-1}(f\otimes_1 g)
\end{aligned}$$

□

Existe una generalización del resultado anterior que nos permite calcular el producto de dos integrales de Itô múltiples arbitrarias, dicho resultado puede consultarse en [25]. A partir de (1.28), es posible probar la siguiente proposición

Proposición 3. *Sea H_m el m-ésimo polinomio de Hermite, y sea $h \in H = L^2(T,\mu)$ un elemento de norma uno. Entonces se tiene que*

$$m!H_m(W(h)) = \int_{T^m} h(t_1)\cdots h(t_m) W(dt_1)\cdots W(dt_m). \tag{1.33}$$

Más aún, si denotamos por $L^2_S(T^m,\mu^m)$ a la cerradura del espacio de funciones simétricas en $L^2(T^m,\mu^m)$, entonces $I_m(L^2_S(T^m)) = \mathcal{H}_m$.

Demostración. Probaremos la ecuación (1.33) por inducción sobre m:

1. para $m = 1$ el resultado se sigue de la definición de H_m.

2. Si (1.33) es válida para m, entonces, de las ecuaciones (1.28) y (1.3), se sigue que

$$\begin{aligned}
I_{m+1}(h^{\otimes(m+1)}) &= I_m(h^{\otimes m})I_1(h) - mI_{m-1}\left(h^{\otimes(m-1)} \int_T h(t)^2 \mu(\mathrm{d}t) \right) \\
&= I_m(h^{\otimes m})I_1(h) - ||h||_{L^2(T,\mu)} m I_{m-1}\left(h^{\otimes(m-1)}\right) \\
&= m!H_m(W(h))W(h) - m(m-1)!H_{m-1}(W(h)) \\
&= m!(m+1)H_{m+1}(W(h)) = (m+1)!H_{m+1}(W(h))
\end{aligned}$$

Procederemos ahora a probar que $I_m(L^2_S(T^m)) = \mathcal{H}_m$. Como consecuencia de la ecuación 1.33 se tiene que

$$\text{Span}\{H_m(W(h))\}_{h\in H, ||h||=1} \subset I_m(L^2_S(T^m)). \tag{1.34}$$

Por otro lado, utilizando la relación $\mathbb{E}[I_m(f)^2] = m!||f||^2$ se verifica que I_m es un operador continuo, y consecuentemente $I_m(L^2_S(T^m))$ es un subespacio vectorial cerrado. Esto aunado a la igualdad (1.34), implica que

$$\mathcal{H}_m \subset I_m(L^2_S(T^m)).$$

Finalmente, como I_m mapea funciones ortogonales en variables aleatorias ortogonales, la inclusión $H_m(W(h)) \subset I_m(L^2_S(T^m))$ implica que $I_m(L^2_S(T^m)) \perp \mathcal{H}_k$ para $k \neq m$. Por lo tanto, del teorema de descomposición en caos se sigue que $I_m(L^2_S(T^m)) = \mathcal{H}_m$

□

Como consecuencia del resultado anterior se tiene el siguiente teorema

Teorema 3. *Toda variable aleatoria $F \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ puede expresarse de como suma de integrales múltiples*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \tag{1.35}$$

Donde $f_0 = \mathbb{E}[F]$, $I_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función identidad y $f_n \in L^2(T^n, \mu^n)$ para $n \geq 1$. Más aún, podemos tomar las funciones f_n simétricas, en cuyo caso, la descomposición 1.35 *es única.*

Utilizando la notación del corolario 1*, consideremos una base ortonormal $\{e_k\}_k \geq 1$ de H y un multi-índice $a = (a_1, ..., a_M, 0, ..) \in \Lambda$ fijo, entonces, gracias a la proposición* 3*, se tiene que*

$$\begin{aligned} a!\prod_{k=1}^{M} H_{a_k} W(e_k) &= \prod_{k=1}^{M} I_{a_k}(e_k^{\otimes a_k}) \\ &= I_n(e_1^{\otimes a_1} \otimes \cdots \otimes e_M^{\otimes a_M}) \end{aligned} \tag{1.36}$$

1.2. El operador derivada

Esta sección está dedicada al estudio del operador de derivada. Comenzaremos dando una breve motivación para definir dicho operador. Posteriormente definiremos formalmente a dicho objeto y enunciaremos algunos resultados importantes referentes a el, tales como la fórmula de integración por partes, y un teorema que describe las componentes en caos de la derivada de una variable aleatoria.

Motivación
Sea S^x el precio de un "stock" a cierto tiempo $t > 0$, cuyo precio al tiempo 0 es $x \in \mathbb{R}$, y sea ϕ una función de contrato. Considere la variable aleatoria

$$Y^x = \phi(S^x).$$

Dicha variable puede representar, por ejemplo, el pago de una opción financiera, un contrato forward o un bono. De acuerdo a la teoría de cotización libre de arbitraje, el precio "ideal" que se debe establecer para comprar dicho contrato tiene la forma $\mathbb{E}[Y^x]$ (de hecho el precio está dado por $\mathbb{E}_Q[e^{-rt}Y^x]$, donde Q es cierta medida equivalente a $\mathbb{P}$ y r es una constante mayor a cero, pero para fines prácticos podemos pensarlo simplemente como $\mathbb{E}[Y^x]$). En este contexto la derivada

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbb{E}[Y^x]$$

mide la sensibilidad que tiene el precio del activo Y^x respecto al precio actual x del stock. Adicionalmente, dicha cantidad sirve para calcular portafolios replicantes para el derivado Y^x (para mayores referencias ver [16]). ¿Cómo calculamos entonces el factor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbb{E}[Y^x]$?. En el caso en que ϕ es derivable, una forma de hacerlo es la siguiente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbb{E}\left[Y^x\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Y^x\right] = \mathbb{E}\left[\phi'(Y^x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S^x\right]. \tag{1.37}$$

La fórmula anterior es simple y útil, por lo que quisieramos generalizarla para el caso en que ϕ no fuera derivable. En el caso simplificado en que $\Omega = [0,1]$ y la medida de probabilidad fuera la medida de Lebesgue, podemos obtener dicha generalización mediante una aplicación de la fórmula de integración por partes como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\int \phi'(Y^x(\omega))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S^x(\omega)\mathrm{d}\omega &= \int \phi'(Y^x(\omega))\frac{\frac{\partial}{\partial\omega}Y(\omega)}{\frac{\partial}{\partial\omega}Y(\omega)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S^x(\omega)\mathrm{d}\omega \\ &= \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\phi\circ Y^x(\omega)\left(\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S^x(\omega)}{\frac{\partial}{\partial\omega}Y(\omega)}\right)\mathrm{d}\omega \\ &= -\int \phi\circ Y^x(\omega)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{S^x(\omega)}{\frac{\partial}{\partial\omega}Y(\omega)}\right)\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

Conclusión: Para calcular expresiones del tipo (1.37), podríamos intentar definir un análogo de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}$ sobre una clase rica de variables aleatorias (el operador de derivada de Malliavin), y calcular (1.37) mediante una fórmula de integración por partes. Este tipo de razonamiento también se puede aplicar para analizar condiciones bajo las cuales una variable aleatoria tiene una densidad, y más aún, condiciones bajo las cuales tiene una densidad derivable (para mayores referencias ver [15], [31]).

¿Cómo definir a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}$?
Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, donde $\mathcal{F}$ está generada por un movimiento Browniano $\{B_t\}_{t\geq 0}$. Queremos definir a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}$ para clase extensa de variables aleatorias, así que las condiciones de derivabilidad deben ser poco restrictivas. Para realizar esta construcción podemos proceder de dos maneras distintas

1. Podemos darle una estructura de espacio vectorial topológico a Ω, y definir derivada direccional en el sentido clásico en algunas direcciones “privilegiadas” (para mayores referencias ver [4]).

2. Podemos suponer que $\Omega = C^0[0,1]$, y que las v.a. son funcionales de Ω. Luego defininimos la derivada para funcionales “sencillos”, buscando emular la definición de gradiente de funciones reales, pero en un sentido débil.

En el presente escrito utilizaremos la segunda idea. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de la forma

$$F = f(W(h_1), ..., W(h_n)), \tag{1.38}$$

donde f es una función infinitamente diferenciable, cuyas derivadas parciales tienen crecimiento polinomial. A este tipo de variables les llamaremos en lo sucesivo “variables aleatorias suaves”. Adicionalmente definimos $\mathcal{S}_b$ como el conjunto de variables aleatorias de la forma (1.38) que son acotadas y $\mathcal{S}_0$ como el conjunto de la funciones de la forma (1.38) tales que f se anula en infinito.

Definición 4. *La derivada de una variable $F \in \mathcal{S}$ de la forma* (1.38) *es la variable aleatoria H-valuada definida por*

$$DF = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} f(W(h_1), ..., W(h_n))h_k \tag{1.39}$$

Observaciones

i) Para que dicha definición tenga sentido se requiere verificar que la definición de (1.39) no depende de la representación (1.38).

ii) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función infinitamente derivable cuyas derivadas parciales tienen crecimiento polinomial, entonces podemos construir un polinomio $P(x_1, ..., x_n)$, de n variables, tal que

$$|P(x)| \geq |f(x)| \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Utilizando esta desigualdad, así como el hecho de que la distribución normal multivariada tiene todos sus momentos cruzados finitos, concluimos que la variable F definida por la ecuación (1.38) es integrable.

iii) Si F y G son variables aleatorias suaves, entonces FG es una variable aleatoria suave, en particular, por la observación *ii*) se tiene que las variables aleatorias suaves son cuadrado integrables.

iv) Si F es una función simple de la forma (1.38), y $h \in H$. Entonces $\langle DF, h\rangle_H$ es integrable, esto se sigue con un argumento análogo al de la observación *ii*).

Para verificar que la definición de (1.39) no depende de la representación (1.38) procedemos de la siguiente manera. Supongamos que F tiene las siguientes representaciones

$$\begin{aligned} F &= f(W(h_1), ..., W(h_n)) \\ &= g(W(v_1), ..., W(v_m)). \end{aligned}$$

Note que todo elemento de $x \in \text{span}\{v_1, ..., v_m\}$ puede expresarse de manera única como $u + v$ con $u \in \text{span}\{h_1, ..., h_n\} \cap \text{span}\{v_1, ..., v_m\}$ y $v \in \text{span}\{h_1, ..., h_n\}^{\perp} \cap \text{span}\{v_1, ..., v_m\}$. En lo sucesivo denotaremos por

$$\begin{aligned} V_1 &:= \text{span}\{h_1, ..., h_n\} \cap \text{span}\{v_1, ..., v_m\} \\ V_2 &:= \text{span}\{h_1, ..., h_n\}^{\perp} \cap \text{span}\{v_1, ..., v_m\}. \end{aligned}$$

Utilizando dicha descomposición, podemos construir una transformación lineal

$$\begin{aligned} \bar{T} : \text{span}\{h_1, ..., h_n\} \times V_2^m &\longrightarrow \text{span}\{v_1, ..., v_m\} \\ (h_1, ..., h_n, v_1^2, ..., v_m^2) &\longmapsto (P_{V_1}(h_1) + v_1^2, ..., P_{V_1}(h_n) + v_m^2), \end{aligned}$$

donde P_{V_1} denota la proyección de $\text{span}\{h_1, ..., h_n\}$ en V_1. Es decir, $\bar{T}$ es tal que si $v_k = v_k^1 + v_k^2$ con $v_k^1 \in V_1$ y $v_k^2 \in V_2$ para $k \leq n$, entonces

$$\bar{T}(h_1, ..., h_n, v_1^2, ..., v_m^2) = (v_1, ..., v_m). \tag{1.40}$$

Denotaremos por T a la matriz asociada a $\bar{T}$. Primeramente se probará que $\frac{\partial}{\partial x_{k+n}} g \circ T = 0$ para $k \geq 1$ (esto puede ser interpretado como que g no depende de sus componentes en el espacio $\text{span}\{h_1, ..., h_n\}^{\perp}$). Para probar esto note que

$$\begin{aligned} &f(W(h_1), ..., W(h_n)) \\ &\quad = g\left(W(v_1), ..., W(v_m)\right) \\ &\quad = g\left(W\left(\sum_{j=1}^{n} T_{j,1} h_j + \sum_{j=1}^{m} T_{j+n,1} v_1^2\right), ..., W\left(\sum_{j=1}^{n} T_{j,n} h_j + \sum_{j=1}^{m} T_{j+n,n} v_m^2\right)\right) \\ &\quad = g\left(\sum_{j=1}^{n} T_{j,1} W\left(h_j\right) + \sum_{j=1}^{m} T_{j+n,1} W(v_1^2), ..., \sum_{j=1}^{n} T_{j,n} W\left(h_j\right) + \sum_{j=1}^{m} T_{j+n,n} W(v_m^2)\right) \\ &\quad = g \circ T(W(h_1), ..., W(h_n), W(v_1^2), ..., W(v_m^2)). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real continua y acotada. De la igualdad (1.41), y de la independencia de $W(h_1), ..., W(h_n)$ con $W(v_1^2), ..., W(v_m^2)$, deducimos que con probabilidad uno, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} &\gamma(f(W(h_1), ..., W(h_n))) \\ &\quad = \mathbb{E}[\gamma(f(W(h_1), ..., W(h_n))) \mid (W(h_1), ..., W(h_n))] \\ &\quad = \mathbb{E}[\gamma(g \circ T(W(h_1), ..., W(h_n), W(v_1^2), ..., W(v_m^2)) \mid (W(h_1), ..., W(h_n))] \\ &\quad = \alpha(W(h_1), ..., W(h_n)), \end{aligned} \tag{1.42}$$

donde α está definida por

$$\alpha(x_1, ..., x_n) := \mathbb{E}[\gamma(g \circ T(x_1, ..., x_n, W(v_1^2), ..., W(v_m^2)))].$$

Aplicando el teorema de cambio de variable a la igualdad (1.42), se deduce que $\gamma \circ f = \alpha$ casi seguramente en $\mathbb{R}^n$ respecto a la función de distribución Gaussiana no degenerada en $\mathbb{R}^n$ dada por $F_{(W(h_1),...,W(h_n))}$. Esto implica que la igualdad se cumple c.s. respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, y por la continuidad de γ, f y g, podemos concluir que

$$\gamma \circ f(x_1, ..., x_n) = \mathbb{E}[\gamma(g \circ T(x_1, ..., x_n, W(v_1^2), ..., W(v_m^2)))] \qquad \forall\ x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}. \tag{1.43}$$

Fijemos ahora $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Como la igualdad (1.43) se cumple para toda función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la variable aleatoria

$$g \circ T(x_1, ..., x_n, W(v_1^2), ..., W(v_m^2))$$

es igual en distribución a una delta de Dirac centrada en $f(x_1, ..., x_n)$. Dicha afirmación puede reformularse de la siguiente manera: considere la función lineal $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ definida por $S(y) = (x_1, ..., x_n, y)$, entonces $g \circ T \circ S(W(v_1^2), ..., W(v_m^2))$ tiene la distribución de una delta de Dirac centrada en $f(x_1, ..., x_n)$. Utilizando nuevamente el teorema de cambio de variable se tiene que la función $g \circ T \circ S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es igual casi seguramente a la constante $f(x_1, ..., x_n)$ respecto a la distribución Gaussiana no degenerada $F_{(W(v_1^2),...,W(v_m^2))}(\mathrm{d}y)$. Por ende, $g \circ T \circ S(y_1, ..., y_m) = f(x_1, ..., x_n)$ casi seguramente respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^m$. Por lo tanto, por la continuidad de g, T y S se tiene que

$$g \circ T \circ S(y_1, ..., y_m) = f(x_1, ..., x_n), \tag{1.44}$$

es decir, $g \circ T$ es constante sobre las últimas m variables y consecuentemente, para $k \geq 1$

$$\frac{\partial}{\partial x_{k+n}} g \circ T \;\; = \;\; 0. \tag{1.45}$$

Finalmente, utilizando la notación $X := (W(h_1), ..., W(h_n))$, $Y := (W(v_1), ..., W(v_m))$ y $Z = (W(v_1^2), ..., W(v_n^2))$, y las ecuaciones (1.40), (1.45) y (1.41), se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} g(Y) v_k &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} g(T(X, Z)) \left(\sum_{j=1}^n T_{j,k} h_j + \sum_{j=1}^m T_{j+n,k} v_j^2 \right) \\
&= \sum_{j=1}^n h_j \sum_{k=1}^m T_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_k} g(T(X, Z)) + \sum_{j=1}^m v_j^2 \sum_{k=1}^m T_{n+j,k} \frac{\partial}{\partial x_k} g(T(X, Z)) \\
&= \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} g \circ T(X, Z) + \sum_{j=1}^m v_j^2 \frac{\partial}{\partial x_{j+n}} g \circ T(X, Z) \\
&= \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} g \circ T(X, Z) = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(X).
\end{aligned}$$

Por lo tanto DF está bien definida.

A continuación extenderemos la definición de derivada para un conjunto más extenso que $\mathcal{S}$, para ello comenzaremos por demostrar el siguiente resultado, el cual se conoce como integración por partes para la derivada de Malliavin.

Lema 3. *Si F es una variabe aleatoria suave y $h \in H$. Entonces*

$$\mathbb{E}[\langle DF, h \rangle_H] = \mathbb{E}[FW(h)]. \tag{1.46}$$

Demostración. Note que, como se mencionó en las observaciones *ii)*,*iii)* y *iv)*, las variables $\langle DF, h \rangle_H$ y $FW(h)$ son integrables. Suponga que h tiene norma uno y considere una variable aleatoria suave de la forma

$$F = g(W(v_1), ..., W(v_m)),$$

para ciertos vectores $v_k \in H$ y $m \in \mathbb{N}$. Suponga que existen n vectores $e_1, ..., e_n \in H$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{e_1, ..., e_n\}$ es una base ortonormal de span$\{h, v_1, ..., v_m\}$ tal que $e_1 = h$. A partir de dicha base podemos construir una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ derivable, con derivadas de crecimiento polinomial, tal que F puede escribirse como

$$F = f(W(e_1), ..., W(e_n)).$$

Sea ϕ la densidad de la distribución normal estándar en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$\phi(x_1, ..., x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right\}.$$

Gracias a la ortogonalidad de $e_1, e_2, ..., e_k$, y al hecho de que $e_1 = h$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\langle DF, h \rangle_H\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} f(W(e_1), ..., W(e_n)) \langle e_k, h \rangle_H \right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial x_1} f(W(e_1), ..., W(e_n)) \right] \\
&= \underbrace{\int \cdots \int}_{n} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, ..., x_n) \phi(x_1, ..., x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&= \underbrace{\int \cdots \int}_{n-1} \left(f(x_1, ..., x_n)\phi(x_1, ..., x_n) \Big|_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty} - \right. \\
&\qquad \left. \int f(x_1, ..., x_n) \frac{\partial}{\partial x_1} \phi(x_1, ..., x_n) \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&= \int \cdots \int f(x_1, ..., x_n) x_1 \phi(x_1, ..., x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&= \mathbb{E}\left[FW(e_1)\right] = \mathbb{E}\left[FW(h)\right],
\end{aligned}$$

Donde el primer término en la cuarta igualdad es igual a cero debido a que f tiene crecimiento polinomial mientras que ϕ tiene decaimiento exponencial. Esto termina la prueba para el caso en que $||h||_H = 1$. Para $h \in H$ general note que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle DF, h\rangle] &= ||h||\mathbb{E}\left[\left\langle DF, \frac{1}{||h||}h\right\rangle\right]\\ &= ||h||\mathbb{E}\left[\frac{1}{||h||}FW(h)\right] = \mathbb{E}\left[FW(h)\right].\end{aligned}$$

□

Como consecuencia del resultado anterior, obtenemos el siguiente lema

Lema 4. *Si F y G son dos variables aleatorias suaves, entonces*

$$\mathbb{E}[G\langle DF, h\rangle] = \mathbb{E}[FGW(h)] - \mathbb{E}[F\langle DG, h\rangle]. \tag{1.47}$$

Demostración. Primeramente note que las variables aleatorias $F\langle DG, h\rangle, G\langle DF, h\rangle$ y $FGW(h)$ son suaves, y por ende, integrables. Aplicando el lema de integración por partes a FG, donde

$$\begin{aligned}F &= f(W(h_1), ..., W(h_n)),\\ G &= g(W(v_1), ..., W(v_m)),\end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[FGW(h)] &= \mathbb{E}[\langle DFG, h\rangle]\\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} g(W(v_1), ..., W(v_m))\frac{\partial}{\partial x_k}f(W(h_1), ..., W(h_n))\langle h_k, h\rangle\right] +\\ &\quad \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{m} f(W(h_1), ..., W(h_n))\frac{\partial}{\partial x_k}g(W(v_1), ..., W(v_m))\langle v_k, h\rangle\right]\\ &= \mathbb{E}\left[G\langle DF, h\rangle\right] + \mathbb{E}[F\langle DG, h\rangle],\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado.

□

Como consecuencia de los lemas anteriores, podemos extender el dominio del operador D como lo indica el siguiente lema.

Lema 5. *Sea $p \geq 1$ fijo y $||\cdot||_p$ la norma de $L^p(\Omega)$. El operador D puede extenderse a la cerradura de $\mathcal{S}$ respecto a $||\cdot||_p$.*

Demostración. Por el teorema de extensión de Hahn-Banach (para mayores referencias ver apéndice, teorema 10) basta ver que el operador lineal D es continuo en $\mathcal{S}$. Para ello, considere una sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias suaves tales que F_n converge a cero respecto a $||\cdot||_p$, y supongamos que DF_n converge en $L^p(\Omega, H)$ a cierta variable aleatoria $\nu \in L^p(\Omega, H)$, es decir, $\mathbb{E}[||DF_n - \nu||_H^p] \to 0$. A partir de esto queremos concluír que $\nu = 0$.

Sea $h \in H$ fijo. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\langle DF_n, h\rangle_H$ converge c.s. a $\langle \nu, h\rangle_H$ (en caso contrario podemos consideramos una subsucesión de $\langle DF_n, h\rangle_H$ que converge c.s. a $\langle \nu, h\rangle_H$). Para toda variable aleatoria suave y acotada $G \in \mathcal{S}_b$ (donde $\mathcal{S}_b$ denota al conjunto de variables aleatorias de la forma (1.38) que son acotadas), definimos

$$Z_\varepsilon := G \exp\{-\varepsilon W(h)^2\}.$$

Note que dicha variable es tal que $Z_\varepsilon W(h)$ está acotada. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz podemos deducir que

$$|\langle DF_n, h\rangle_H - \langle \nu, h\rangle_H|^p = |\langle DF_n - \nu, h\rangle_H|^p \leq ||h||_H ||DF_n - \nu||_H^p, \tag{1.48}$$

y por ende $\langle DF_n, h\rangle_H Z_\varepsilon$ converge en $L^p(\Omega)$ a $\langle \nu, h\rangle_H Z_\varepsilon$. Por lo tanto, utilizando el lema de integración por partes y la convergencia en $L^p(\Omega)$ de la sucesión $\langle DF_n, h\rangle_H Z_\varepsilon$, deducimos lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\langle \nu, h\rangle_H Z_\varepsilon] &= \mathbb{E}[\lim_n \langle DF_n, h\rangle_H Z_\varepsilon] \\ &= \lim_n \mathbb{E}[\langle DF_n, h\rangle_H Z_\varepsilon] \\ &= \lim_n \left(\mathbb{E}\left[F_n Z_\varepsilon W(h)\right] - \mathbb{E}\left[F_n \langle DZ_\varepsilon, h\rangle_H\right]\right). \end{aligned} \tag{1.49}$$

Por la desigualdad de Hölder y el lema de Fatou, se tiene que, si q es tal que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|\lim_n F_n Z_\varepsilon W(h)|\right] &\leq \liminf_n \mathbb{E}[|F_n Z_\varepsilon W(h)|] \\ &\leq \liminf_n \mathbb{E}[|F_n|^p]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}[|Z_\varepsilon W(h)|^q]^{\frac{1}{q}} = 0. \end{aligned}$$

Utlizando nuevamente la desigualdad de Hölder y el lema de Fatou

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\lim_n |F_n \langle DZ_\varepsilon, h\rangle|] &\leq \liminf_n \mathbb{E}[|F_n \langle DZ_\varepsilon, h\rangle|] \\ &\leq \liminf_n \mathbb{E}[|F_n|^p]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}[|\langle DZ_\varepsilon, h\rangle|^q]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \liminf_n \mathbb{E}[|F_n|^p]^{\frac{1}{p}} ||h||_H^2 \mathbb{E}[||DZ_\varepsilon||] = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de convergencia dominada a la sucesión $F_n \langle DZ_\varepsilon, h\rangle_H$ en la igualdad (1.49), se tiene que

$$\mathbb{E}[\langle \nu, h\rangle_H Z_\varepsilon] = 0.$$

Finalmente, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y el hecho de que la variable Z_ε está acotada por cierta constante $C > 0$, deducimos lo siguiente

$$|\langle \nu, h\rangle Z_\varepsilon| \leq |\langle \nu, h\rangle| \leq C||\nu||_H ||h||_H \in L^1(\Omega).$$

Por ende, del teorema de convergencia dominada se sigue que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle \nu, h\rangle_H G] &= \mathbb{E}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\langle \nu, h\rangle_H Z_\varepsilon\right] \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left[\langle \nu, h\rangle_H Z_\varepsilon\right] = 0.\end{aligned}$$

Como el resultado es válido para toda $G \in \mathcal{S}_b$, se concluye que $\langle \nu, h\rangle = 0$ c.s. y consecuentemente $\nu = 0$ c.s.

□

En lo sucesivo denotaremos al dominio de la extensión de D en $L^p(\Omega)$ por $\mathbb{D}^{1,p}$. Como el operador D es lineal y continuo (o equivalentemente lineal y acotado), $\mathbb{D}^{1,p}$ coincide con la cerradura de $\mathcal{S}$ respecto a la norma

$$||F||_{1,p} = \left(\mathbb{E}[|F|^p] + \mathbb{E}[||DF||_H^p]\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.50}$$

Para el caso $p = 2$, el espacio $\mathbb{D}^{1,2}$ es un espacio de Hilbert con producto interno dado por

$$\langle F, G\rangle_{1,2} = \mathbb{E}[FG] + \mathbb{E}[\langle DF, DG\rangle_H]. \tag{1.51}$$

1.2.1. Derivada iterada y derivada direccional

La definición de operador de derivada puede generalizarse a variables aleatorias que toman valores en un espacio de Hilbert V de la siguiente manera: dado un espacio de Hilbert separable V consideremos el espacio vectorial $\mathcal{S}_V$ de variables aleatorias V-valuadas de la forma

$$F = \sum_{k=1}^{m} G_k u_k, \qquad u_k \in V, \qquad G_k \in \mathcal{S}. \tag{1.52}$$

Para este tipo de variables aleatorias definimos

$$DF = \sum_{k=1}^{m} DG_k \otimes u_j. \tag{1.53}$$

Dicha definición surge de manera natural cuando $H = V = L^2([0,1])$. En este caso, como se verá más adelante, la derivada de una variable aleatoria F es un proceso estocástico cuadrado integrable que denotaremos por $\{D_t F\}_{t\geq 0}$. La definición previa establece, en este caso particular, que la derivada de un proceso estocástico $\{u_t\}_{t\geq 0} \in L^2(\Omega, H)$ es un proceso estocástico bivariado $\{Y_{s,t}\}_{s,t\geq 0}$ que se obtiene al aplicar el operador de derivada a cada una de las variables aleatorias u_t, es decir, $Y_{s,t} = D_s Z$, con $Z = u_t$.

Usando un argumento análogo al de la prueba del Lema 5, se puede ver lo siguiente

Lema 6. *El operador D, definido por* (1.53)*, puede ser extendido a la cerradura de $\mathcal{S}_V$ en $L^p(\Omega, V)$, la cual denotaremos por $\mathbb{D}^{1,p}(V)$.*

Demostración. Para verificar esta afirmación considere una variable aleatoria V-valuada de la forma (1.52) y n sucesiones aproximantes $\{F_k^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$, tal que $F_k^{(n)} \to 0$ en $L^p(\Omega,\mathbb{P})$ y $DF_k^{(n)} \to 0$ en $L^2(\Omega, V, \mathbb{P})$. Por el teorema de extensión de Hahn-Banach basta ver que el operador lineal D es continuo en $\mathcal{S}_V$. Para ello, considere una sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_V$ de variables aleatorias V-valuadas de la forma

$$F_n = \sum_{k=1}^{N_n} F_k^{(n)} v_k^n \qquad v_k^n \in V, \qquad F_k^{(n)} \in \mathcal{S},$$

que converge a cero respecto a la norma de $L^p(\Omega, V)$, y supongamos que DF_n converge en $L^p(\Omega, H\otimes V)$ a cierta variable aleatoria $\nu_1 \otimes \nu_2 \in L^p(\Omega, H\otimes V)$, con $\nu_1 \in L^p(\Omega, H)$ y $\nu_2 \in L^p(\Omega, V)$.

Sean $h \in H$ y $v \in V$ fijos. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\langle DF_n, h\rangle_H$ converge c.s. a $\langle \nu, h\rangle_H$. Para toda variable aleatoria suave y acotada $G \in \mathcal{S}_b(V)$ (donde $\mathcal{S}_b(V)$ denota al conjunto de variables aleatorias de la forma (1.52), con $G_k \in \mathcal{S}_b$), definimos

$$Z_\varepsilon := G \exp\{-\varepsilon W(h)^2\}.$$

Dicha variable es tal que $Z_\varepsilon W(h)$ está acotada. Utilizando argumentos análogos a la prueba del lema (5), se tiene que $\langle DF_n, h\otimes v\rangle_H Z_\varepsilon$ converge en $L^p(\Omega)$ y

$$\lim_n \mathbb{E}[Z_\varepsilon W(h) \langle F_n, u\rangle_V] = \lim_n \mathbb{E}[\langle DZ_\varepsilon, h\rangle_H \langle F_n, u\rangle_V] = 0. \tag{1.54}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle \nu_1\otimes\nu_2, h\otimes v\rangle_H Z_\varepsilon] &= \mathbb{E}\left[\lim_n \langle DF_n, h\otimes v\rangle_H Z_\varepsilon\right] \\
&= \lim_n \mathbb{E}\left[\langle DF_n, h\otimes v\rangle_H Z_\varepsilon\right] \\
&= \lim_n \mathbb{E}\left[\left\langle \sum_{k=1}^{N_n} DF_k^{(n)} \otimes v_k^n, h\otimes v\right\rangle_{H\otimes V} Z_\varepsilon\right] \\
&= \lim_n \sum_{k=1}^{N_n} \langle v_k^n, v\rangle_V \, \mathbb{E}\left[Z_\varepsilon \left\langle DF_k^{(n)}, h\right\rangle_H\right] \\
&= \lim_n \sum_{k=1}^{N_n} \langle v_k^n, v\rangle_V \left(\mathbb{E}[ZF_k^{(n)} W(h)] - \mathbb{E}[\langle DZ_\varepsilon, h\rangle_H F_k^{(n)}]\right) \\
&= \mathbb{E}[Z_\varepsilon \langle F_n, u\rangle_V W(h)] - \mathbb{E}[\langle DZ_\varepsilon, h\rangle_H \langle F_n, u\rangle_V],
\end{aligned} \tag{1.55}$$

y por ende, utilizando las igualdades (1.54) y (1.55) concluimos que

$$\mathbb{E}[\langle \nu_1\otimes\nu_2, h\otimes v\rangle_H Z_\varepsilon] = 0.$$

Por un argumento análogo a la prueba del lema (5), se concluye que $\langle \nu, h\rangle = 0$ c.s. y consecuentemente $\nu = 0$ c.s. $\square$

Definición 5. *Supongamos que $F \in \mathcal{S}$ es una variable aleatoria real suave. Entonces $DF \in \mathcal{S}(H)$ es una variable aleatoria suave en H, y por ende, podemos definir la iteración $D^2F = D(DF)$ de acuerdo a la ecuación* (1.53) *y al lema* 6*. De esta manera, si es de la forma* (1.38)*, entonces DF es una función simple dada por*

$$DF = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} f(W(h_1), ..., W(h_n))h_k,$$

y por ende,

$$\begin{aligned} D^2F &= \sum_{j=1}^{n} D\frac{\partial}{\partial x_j} f(W(h_1), ..., W(h_n)) \otimes h_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(W(h_1), ..., W(h_n))h_i \otimes h_k. \end{aligned}$$

De manera análoga definimos la k-ésima iteración de la derivada para una variable aleatoria de la forma (1.38) *como $D^kF = DD^{k-1}F$, o equivalentemente*

$$D^kF = \sum_{i_1,...,i_{k=1}}^{n} \frac{\partial^k}{\partial x_1 \cdots \partial x_k} f(W(h_1), ..., W(h_n))h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_k}.$$

Para todo $p \geq 1$ y todo natural $k \geq 1$ definimos la familia de seminormas en $\mathcal{S}$ por

$$||F||_{k,p} = \left(\mathbb{E}[||F||^p] + \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}[||D^jF||^p_{H^{\otimes j}}] \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Utilizando iteradamente el lema 6, es posible mostrar que esta familia de seminormas es tal que el operador D^k puede extenderse a una función lineal definida en la cerradura de $\mathcal{S}$ respecto a la norma $L^p(\Omega, H^{\otimes k})$. Denotaremos a dicho dominio por $\mathbb{D}^{k,p}$

A continuación se define el operador de derivada direccional de una variable aleatoria

Definición 6. *Sea $h \in H$. Definimos el operador de derivada direccional*

$$D^h : Dom(D^h) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega),$$

para un elemento $F \in \mathcal{S}$ de la forma (1.38)*, de la siguiente manera*

$$D^hF = \langle DF, h \rangle_H . \tag{1.56}$$

Por un argumento análogo a los lemas 5 *y* 6*, se tiene que D^h es un operador lineal continuo que puede extenderse respecto a la norma de $L^p(\Omega)$, a cierto subespacio cerrado que denotaremos por $\mathbb{D}^{h,p}$. Equivalentemente, $\mathbb{D}^{h,p}$ consiste en la cerradura de $\mathcal{S}$, respecto a la norma*

$$||F||_{h,p} = ||F||_p + ||D^hF||_p.$$

Es fácil verificar que la derivada de una variable aleatoria de la forma

$$F = f(W(h_1), ..., W(h_n))$$

en la dirección h, satisface la igualdad

$$\langle DF, h\rangle_H = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(f(W(h_1) + \varepsilon \langle h_1, h\rangle_H, ..., W(h_n + \varepsilon \langle h_n, h\rangle_H)) - f(W(h_1), ..., W(h_n))\right).$$

El siguiente resultado caracteriza al dominio de convergencia del operador $\mathbb{D}^{1,2}$ en términos de la descomposición en caos.

Proposición 4. *Sea F una variable aleatoria cuadrado integrable con descomposición en caos $F = \sum_{n=0}^{\infty} J_n F$. Entonces $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ si y sólo si*

$$\mathbb{E}[||DF||_H^2] = \sum_{n=1}^{\infty} n||J_nF||_2^2 < \infty \tag{1.57}$$

Más aún, si (1.57) *se cumple, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $D(J_nF) = J_{n-1}(DF)$, donde J_k denota la proyección en caos descrita en el Teorema* 2.

Demostración. En el contexto de la notación utilizada en la proposición 1 y dada una base ortonormal $\{e_k\}_k$ de H fija, supondremos que $F = \Phi_a$ para cierto multi-índice $a := \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $|a| = n \in \mathbb{N}$. Entonces, utilizando la relación $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_n(x) = H_{n-1}(x)$ podemos calcular $D\Phi_a$ de la siguiente manera

$$D\Phi_a = \sqrt{a!}\sum_{j=1}^{\infty} H_{a_j-1} \prod_{\substack{i\geq 1\\ i\neq j}} H_{a_j} e_j.$$

Por lo tanto $D(\Phi_a) \in \mathcal{H}_{n-1}(H)$ y consecuentemente $D(J_nF) = J_{n-1}(DF)$. Adicionalmente, por la Proposición 1 se tiene que $H_{a_j-1}\prod_{\substack{i\geq 1\\ i\neq j}} H_{a_j} \in \mathcal{H}_{n-1}$ por lo que, utilizando la relación (1.17) así como el hecho de que $||\Phi_a||_2^2 = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[||D(\Phi_a)||^2] &= a!\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[|H_{a_j-1}\prod_{\substack{i\geq 1\\ i\neq j}} H_{a_j}|^2] \\
&= a!\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{\substack{i\geq 1\\ i\neq j}} a_i!(a_j-1)} = n||\Phi_a||_2^2
\end{aligned}$$

Esto prueba el resultado para el caso en que $F = \Phi_a$.

A continuación haremos la prueba para el caso en que $F \in \mathcal{H}_n$, para cierto $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{a^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una enumeración de los multi-índices $a \in \Lambda$ con $|a| = n$. Si $F \in \mathcal{H}_n$, por la proposición 1 existe una sucesión $F_m \in \mathcal{H}_n$ de variables de la forma

$$F_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \Phi_{a^{(k)}}, \qquad \alpha_k \in \mathbb{R} \tag{1.58}$$

tales que F es el límite en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ de la sucesión F_m. Note que, por linealidad, la proposición es válida para variables del tipo (1.58) y por ende,

$$\mathbb{E}[||DF_m||_H^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k||J_k F_m||_2^2 = n||F_m||_2^2. \tag{1.59}$$

Queremos mostrar que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} n||J_n F||_2^2 < \infty$. Para probar la primera implicación supongamos que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. De la convergencia de F_n a F respecto a la norma $|| \cdot ||_{1,2}$ se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_n \mathbb{E}[||DF_m||_H^2] &= \mathbb{E}[||DF||_H^2] \\ \lim_n \mathbb{E}[|F_m|^2] &= \mathbb{E}[|F|^2]. \end{aligned}$$

Esto aunado a la igualdad 1.59 implica que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k||J_k F||_2^2 = n||F||_2^2 &= \lim_m n||F_m||_2^2 \\ &= \lim_m \mathbb{E}[||DF_m||_H^2] \\ &= \mathbb{E}[||DF||_H^2] < \infty. \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que

$$n \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k||J_k F||_2^2 < \infty.$$

Para verificar que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ basta probar que la sucesión F_n es de Cauchy respecto a la norma $|| \cdot ||_{1,2}$ y que su límite respecto a dicha norma es F. Sean M, m_1 y m_2 números naturales tales que $M \leq m_1 \leq m_2$. Entonces

$$\begin{aligned} ||F_{m_1} - F_{m_2}||_{1,2}^2 &= ||F_{m_1} - F_{m_2}||_2^2 + \mathbb{E}[||DF_{m_1} - DF_{m_2}||_H^2]^2 \\ &= ||F_{m_1} - F_{m_2}||_2^2 + \mathbb{E}[||\sum_{k=m_1}^{m_2} \alpha_k D\Phi_{a^{(k)}}||_H^2]^2 \\ &= ||F_{m_1} - F_{m_2}||_2^2 + \sum_{k=m_1}^{m_2} n\alpha_k^2. \end{aligned}$$

El primer término del lado derecho de la igualdad tiende a cero cuando $M \to \infty$ por la convergencia en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ de F_m mientras que el segundo término tiende a cero puesto que la serie $n \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k||J_k F||_2^2$ es convergente. Por lo tanto la sucesión F_m converge respecto a la norma de $\mathbb{D}^{1,2}$ a cierta variable F', la cual, como se muestra a continuación, es igual a F con probabilidad uno

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|F - F'|^2] &\leq \mathbb{E}[|F - F_m|^2] + \mathbb{E}[|F' - F_m|^2] \\ &\leq ||F - F_m||_2 + ||F' - F_m||_{1,2} \overset{m}{\to} 0 \end{aligned}$$

por lo tanto F es el límite de F_m respecto a la norma de $\mathbb{D}^{1,2}$ y consecuentemente $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Finalmente, de la convergencia en $||\cdot||_{1,2}$ de F_n, se sigue que

$$D(J_nF) = \lim_m D(J_nF_m) = \lim_m J_{n-1}DF_m.$$

De la cerradura de $\mathcal{H}_n$ se sigue que $D(J_nF) \in \mathcal{H}_{n-1}$. Esto demuestra el resultado para el caso en que $F \in \mathcal{H}_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Para demostrar el resultado para $F \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ arbitrario procedemos de manera análoga; sea

$$F_m = \sum_{k=1}^{m} J_kF.$$

Entonces, por la descomposición en caos de $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ se tiene que F_m converge en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ a F. Por linealidad la proposición es válida para las variables F_m, y ya que las variables J_nF son ortogonales, se tiene que

$$\mathbb{E}[||DF_m||_H^2] \;\; = \;\; \sum_{n=1}^{m} n||J_nF||_2^2.$$

Queremos mostrar que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} n||J_nF_m||_2^2 < \infty$. Para probar la primera implicación supongamos que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Entonces, por la ortogonalidad de las variables DJ_nF (dichas variables son ortogonales pues $DF_n \in \mathcal{H}_{n-1}(H)$), se tiene que

$$\mathbb{E}[||DF||_H^2] \;\; \geq \;\; \mathbb{E}[||DF_m||_H^2] = \sum_{n=1}^{m} n||J_nF||_2^2,$$

y ya que $\mathbb{E}[||DF||_H^2] < \infty$ deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n||J_nF||_2^2 < \infty.$$

Recíprocamente, supongamos que $\sum_{k=1}^{\infty} k||J_kF||_2^2 < \infty$. Para verificar que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ basta probar que la sucesión F_n es de Cauchy respecto a la norma $||\cdot||_{1,2}$ y que su límite respecto a dicha norma es F. Sean M, m_1 y m_2 números naturales tales que $M \leq m_1 \leq m_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
||F_{m_1} - F_{m_2}||_{1,2}^2 &= ||F_{m_1} - F_{m_2}||_2^2 + \mathbb{E}[||DF_{m_1} - DF_{m_2}||_H^2]^2 \\
&= ||F_{m_1} - F_{m_2}||_2^2 + \mathbb{E}[||\sum_{k=m_1}^{m_2} DJ_kF||_H^2]^2 \\
&= ||F_{m_1} - F_{m_2}||_2^2 + \sum_{k=m_1}^{m_2} k||J_kF||_2^2.
\end{aligned}$$

El primer término del lado derecho de la igualdad tiende a cero cuando $M \to \infty$ por la convergencia en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ de F_m mientras que el segundo término tiende a cero puesto que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k||J_k F||_2^2$ es convergente. Por lo tanto la sucesión F_m converge respecto a la norma de $\mathbb{D}^{1,2}$ a cierta variable F', la cual es igual a F con probabilidad uno.

□

El siguiente resultado es la regla de la cadena

Proposición 5. *Considere, para $p \geq 1$ fijo, una función $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable con derivadas parciales acotadas, y $F = (F^1, ..., F^m)$ un vector aleatorio cuyas componentes pertenecen al espacio $\mathbb{D}^{1,p}$. Entonces $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$ y*

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^{m} DF^i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(F).$$

Demostración. Supondremos primeramente que φ es infinitamente derivable, y que las variables F^j son de la forma

$$F^j = f_j(W(h_1^j), ..., W(h_{N_j}^j)), \tag{1.60}$$

donde las funciones f_j son infinitamente derivables, cuyas derivadas tienen crecimiento polinomial. Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} N_k$ y definamos la función

$$g(x_1, ..., x_{S_m}) := (f_1(x_1, ..., x_{S_1}), ..., f_m(x_{S_{m-1}+1}, ..., x_{S_m})),$$

y los vectores aleatorios

$$Y_k := (W(h_1^k), ..., W(h_{N_k}^k)).$$

Se tiene entonces que

$$\varphi(F) = \varphi \circ g(Y_1, ..., Y_m)$$

por lo tanto $\varphi(F) \in \mathcal{S}$ (donde $\mathcal{S}$ está definida como el conjunto de funciones de la forma (1.38)), y por ende, podemos calcular $D(\varphi(F))$ utilizando la regla de la cadena de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
D(\varphi(F)) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{N_j} \frac{\partial}{\partial x_{S_j+l}} \varphi \circ g(Y_1, ..., Y_m) h_l^j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{N_j} \frac{\partial}{\partial x_{S_j+l}} g(Y_1, ..., Y_m) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(g(Y_1, ..., Y_m)) h_l^j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(g(Y_1, ..., Y_m)) \sum_{l=1}^{N_j} \frac{\partial}{\partial x_l} f_j(Y_1, ..., Y_m) h_l^j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(g(Y_1, ..., Y_m)) DF^j
\end{aligned}$$

Esto prueba el resultado cuando los F^j son de la forma (1.60). Para el caso en que $F^j \in \mathbb{D}^{1,p}$ son arbitrarios, consideramos m sucesiones $\{F^{j,l}\}_{l\geq 1}$, $1 \leq j \leq m$ de variables aleatorias tales que $F^{j,l} \in \mathcal{S}$ y $F^{j,l}$ tiende a F^j respecto a la norma de $\mathbb{D}^{1,p}$ cuando l tiende a infinito. Por lo probado anteriormente, se tiene que el vector aleatorio F^l definido por $F^l := (F^{1,l}, ..., F^{m,l})$ satisface

$$D(\varphi(F^l)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F^l)DF^{i,l}. \tag{1.61}$$

Ya que φ es derivable con derivadas acotadas, se tiene que existe una constante $c > 0$ tal que, para $x, y \in \mathbb{R}^m$ arbitrarios,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c||x - y||_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.62}$$

Y ya que D es un operador lineal y continuo en $\mathcal{S}$, es acotado. Por lo tanto, concluimos que existe una constante $c' > 0$ tal que, para $l_1, l_2 \geq 0$ arbitrarios,

$$||D(\varphi(F^{l_1})) - D(\varphi(F^{l_2}))||_H^p \leq (cc')^p||F^{l_1} - F^{l_2}||_{\mathbb{R}^n}^p. \tag{1.63}$$

Por lo tanto, gracias a la convergencia en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ de $F^{l,j}$, así como las ecuaciones (1.63) y (1.62), se sigue que la sucesiones

$$\left\{\mathbb{E}[||D(\varphi(F^l))||_H^p]\right\}_{l\in\mathbb{N}} \qquad \text{y} \qquad \left\{\mathbb{E}[||\varphi(F^l)||_H^p]\right\}_{l\in\mathbb{N}}$$

son de Cauchy. Por lo tanto $\varphi(F^l)$ converge cuando l tiende a infinito, respecto a la norma de $\mathbb{D}^{1,p}$. Siguiendo un argumento análogo al utilizado durante la prueba de la Proposición 4 se verifica que $\varphi(F)$ es igual, casi seguramente, al límite de $\varphi(F^l)$ respecto a la norma $\mathbb{D}^{1,p}$ y por ende, $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$. Resta probar la igualdad

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F)DF^j.$$

Utilizando el hecho de que $\varphi(F^l)$ converge a $\varphi(F)$ respecto a la norma $||\cdot||_{1,p}$, así como las igualdades (1.61) y (1.62), se pueden verificar, para $h \in H$ arbitrario, las siguientes convergencias en medida

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F^l)\left\langle DF^{i,l}\right\rangle_H &\xrightarrow{l} \langle D(\varphi(F)), h\rangle_H, \\ \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F^l) &\xrightarrow{l} \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F), \\ \left\langle DF^{i,l}, h\right\rangle_H &\xrightarrow{l} \left\langle DF^i, h\right\rangle_H. \end{aligned}$$

Esto implica, por la unicidad casi segura de los límites en medida, que

$$\langle D(\varphi(F)), h\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F)DF, h\right\rangle \qquad \mathbb{P}\text{ - }c.s.$$

En particular, si $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de H, se tiene que con probabilidad 1,

$$\langle D(\varphi(F)), e_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(F) DF, e_k \right\rangle \qquad \text{para todo } k,$$

de donde se sigue el resultado para el caso en que φ es infinitamente derivable. Si φ pertenece únicamente a $C^{\infty}[\mathbb{R}^d, \mathbb{R}]$, utilizamos la siguiente aproximación para φ:

$$\varphi_n := \varphi * \psi_n,$$

donde * denota la convolución de funciones y ψ_n es una aproximación de la identidad infinitamente derivable, la cual podemos definir como

$$\psi_n(x) := n^m h(mx), \qquad x \in \mathbb{R}^m$$

donde h es la densidad de la distribución normal estándar[8] en $\mathbb{R}^m$. Se tiene entonces que φ_n es una sucesión de funciones infinitamente derivables que convergen puntualmente a φ (para mayores referencias sobre estos resultados ver [30], capítulo 6). Por lo mostrado anteriormente, la regla de la cadena es válida para φ_n, el resultado se sigue entonces mediante un argumento de aproximación.

$\square$

1.2.2. El operador de derivada para el ruido blanco

En esta sección vamos a suponer que el espacio de Hilbert $H = L^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}, \mu)$, para cierto espacio de medida $(\mathbb{T}, \mathcal{B}, \mu)$. La derivada de una variable aleatoria en $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ debe ser una variable aleatoria cuadrado integrable con valores en H, es decir, $DF \in L^2(\Omega, H, \mathbb{P}) \cong L^2(\mathbb{T} \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes \mathbb{P})$. Por lo tanto podemos pensar a DF como un proceso estocástico indexado por $\mathbb{T}$, el cual denotaremos por $\{D_t F\}_{t \in \mathbb{T}}$. De manera general, si $k \geq 2$ y $F \in \mathbb{D}^{k,2}$, la derivada iterada $D^k F$ es un proceso estocástico indexado por $\mathbb{T}^k$, el cual denotaremos por

$$D^k F = \{D_{t_1, \ldots, t_k} F\}. \tag{1.64}$$

Recordemos que, gracias al teorema 3, si $F \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$, entonces F puede descomponerse como

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(f_k),$$

donde I_k denota la integral de Itô múltiple (ver sección 1.1.1), y donde los kerneles f_k son funciones simétricas de $L^2(\mathbb{T}^k, \mu^k)$. En este caso, la derivada de F puede calcularse de la siguiente manera

[8] De hecho puede tomarse h como cualquier función positiva, infinitamente derivable tal que $\int_{\mathbb{R}^m} h(x) \mathrm{d}x = 1$

Proposición 6. *Sea $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ una variable aleatoria cuadrado integrable de la forma*

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(f_k). \tag{1.65}$$

Entonces, de acuerdo a la notación (1.64), *se tiene que*

$$D_t F = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, t)). \tag{1.66}$$

Demostración. Si $F = I_m f$, para cierta función elemental f de la forma

$$f(t_1, ..., t_m) = \sum_{i_1,...,i_m=1}^{n} a_{i_1,...,i_m} \mathbb{1}_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_m}}(t_1, ..., t_m),$$

entonces, de acuerdo a la definición 4, se tiene que

$$\begin{aligned} DF &= \sum_{i_1,...,i_m=1}^{n} a_{i_1,...,i_k} D\left(W(\mathbb{1}_{A_{i_1}}) \cdots W(\mathbb{1}_{A_{i_m}})\right) \\ &= \sum_{i_1,...,i_m=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i_1,...,i_k} W(\mathbb{1}_{A_{i_1}}) \cdots W(\mathbb{1}_{A_{i_{j-1}}}) \mathbb{1}_{A_{i_j}} W(\mathbb{1}_{A_{i_{j-1}}}) \cdots W(\mathbb{1}_{A_{i_m}}). \end{aligned}$$

Por ende, la variable aleatoria $DF \in L^2(\mathbb{T} \times \Omega, \mu \otimes \mathbb{P})$ satisface

$$DF(t, \omega) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i_1,...,i_m=1}^{n} a_{i_1,...,i_m} \mathbb{1}_{A_{i_j}}(t) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{m} W(\mathbb{1}_{A_{i_l}})(\omega). \tag{1.67}$$

Note que, para $t \in \mathbb{T}$ fijo, la segunda suma en el lado derecho de la igualdad (1.67) coincide con la integral de Itô múltiple I_{m-1}, de la función g definida por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^{m-1} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_{m-1}) & \longmapsto & f(x_1, ..., x_{j-1}, t, x_{j+1}, ..., x_{m-1}). \end{array}$$

Ya que la función f es simétrica, se tiene que $g(x) = f(x, t)$. Por lo tanto, de la igualdad (1.67) podemos concluír que

$$DF(t, \omega) = \sum_{j=1}^{m} I_{m-1} f(\cdot, t)(\omega) = m I_{m-1} f(\cdot, t)(\omega).$$

Esto demuestra el resultado para $F = I_m(f)$, para cierto kernel f. El resultado puede generalizarse de manera directa para variables de la forma

$$F = \sum_{k=0}^{N} I_k f_k,$$

para ciertos kerneles f_k, y de aquí se sigue el resultado para F en general utilizando un argumento de aproximación □

A continuación calcularemos la derivada de esperanzas condicionales respecto a cierta clase de σ-álgebras.

Lema 7. *Para $A \in \mathcal{B}$ arbitrario, denotaremos por $\mathcal{F}_A$ a la σ-álgebra generada por las variables $\{W(\mathbb{1}_B) \mid B \in \mathcal{B}, B \subset A\}$. Suponga que F es una variable aleatoria de la forma*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n),$$

donde f_n son funciones simétricas en $L^2(\mathbb{T}^n, \mu^n)$. Se tiene entonces que

$$\mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_A] = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n \mathbb{1}_A^{\otimes n}), \tag{1.68}$$

donde $\otimes$ denota el producto tensorial (para mayores referencias ver apéndice).

Demostración. Basta probar el resultado para el caso en que $F = I_n(f_n)$ para cierta función $f_n \in \mathcal{E}_n$ (el caso general se obtiene por un argumento de aproximación). Por la linealidad de las integrales de Itô múltiples, podemos suponer que el kernel f_n es de la forma $\mathbb{1}_{B_1 \times \ldots \times B_n}$, donde $B_1, ..., B_n$ son conjuntos ajenos a pares de medida finita. Se tiene entonces, de acuerdo a la notación (1.64), que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_A] &= \mathbb{E}\left[W(B_1) \cdots W(B_m) \mid \mathcal{F}_A\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} (W(B_i \cap A) + W(B_i \cap A^c)) \mid \mathcal{F}_A\right]. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Note que la variables $W(B_i \cap A)$ son medibles respecto a $\mathcal{F}_A$ mientras que $W(B_i \cap A^c)$ son independientes de $\mathcal{F}_A$. Por lo tanto, definiendo $A_i^0 := A_i$, y $A_i^1 := A_i^c$, y expandiendo los términos

$$\prod_{i=1}^{n} (W(B_i \cap A) + W(B_i \cap A^c))$$

en la igualdad (1.69), obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_A] &= \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{1} \mathbb{E}\left[W(B_1 \cap A^{i_1}) \cdots W(B_n \cap A^{i_n}) \mid \mathcal{F}_A\right] \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{1} \mathbb{E}\left[W(B_1 \cap A^{i_1}) \mid \mathcal{F}_A\right] \cdots \mathbb{E}\left[W(B_n \cap A^{i_n}) \mid \mathcal{F}_A\right] \\ &= \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{E}\left[W(B_i \cap A) \mid \mathcal{F}_A\right] + \mathbb{E}[W(B_i \cap A^c)) \mid \mathcal{F}_A]. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Utilizando la independencia de las variables $W(B_1 \cap A), ..., W(B_n \cap A)$ respecto a $\mathcal{F}_A$ en la igualdad (1.70) obtenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_A] &= \prod_{i=1}^{n}(\mathbb{E}\left[W(B_i \cap A) \mid \mathcal{F}_A\right] + \mathbb{E}[W(B_i \cap A^c)]) \\
&= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[W(B_i \cap A) \mid \mathcal{F}_A\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} W(B_i \cap A) \ \mid \ \mathcal{F}_A\right] \\
&= I_n(\mathbb{1}_{(B_1\cap A)\times\cdots\times(B_n\cap A)}).
\end{aligned}
$$

□

Proposición 7. *Suponga que F pertenece al dominio de $\mathbb{D}^{1,2}$, y que $A \in \mathcal{B}$. Entonces, en el contexto de la notación (1.64), la esperanza condicional $\mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_A]$ pertenece a $\mathbb{D}^{1,2}$, y se tiene lo siguiente*

$$D_t(\mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_A]) = \mathbb{E}[D_t F \mid \mathcal{F}_A]\mathbb{1}_A \qquad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Demostración. Por el lema 7 y la proposición 6 se tiene que

$$D_t(\mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_A]) = \sum_{n=1}^{\infty} nI_{n-1}(f_n(\cdot,t)\mathbb{1}_A^{\otimes(n-1)})\mathbb{1}_A(t) = \mathbb{E}[D_t F \mid \mathcal{F}_A]\mathbb{1}_A$$

□

Como consecuencia de esta proposición se tiene el siguiente corolario

Corolario 3. *Sea $A \in \mathcal{B}$, y suponga que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ es $\mathcal{F}_A$-medible. Entonces $D_t F$ es cero c.s. en $A^c \times \Omega$*

Dado un conjunto medible $A \in \mathcal{B}$, podemos definir el conjunto $\mathbb{D}^{A,2}$ de variables aleatorias que son derivables en A como la cerradura de $\mathcal{S}$ con respecto a la seminorma

$$||F||_{A,2}^2 = \mathbb{E}[F^2] + \mathbb{E}\left[\int_A (D_t F)^2 \mu(\mathrm{d}t)\right].$$

1.3. El operador de divergencia

En esta sección estudiaremos el operador de divergencia, definido como el adjunto del operador de derivada.

Definición 7. *Denotaremos por δ al operador adjunto de D, al cual llamaremos operador de divergencia. Es decir, δ es un operador lineal, no acotado, definido en un subconjunto de $L^2(\Omega, H, \mathbb{P})$ tal que*

i) El dominio de δ, denotado por $Dom(\delta)$, es el conjunto de variables aleatorias H-valuadas $u \in L^2(\Omega, H, \mathbb{P})$ tales que

$$|\mathbb{E}[\langle DF, u\rangle]| \leq c||F||_2 \tag{1.71}$$

Para toda $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Donde c es una constante que sólo depende de u.

ii) Si $u \in Dom(\delta)$, entonces $\delta(u)$ es un elemento de $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ caracterizado por la relación

$$\mathbb{E}[F\delta(u)] = \mathbb{E}[\langle DF, u\rangle_H] \tag{1.72}$$

para todo $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.

1.3.1. Propiedades del operador de divergencia

Si u pertenece al dominio de δ, tomando $F = 1$ en la relación (1.72) se tiene que

$$\mathbb{E}[\delta(u)] = 0.$$

Denotaremos por $\mathcal{S}_H$ el espacio vectorial de funciones de la forma

$$u = \sum_{j=1}^{n} F_j h_j. \tag{1.73}$$

donde F_j son variables aleatorias suaves, y los h_j son elementos de H. De la fórmula de integración por partes, establecida en el lema 3, se tiene que las variables u de esta forma pertenecen al dominio de δ y se satisface

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^{n} F_j W(h_j) - \sum_{j=1}^{n} \langle DF_j, h_j\rangle_H . \tag{1.74}$$

Para verificar esto note que, para toda variable aleatoria suave G se tiene que $F_k GW(h)$, $F_k \langle DG, h_k\rangle$ y $\langle DF_k, h_k\rangle$ son integrables (puesto que G, F_k y $W(h)$ son variables aleatorias suaves) y por ende, del lema de integración por partes deducimos lo siguiente

$$\mathbb{E}[F_k GW(h_k)] - \mathbb{E}[G\langle DF_k, h_k\rangle_H] \;=\; \mathbb{E}[F_k \langle DG, h_k\rangle_H]. \tag{1.75}$$

Por lo tanto, utilizando la ecuación (1.75) y la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[\langle DG, u\rangle_H]|^2 &\leq \sum_{k=1}^{n} |\mathbb{E}[F_k \langle DG, h_k\rangle_H]|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbb{E}[F_k GW(h)] - \mathbb{E}[G\langle DF_k, h_k\rangle_H]\right)^2 \\
&\leq 2\sum_{k=1}^{n} \text{máx}\{\mathbb{E}[F_k GW(h)]^2, \mathbb{E}[G\langle DF_k, h_k\rangle_H]^2\},
\end{aligned}$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[\langle DG, u\rangle_H]|^2 &\leq 2\sum_{k=1}^{n} |\mathbb{E}[F_k GW(h)]|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} |\mathbb{E}[G\langle DF_k, h_k\rangle_H]|^2 \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[F_k^2 W(h)^2\right] \mathbb{E}\left[G^2\right] + 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[G^2\right] \mathbb{E}\left[\langle DF_k, h_k\rangle_H^2\right] \\
&= \left(2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[F_k^2 W(h)^2\right] + 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\langle DF_k, h_k\rangle_H^2\right]\right) \mathbb{E}[G^2].
\end{aligned}$$

Consecuentemente u pertenece al dominio de δ. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle DF, u\rangle_H] &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\langle DF, h_k\rangle_H F_k] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[F_k W(h_k)] - \mathbb{E}[F \langle DF_k, h_k\rangle_H] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} F_k W(h_k) - \langle DF_k, h_k\rangle_H\right) F\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\delta(u) = \sum_{k=1}^{n} F_k W(h_k) - \langle DF_k, h_k\rangle_H .$$

En la siguiente proposición se muestra una amplia clase de variables aleatorias H-valuadas contenidas en el dominio del operador de divergencia. Antes de enunciar la proposición introduciremos la siguiente notación

i) Dados dos tensores simétricos $u \in H^{\widehat{\otimes} n}$ y $v \in H^{\widehat{\otimes}(n+m)}$, donde v es de la forma $v = v_1 \otimes v_2$ para ciertos elementos $v_1 \in H^{\widehat{\otimes} n}$ y $v_2 \in H^{\widehat{\otimes} m}$, podemos definir un tercer tensor simétrico perteneciente a $H^{\widehat{\otimes} m}$, el cual denotaremos por $\langle u, v\rangle_{H^{\otimes n}}$, mediante la fórmula

$$\langle u, v\rangle_{H^{\otimes n}} \quad := \quad v_2 \langle v_1, u\rangle_{H^{\otimes n}} . \tag{1.76}$$

Note que, ya que los tensores u, v son simétricos, se tiene que

$$\langle u, v\rangle_{H^{\otimes n}} \quad = \quad \langle \mathrm{symm}(u), \mathrm{symm}(v)\rangle_{H^{\otimes n}} .$$

ii) Si $u \in \mathbb{D}^{1,2}$, la derivada de u induce la siguiente transformación lineal, la cual denotaremos por Du

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{Du} & H \\ v & \longmapsto & \langle Du, v\rangle_H , \end{array} \tag{1.77}$$

donde la variable aleatoria H-valuada $\langle Du, v\rangle_H \in L^2(\Omega, H, \mathbb{P})$, tiene sentido de acuerdo a la notación establecida en i).

iii) Dados $u \in \mathbb{D}^{1,2}(H^{\otimes k})$ y $h \in H^{\otimes j}$, para $j \leq k$, denotaremos por $D^h u$ a la variable aleatoria en $L^2(\Omega, H^{\otimes(k-j)}, \mathbb{P})$ dada por

$$D^h u = \langle Du, h\rangle_{H^{\otimes j}} . \tag{1.78}$$

Es fácil verificar, utilizando un razonamiento análogo a los lemas 5 y 6, que el operador lineal D^h es continuo, y por ende, puede extenderse a la cerradura de $\mathcal{S}_{H^{\otimes k}}$ respecto a la norma

$$||F||_{2,H^{\otimes k},h} = \mathbb{E}[||F||^2_{H^{\otimes k}}]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}[||D^h F||^2_{H^{\otimes(k-j)}}]^{\frac{1}{2}}.$$

iv) Dado un operador lineal continuo $A : H \longrightarrow H$, y una base ortonormal de H, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Definimos la traza de A por

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), e_k \rangle_H \,.$$

Es posible verificar que dicha definición no depende de la base. Adicionalmente se tiene que, si $A, B : H \longrightarrow H$ son dos operadores lineales continuos, entonces

$$Tr(A \circ B) = \sum_{k,j=1}^{\infty} \langle B(e_k), e_j \rangle_H \langle A(e_j), e_k \rangle_H \,.$$

Proposición 8. *El espacio $\mathbb{D}^{1,2}(H)$, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, está contenido en el dominio de δ. Si $u, v \in \mathbb{D}^{1,2}$, entonces*

$$\mathbb{E}[\delta(u)\delta(v)] \;\; = \;\; \mathbb{E}[\langle u, v \rangle] + \mathbb{E}[Tr(Du \circ Dv)].$$

Donde las transformaciones lineales Du y Dv tienen sentido de acuerdo a ii) y Tr denota la traza, definida de acuerdo a iv).

Demostración. Comenzaremos mostrande el siguiente lema

Lema 8. *Si $F \in \mathcal{S}$, $h \in H$ y $u \in \mathcal{S}_H$ (donde $\mathcal{S}_H$ está definido como el conjunto de funciones de la forma (1.52)). Entonces se cumple la siguiente relación de conmutatividad*

$$D^h(\delta(u)) \;\; = \;\; \langle u, h \rangle + \delta(D^h u), \tag{1.79}$$

donde el producto interno $D^h u = \langle Du, h \rangle_H$ está definido de acuerdo a la notación establecida en (1.76).

Demostración. Suponga que u es una variable aleatoria suave, es decir, tiene la forma (1.73), para ciertas variables aleatorias suaves F_j con

$$F_k = f_k\left(W(v_1^{(k)}), ..., W(v_{N_k}^{(k)})\right) \qquad\qquad N_k \in \mathbb{N}.$$

Es fácil verificar que las variables F_k satisface la siguiente regla de Leibnitz

$$D(F_k W(h_k)) = DF_k W(h_k) + DW(h_k) F_k.$$

Por lo tanto, utilizando la regla de la cadena, la observación iii) y la relación (1.74), se tiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
D^h(\delta(u)) &= \sum_{k=1}^{n} D^h\left(\delta\left(F_k h_k\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} D^h(F_k W(h_k)) - \sum_{k=1}^{n} D^h(\langle DF_k, h_k\rangle_H) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle D(F_k W(h_k)), h\rangle_H - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_k} \left\langle v_j^{(k)}, h_k \right\rangle_H D^h \frac{\partial}{\partial x_j} f_k\left(W\left(v_1^{(k)}\right), ..., W\left(v_{N_k}^{(k)}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle W(h_k) DF_k, h\rangle_H + \sum_{k=1}^{n} \langle F_k D(W(h_k)), h\rangle_H - \\
&\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{i=1}^{N_k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f_k\left(W\left(v_1^{(k)}\right), ..., W\left(\left(v_{N_k}^{(j)}\right)\right)\right) \left\langle v_j^{(k)}, h_k \right\rangle_H \left\langle v_i^{(k)}, h \right\rangle_H
\end{aligned}
$$

y por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
D^h(\delta(u)) &= \sum_{k=1}^{n} W(h_k)\langle DF_k, h\rangle_H + F_k \langle h_k, h\rangle_H - \\
&\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_k} D^{h_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f_k(W(v_1^{(k)}), ..., W(v_{N_k}^{(k)})) \left\langle v_i^{(k)}, h \right\rangle_H\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} F_k \langle h, h_k\rangle_H + \sum_{k=1}^{n} D^h F_k W(h_k) - \sum_{k=1}^{n} D^{h_k}(D^h F_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} F_k \langle h, h_k\rangle_H + \sum_{k=1}^{n} \left(D^h F_k W(h_k) - \left\langle D(D^h F_k), h_k \right\rangle_H\right) \\
&= \langle u, h\rangle_H + \delta(D^h u).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la relación (1.79) se satisface para variables $u \in \mathcal{S}_H$.

□

Procederemos ahora con la demostración de (1.79). Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H. A partir de (1.79) y (1.72), deducimos que para cualesquiera $u, v \in \mathcal{S}_H$ se cumple lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\delta(u)\delta(v)] &= \mathbb{E}\left[\langle v, D(\delta(u))\rangle_H\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\langle v, e_i\rangle_H \langle e_i, D(\delta(u))\rangle\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\langle v, e_i\rangle_H D^{e_i}(\delta(u))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\langle v, e_i\rangle_H \Big(\langle u, e_i\rangle_H + \delta(D^{e_i}u)\Big)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\langle u, v\rangle\right] + \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\delta(D^{e_i}u)\langle v, e_i\rangle_H\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\langle u, v\rangle\right] + \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\langle D^{e_i}u, D\langle v, e_i\rangle_H\rangle_H\right],
\end{aligned}
$$

y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\delta(u)\delta(v)] &= \mathbb{E}\left[\langle u, v\rangle\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^{\infty}\langle D^{e_i}u, e_j\rangle_H \langle D\langle v, e_i\rangle_H, e_j\rangle_H\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\langle u, v\rangle\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^{\infty} D^{e_i}\langle u, e_j\rangle_H D^{e_j}\langle v, e_i\rangle_H\right] \\
&= \mathbb{E}[\langle u, v\rangle_H] + \mathbb{E}[Tr(Du\circ Dv)]. \qquad (1.80)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Tr(Du\circ Du)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} D^{e_i}\langle u, e_j\rangle_H D^{e_j}\langle u, e_i\rangle_H\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}(D^{e_i}\langle u, e_j\rangle_H)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}(D^{e_j}\langle u, e_i\rangle_H)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(D^{e_i}\langle u, e_j\rangle_H)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(D^{e_j}\langle u, e_i\rangle_H)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(D^{e_j}\langle u, e_i\rangle_H)^2\right],
\end{aligned}
$$

y por ende,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[Tr(Du \circ Du)] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N_k}\frac{\partial}{\partial x_k}f\left(W\left(v_1^{(k)}\right),...,W\left(v_{N_k}^{(k)}\right)\right)\left\langle v_l^{(k)}, e_j\right\rangle_H \langle h_k, e_j\rangle_H\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left\langle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N_k}\frac{\partial}{\partial x_k}f\left(W\left(v_1^{(k)}\right),...,W\left(v_{N_k}^{(k)}\right)\right)v_l^{(k)}\otimes h_k, e_j \otimes e_i\right\rangle_{H^{\otimes 2}}\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\langle Du, e_j \otimes e_i\rangle_{H^{\otimes 2}}^2\right] = \mathbb{E}\left[||Du||_{H\otimes H}^2\right].
\end{aligned} \tag{1.81}$$

Por lo tanto, de (1.80) y (1.81), se sigue que

$$\mathbb{E}[\delta(u)^2] \leq \mathbb{E}[||u||_H^2] + \mathbb{E}[||Du||_{H\otimes H}^2] = ||u||_{1,2,H}^2. \tag{1.82}$$

Finalmente, si $u \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$, entonces existe una sucesión $u^{(n)} \in \mathcal{S}_H$ tal que $u^{(n)}$ converge a u en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ y $Du^{(n)}$ converge a Du en $L^2(\Omega, H\otimes H, \mathbb{P})$. Por lo tanto, de la relación (1.82) se sigue que $\delta(u^{(n)})$ converge en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ a $\delta(u)$. Más aún, de las relaciones (1.81) y (1.80) se sigue que para toda $u \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$ se cumple

$$\mathbb{E}[\delta(u)\delta(v)] \quad = \quad \mathbb{E}[\langle u, v\rangle_H] + \mathbb{E}[Tr(Du \circ Dv)].$$

□

A continuación extenderemos la relación (1.79), la cual establece que

$$D^h(\delta(u)) = \langle u, h\rangle + \delta(D^h u)$$

a una clase más amplia de variables aleatorias. Para ello utilizaremos el siguiente lema

Lema 9. *Sea G una variable aleatoria cuadrado integrable. Suponga que existe una variable $Y \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ tal que*

$$\mathbb{E}[G\delta(hu)] = \mathbb{E}[YF] \qquad \textit{para toda } F \in \mathbb{D}^{1,2}.$$

Entonces $G \in \mathbb{D}^{h,2}$ y $D^hG = Y$.

Demostración. Gracias a la proposición 4, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[YF] &= \mathbb{E}[G\delta(hF)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[(J_nG)\delta(hF)] + \mathbb{E}[(J_0G)\delta(hF)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[FD^h(J_nG)] + \mathbb{E}[G]\mathbb{E}[\delta(hF)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[FJ_{n-1}D^hG]
\end{aligned}$$

es decir,

$$\langle F, Y\rangle_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle F, J_n(D^h G)\right\rangle_2$$

Por lo tanto, para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $J_k Y = J_k D^h G$, de donde se sigue el resultado. □

Proposición 9. *Suponga que $u \in \mathbb{D}^{h,2}(H)$, y $D^h u$ pertenece al dominio de la divergencia. Entonces $\delta(u) \in \mathbb{D}^{h,2}$, y la relación de conmutatividad* (1.79) *se cumple.*

Demostración. Sea $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Por (1.80), se tiene que

$$\mathbb{E}[\delta(u)\delta(Fh)] \;=\; \mathbb{E}[\langle u, Fh\rangle_H + Tr(Du \circ D(hF))].$$

Note que, para $v \in H$ arbitrario se tiene que

$$\begin{aligned} Du \circ D(hF)(v) &= Du(\langle D(hF), v\rangle_H) \\ &= \langle Du, h\,\langle DF, v\rangle_H\rangle_H \\ &= \langle DF, v\rangle_H \,\langle Du, h\rangle_H \\ &= \langle DF, v\rangle_H \, D^h u. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Tr(Du \circ D(hF)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle Du \circ D(hF)(e_k), e_k\rangle_H \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle DF, e_k\rangle_H \left\langle D^h u, e_k\right\rangle_H \\ &= \left\langle DF, D^h u\right\rangle_H . \end{aligned}$$

A partir de esta igualdad deducimos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta(u)\delta(Fh)] &= \mathbb{E}[\langle u, Fh\rangle_H + \left\langle DF, D^h u\right\rangle_H] \\ &= \mathbb{E}[\langle u, Fh\rangle_H + \delta(D^h u)F]. \end{aligned}$$

El resultado se sigue entonces del lema 9 □

La siguiente proposición nos permite factorizar variables aleatorias escalares en la divergencia

Proposición 10. *Sea $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ y sea u en el dominio de la divergencia tal que $Fu \in L^2(\Omega, H, \mathbb{P})$. Entonces Fu pertenece al dominio de la divergencia y se cumple*

$$\delta(Fu) \;=\; F(\delta(u)) - \langle DF, u\rangle_H . \tag{1.83}$$

Siempre y cuando el lado derecho de la igualdad sea cuadrado integrable

Demostración. Por la regla de la cadena se tiene que, para toda variable aleatoria $G \in \mathcal{S}_0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\langle DG, Fu\rangle_H] &= \mathbb{E}[\langle u, FDG\rangle_H] \\ &= \mathbb{E}[\langle u, D(FG) - GDF\rangle_H] \\ &= \mathbb{E}[(\delta(u)F - \langle u, DF\rangle_H)G]. \end{aligned}$$

De donde se sigue el resultado. □

El siguiente resultado es una versión de la proposición anterior, en la cual u es determinista. En este caso se pide únicamente que F sea derivable en la dirreción de h.

Proposición 11. *Sea $h \in H$ y $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Entonces Fh pertenece al dominio de δ y la siguiente igualdad se cumple*

$$\delta(Fh) = FW(h) - D^h F \tag{1.84}$$

Demostración. Gracias a la proposición 10, el resultado es válido si $F \in \mathcal{S}$. Por otro lado, si $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias en $\mathcal{S}$ que convergen en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ a F, y tales que $D^h F_n$ converge en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ a $D^h F$. Por un argumento análogo a la prueba de la proposición 9, podemos deducir, a partir de la igualdad (1.80), que

$$\mathbb{E}[\delta(Fh)^2] = \mathbb{E}[F^2||h||_H^2] + \mathbb{E}[(D^h F)^2].$$

Esto aunado a la convergencia en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ de las variables $D^h F_n$ y F_n implican el resultado. □

1.3.2. La integral de Skorohod

Supondremos a lo largo de esta sección que el espacio de Hilbert H tiene la forma $H = L^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}, \mu)$. Para cierto espacio de medida $(\mathbb{T}, \mathcal{B}, \mu)$. En este caso los elementos de $Dom(\delta)$ son procesos estocásticos cuadrado integrables (gracias a la identificación $L^2(\Omega, H, \mathbb{P}) = L^2(\Omega\times\mathbb{T}, \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{T}), \mathbb{P}\otimes\mu)$), y la divergencia $\delta(u)$ recibe el nombre de integral de Skorohod. Utilizaremos en lo sucesivo la siguiente notación

$$\delta(u) = \int_T u_t \delta W_t.$$

De los teoremas 2 y 3, se deduce que todo elemento $u \in L^2(\mathbb{T} \times \Omega, \mu \otimes \mathbb{P})$ tiene una expansión en caos de la forma

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, t)), \tag{1.85}$$

donde, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^2(\mathbb{T}^{n+1}, \mu^{n+1})$ es una función simétrica sobre las primeras n variables. Más aún, como las covarianzas de las integrales de Itô múltiples satisfacen la relación[9]

$$\mathbb{E}[I_m(f)I_q(g)] = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq q \\ n!\langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle_{L^2(T^m,\mu^m)} & \text{si } n = q, \end{cases} \tag{1.86}$$

[9] ver sección 1.1.1

se tiene que

$$\mathbb{E}\left[\int_T u(t)^2\mu(\mathrm{d}t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} n!||f_n||^2_{L^2(\mathbb{T}^{n+1},\mu^{n+1})}.$$

El siguiente resultado expresa al operador δ en términos de la expansión en caos de u. derivadaruidoblanco

Proposición 12. *Sea $u \in L^2(\mathbb{T}\times\Omega, \mu\otimes\mathbb{P})$, con expansión dada por* (1.85). *Entonces u pertence a Dom(δ) si y sólo si la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$$

converge en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$, en cuyo caso

$$\delta(u) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$$

Demostración. Supongamos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$$

converge en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$. Denotaremos por $\tilde{f}_n$ a la simetrización de f_n. Considere una variable aleatoria $G := I_n(g) \in \mathcal{H}_n$, para $n\in\mathbb{N}$ y $g : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}$ simétrica. Gracias la proposición 4 se tiene que DG pertenece[10] a $\mathcal{H}_{n-1}(H)$, por lo que aplicando el teorema de Fubini, la proposición 6 y las expresiones (1.85) y (1.86), deducimos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle u, DG\rangle_H] &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{T}} u_t D_t G\mu(\mathrm{d}t)\right] = \int_T \mathbb{E}\left[u_t D_t G\right]\mu(\mathrm{d}t)\\
&= \int_{\mathbb{T}} \mathbb{E}\left[u_t n I_{n-1}(g(\cdot,t))\right]\mu(\mathrm{d}t)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\int_{\mathbb{T}} \mathbb{E}\left[I_m(f_m(\cdot,t)) n I_{n-1}(g(\cdot,t))\right]\mu(\mathrm{d}t)\\
&= \int_{\mathbb{T}} \mathbb{E}\left[I_{n-1}(f_{n-1}(\cdot,t)) n I_{n-1}(g(\cdot,t))\right]\mu(\mathrm{d}t)\\
&= n(n-1)!\int_{\mathbb{T}} \langle f_{n-1}(\cdot,t), g(\cdot,t)\rangle_{L^2(\mathbb{T}^{n-1},\mu^{n-1})}\,\mu(\mathrm{d}t)\\
&= n(n-1)!\,\langle f_{n-1}, g\rangle_{L^2(\mathbb{T}^n,\mu^n)} = n!\left\langle \tilde{f}_{n-1}, g\right\rangle_{L^2(\mathbb{T}^n,\mu^n)}\\
&= \mathbb{E}[I_n(\tilde{f}_{n-1})I_n g] = \mathbb{E}[I_n(\tilde{f}_{n-1})G].
\end{aligned} \tag{1.87}$$

A partir de la ecuación (1.87) deducimos que si $u \in$Dom(δ), entonces

$$\mathbb{E}[\delta(u)G] = \mathbb{E}[\langle u, DG\rangle_H] = \mathbb{E}[I_n(\tilde{f}_{n-1})G].$$

[10]Donde $\mathcal{S}_H$ denota al conjunto de variables aleatorias de la forma (1.52)

Si tomamos $J_n u$ en lugar de u en la igualdad anterior, y denotamos por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_n}$ a la restricción de $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ a $\mathcal{H}_n$, obtenemos que para cada $G \in \mathcal{H}_n$

$$\begin{aligned}\langle \delta(J_n u), G\rangle_{\mathcal{H}_n} &= \mathbb{E}[\delta(J_n u)G] = \mathbb{E}[\langle J_n u, DG\rangle_H] \\ &= \mathbb{E}[I_n(\tilde{f}_{n-1})G] = \left\langle I_n(\tilde{f}_{n-1}), G \right\rangle_{\mathcal{H}_n}.\end{aligned}$$

De la igualdad anterior se sigue que $I_n(g)$ coincide con la n-ésima proyección en caos de u. Consecuentemente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}\left(\tilde{f}_n\right)$ converge en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ y su límite coincide con $\delta(u)$. Recíprocamente, si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$ converge en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ a cierta variable aleatoria V, entonces, de (1.87) se sigue que

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{T}} u_t D_t \left(\sum_{n=0}^{N} I_n(g_n)\right)\mu(\mathrm{d}t)\right] = \mathbb{E}\left[V\sum_{n=0}^{N} I_n(g_n)\right].$$

Por lo tanto, para todo $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ se tiene que

$$\left\langle u, D\left(\sum_{n=0}^{N} J_n F\right)\right\rangle_{L^2(\Omega,H,\mathbb{P})} = \mathbb{E}[V\sum_{n=0}^{N} I_n(g_n)] \leq ||V||_2||F||_2.$$

Ya que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, el teorema de descomposición en caos garantiza que la sucesión $\sum_{n=0}^{N} J_n F$ converge en $L^2(\Omega,H,\mathbb{P})$ a F. Consecuentemente,

$$\langle u, DF\rangle_{L^2(\Omega,H,\mathbb{P})} \leq ||V||_2||F||_2.$$

Por lo tanto u pertenece al dominio de δ, y de la primera parte de la demostración se sigue el resultado. □

Observación
De la proposición 12, y la ecuación (1.86), se sigue que el dominio de δ coincide con el subespacio de $L^2(\mathbb{T}\times\Omega,\mu\otimes\mathbb{P})$ de procesos que satisfacen la condición

$$\mathbb{E}[\delta(u)^2] = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!||\tilde{f}||^2_{L^2(\mathbb{T}^{n+1},\mu^{n+1})}. \tag{1.88}$$

En lo sucesivo, denotaremos por $\mathbb{L}^{1,2}$ al espacio $\mathbb{D}^{1,2}(L^2(\mathbb{T},\mu))$, el cual, por la proposición 8 está contenido en el dominio de δ.

Al particularizar varias las propiedades del operador de divergencia (obtenidas en la sección anterior) para el caso del ruido blanco obtenemos propiedades muy similares a las de la integral de Itô, de hecho, como se verá más adelante, la integral de Skorohod generaliza a la integral de Itô. Por ejemplo, de la relación (1.79) se tiene que

$$\mathbb{E}[\delta(u)\delta(v)] = \int_{\mathbb{T}} \mathbb{E}[u_t v_t]\mu(\mathrm{d}t) + \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \mathbb{E}[D_s u_t D_t v_s]\mu(\mathrm{d}s)\mu(\mathrm{d}t). \tag{1.89}$$

Una consecuencia de esta relación es que, si u y v son adaptados a la filtración generada por el movimiento browniano $B_t := W(\mathbb{1}_{[0,t]})$, por el corolario 3 se tiene que $D_s u_t = 0$ c.s. para cualesquiera $s, t \geq 0$ tales que $s > t$. Por lo tanto, de la igualdad (1.89) se tiene que

$$\mathbb{E}[\delta(u)\delta(v)] = \int_{\mathbb{T}} \mathbb{E}[u_t v_t]\mu(\mathrm{d}t),$$

la cual es la propiedad de isometría de la integral de Itô.

Por otro lado, la proposición 11 en el caso del ruido blanco puede interpretarse, como se muestra en la siguiente proposición, como una versión de teorema fundamental del calculo (pensando en D y δ como la derivada e integral para funciones reales)

Proposición 13. *Suponga que $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ y que para casi todo $t \in \mathbb{R}^+$ el proceso $\{D_t u_s\}_{s\in\mathbb{T}}$ es Skorohod integrable. Suponga adicionalmente que existe una versión del proceso $\{\int_{\mathbb{T}} D_t u_s dW_s\}_{t\geq 0}$ que pertenece a $L^2(\mathbb{T}\times\Omega, \mu\otimes\mathbb{P})$. Entonces $\delta(u) \in \mathbb{D}^{1,2}$, y se tiene lo siguiente*

$$D_t(\delta(u)) = u_t + \int_{\mathbb{T}} D_t u_s dW_s. \tag{1.90}$$

El siguiente resultado caracteriza a la familia de procesos estocásticos que pueden escribirse como DF para cierta variable F.

Proposición 14. *Suponga que $u \in L^2(\mathbb{T}\times\Omega, \mu\otimes\mathbb{P})$ tiene la forma*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, y)).$$

Existe una variable $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ tal que $DF = u$ si y solo si los kerneles f_n son funciones simétricas sobre todas sus componentes

Demostración. Supongamos que $u = DF$ para cierta $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Aplicando la proposición 6 a la variable F, se sigue que los kerneles f_n son simétricos (Basta comparar las descomposiciones (1.65) y (1.66)). Supongamos recíprocamente que

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, y))$$

para ciertos los kerneles f_n simétricos sobre todas sus variables. Considere la sucesión

$$X_N := \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} I_{n+1}(f_n).$$

Note que la norma en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ de las variables $\frac{1}{n+1}I_{n+1}(f_n)$ coincide con la norma en $L^2(\Omega, H, \mathbb{P})$ de $I_n(f_n(\cdot, y))$. Por lo tanto, la convergencia en $\mathbb{D}^{1,2}$ de la sucesión X_n se sigue de la convergencia en $L^2(\Omega, H, \mathbb{P})$ de $\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, y))$. El resultado se sigue entonces aplicando la proposición 6 a la variable $\lim_{N\to\infty} X_N$, y comparando las descomposiciones (1.65) y (1.66) . $\square$

1.3.3. Integral de Skorohod múltiple

Sea V un espacio de Hilbert separable. Como se mencionó en la definición 5, para todo $k \in \mathbb{N}$, y para toda variable aleatoria V-valuada $G \in L^2(\Omega, V)$, podemos definir el operador de derivada iterada iterada $D^k G$, de manera que

$$\begin{array}{ccc} Dom(D^k) \subset L^2(\Omega, V) & \xrightarrow{D^k} & L^2(\Omega, H^{\otimes k} \otimes V) \\ G & \longmapsto & D^k \end{array}$$

Este operador resulta de extender continuamente el mapeo que asigna a cada variable aleatoria G de la forma

$$G = \sum_{i=1}^{m} F_j v_j, \qquad F_j \in \mathbb{D}^{k,p}, v_{j \in V},$$

la variable aleatoria $H^{\otimes k} \otimes V$-valuada

$$D^k G = \sum_{i=1}^{m} D^k F_i \otimes v_i.$$

En este contexto, definimos la integral de Skorohod múltiple δ^k para variables aleatorias $H^{\otimes k} \otimes V$-valuadas, como el operador adjunto de $D^k : Dom(D^k) \subset L^2(\Omega, V) \longrightarrow L^2(\Omega, H^{\otimes k} \otimes V)$.

Observaciones:

1. Si F es una variable aleatoria de la forma $F = f(W(w_1), ..., W(w_m))$, con $w_j \in H$, y donde $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es infinitamente derivable. Entonces, la variable aleatoria $H \otimes V$-valuada definida por
$$G := Fh,$$
con $v \in V$, $h \in H$ y $F \in Dom(\delta)$, satisface
$$\delta(G) \;=\; \delta(Fh)v.$$

2. Si F es una variable aleatoria de la forma $F = f(W(w_1), ..., W(w_m))$, con $w_j \in H$, y donde $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es infinitamente derivable. Entonces, la variable aleatoria $H^{\otimes k} \otimes V$-valuada definida por
$$G := Fh_1 \otimes h_2 \otimes \otimes v,$$
con $v \in V$, $h_j \in H$ y $F \in Dom(\delta)$, satisface
$$\begin{aligned} \delta^k(G) &= \delta^k(Fh_1 \otimes \cdots \otimes h_k \otimes v) \\ &= \delta^{k-1}(\delta(Fh_1)h_2 \otimes \cdots \otimes h_k \otimes v) \\ &= \delta^{k-2}(\delta(\delta(Fh_1)h_2)h_3 \otimes \cdots \otimes h_k \otimes v) \\ &\;\;\vdots \\ &= \delta(h_k \delta(h_{k-1} \delta(h_{k-2} \delta(\cdots \delta(h_1 F)))))v \end{aligned}$$

3. Si G es una variable aleatoria $H^{\otimes k}$-valuada, perteneciente al dominio de δ^k, entonces $\delta^k G$ coincide con $\delta^k \widehat{G}$, donde $\widehat{G}$ denota a la simetrización de G[11]. Sin embargo, si G' es una variable aleatoria $H^{\otimes(k+r)}$-valuada, con $r \geq 1$, perteneciente al dominio de δ^k, entonces $\delta^k G'$ **no necesariamente coincide** con $\delta^k(\widehat{G'})$. Por ejemplo, si $h_1, h_2 \in H$, y $F = f(W(v))$, para cierto polinomio f, y $v \in H$, entonces

$$\begin{aligned}
\delta^2(h_1 \otimes h_2) &= \delta(\delta(h_1 F)h_2) \\
&= \delta(h_2 W(h_1) f(W(v)) - h_2 \langle v, h_1 \rangle_H f'(W(v))) \\
&= W(h_2)W(h_1) - \langle h_1, h_2 \rangle_H f(W(v)) + \langle v, h_1 \rangle_H \langle v, h_2 \rangle_H f''(W(v)) - \\
&\quad f'(W(v)) (W(h_1) \langle v, h_2 \rangle + W(h_2) \langle v, h_1 \rangle_H) \\
&= \delta(h_1 W(h_2) f(W(v)) - h_1 \langle v, h_2 \rangle_H f'(W(v))) \\
&= \delta^2(h_2 \otimes h_1).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\delta(Fh_1 \otimes h_2) &= \delta(h_1 F)h_2 \\
&= (W(h_1) f(W(v)) - f'(W(v)) \langle v, h_1 \rangle) h_2,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\delta(Fh_2 \otimes h_1) &= \delta(h_2 F)h_1 \\
&= (W(h_2) f(W(v)) - f'(W(v)) \langle v, h_2 \rangle) h_1,
\end{aligned}$$

por lo tanto $\delta(Fh_1 \otimes h_2) \neq \delta(\mathrm{symm}(Fh_1 \otimes h_2)) = \delta(F\frac{1}{2}(h_1 \otimes h_2 + h_2 \otimes h_1)$.

1.3.4. La integral de Itô como un caso particular de la integral de Skorohod

Lema 10. *Sea $A \in \mathcal{B}$, y sea F una variable aleatoria cuadrado integrable y medible respecto a la σ-álgebra $\mathcal{F}_{A^c}$. Entonces el proceso $F\mathbb{1}_A$ es Skorohod integrable y*

$$\delta(F\mathbb{1}_A) \;=\; FW(A)$$

Demostración. Suponga que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Entonces, por la proposición 10, y el corolario 3 se tiene que

$$\delta(F\mathbb{1}_A) = FW(A) - \int_{\mathbb{T}} D_t F \mathbb{1}_A \mu(\mathrm{dt}) = FW(A),$$

de donde se sigue el resultado. Si F simplemente es una variable aleatoria cuadrado integrable, podemos demostrar el resultado aproximando a F mediante una sucesión F_n de variables en $\mathbb{D}^{1,2}$, que convergen a F respecto a la norma de $\mathbb{D}^{1,2}$, y utilizando el hecho de que δ es un operador continuo respecto a la (Esto se deduce de la relación (1.82)) norma $\mathbb{D}^{1,2}$.

$\square$

[11] Esto se sigue del hecho de que, para toda variable aleatoria suave F, la variable $D^k F(\omega)$ pertenece a $H^{\widehat{\otimes} k}$

Usando el lema 10 podemos demostrar que la integral de Skorohod es una generalización de la integral de Itô. Sea $\{(W_t^1, ..., W_t^d)\}$ un movimiento browniano d-dimensional, $\mathbb{T} = \mathbb{R}^d$ y sea L_a^2 el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T} \times \Omega, \mu \otimes \mathbb{P})$ formado por los procesos adaptados al movimiento browniano.

Proposición 15. *Se cumple que $L_a^2 \subset Dom(\delta)$, y el operador δ, restringido a L_a^2 coincide con la integral de Itô, es decir*

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^{d} \int_0^1 u_t^i dW_t^i.$$

Demostración. Supongamos que u es una función elemental de la forma

$$u_t = \sum_{j=1}^{n} F_j \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t),$$

donde $F_j \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}, \mathbb{R}^d)$, y $0 \leq t_1 < \cdots < t_{n+1} \leq 1$ (donde $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_{[0,t]}$). Entonces, por el lema 10 se tiene que $u \in Dom\delta$ y

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^{f} \sum_{j=1}^{n} F_j^i (W_{t_{j+1}}^i - W_{t_j}^i). \tag{1.91}$$

Todo proceso $u \in L_a^2$ puede ser aproximado por una sucesión de procesos simples $\{u^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ respecto a la norma $L^2(\mathbb{T} \times \Omega, \mu \otimes \mathbb{P})$ (para mayores referencias ver [9]), más aún, las integrales de Itô de $u^{(n)}$ convergen en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ a la integral de Itô de u. Por otro lado, a partir de la ecuación (1.91) deducimos que $\delta(u^{(n)})$ coincide con la integral de Itô de $u^{(n)}$. Por lo tanto, como $u^{(n)}$ converge en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ a u y el operador δ es cerrado, se sigue que $u \in Dom(\delta)$, y que $\delta(u)$ coincide con el límite en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ de la sucesión $\delta(u^{(n)})$, el cual es precisamente la integral de Itô de u. $\square$

Capítulo 2

Teorema del límite central para integrales de Skorohod múltiples

Esta sección está dedicada a estudiar el teorema del límite central para integrales de Skorohod múltiples, resultado que utilizaremos posteriormente para estudiar las p-variaciones de Hermite del movimiento browniano fraccionario.

A grandes rasgos, el resultado principal de esta sección establece que si $\{F_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias de la forma $F_n = \delta^q(u_n)$, donde u_n son variables con valores en $H^{\otimes n}$, entonces, bajo ciertos supuestos de regularidad, la sucesión F_n converge en distribución a una mezcla de variables Gaussianas centradas. El estudio de la convergencia en ley para este tipo de variables está motivado principalmente por los siguientes resultados, los cuales han sido probados por Nualart, Peccati, Nourdin, Ortiz-Latorre y Reinert en 1001[20], 1001[21], 1001[26], 1001[23].

1. Si $\{F_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias pertenecientes al q-ésimo caos de Wiener tales que $\mathbb{E}[F_n] = 0$ y $\lim_n \mathbb{E}[F_n^2] = 1$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes

   i) F_n converge en ley a una distribución normal estándar.

   ii) $\lim_n \mathbb{E}[F_n^4] = 3$.

   iii) La sucesión de variables aleatorias $||DF_n||_H^2$ converge a q en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$.

2. Se tienen las siguientes cotas para la distancia en variación total de F_n con la distribución normal estándar

$$\begin{aligned} \sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}[F_n \leq z] - \mathbb{P}[N \leq z]| &\leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(1 - \frac{1}{q}||DF_n||_H^2\right)^2\right]} \\ &\leq \sqrt{\frac{q-1}{3q}}\sqrt{|\mathbb{E}[F_n^4] - 3|}. \end{aligned}$$

Algunas de las aplicaciones de estos resultados consisten en el estudio de p-variaciones de integrales estocásticas fraccionarias, funcionales cuadráticos de procesos gaussianos y auto intersecciones del movimiento browniano fraccionario entre otros. El teorema que probaremos en esta sección es similar a la equivalencia entre *i)* y *iii)* en el sentido de que establece condiciones para la convergencia en ley de variables aleatorias (las cuales esta vez no necesariamente pertenecen a un mismo caos) en términos del comportamiento de sus derivadas.

A continuación introduciremos el concepto de convergencia estable , el cual será fundamental en el estudio de la convergencia en ley para integrales de Skorohod.

2.0.5. Convergencia estable de variables aleatorias

Definición 8. *Sea $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ (en particular podemos considerar $\mathcal{G} = \mathcal{F}$). Considere una sucesión de variables aleatorias $\mathcal{F}_n$-medibles respecto a $\mathcal{G}$, con valores en un espacio métrico separable E, denotaremos por $\mathcal{E}$ a la σ-álgebra de Borel de E.*

Decimos que la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge $\mathcal{G}$-establemente (o establemente si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$) si existe una medida de probabilidad μ en $(\Omega \times E, \mathcal{G} \otimes \mathcal{E})$ tal que, para toda variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible y acotada Y, y para toda función continua y acotada $f : E \to \mathbb{R}$, se satisface

$$\lim_n \mathbb{E}[f(F_n)Y] = \int_{\Omega \times E} Y(\omega) f(x) \mu(d\omega, dx). \tag{2.1}$$

Note que la convergencia estable es más fuerte que la convergencia en distribución. De hecho, si la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface (2.1), entonces la distribución límite de F_n es $\mu(\Omega, \cdot)$. Más aún, si descomponemos a la medida μ de la siguiente manera

$$\mu(\mathrm{d}\omega, \mathrm{d}x) = \mathbb{P}[\mathrm{d}\omega] Q(\omega, \mathrm{d}x), \qquad \text{en } \mathcal{G} \otimes \mathcal{E}, \tag{2.2}$$

donde $Q(\omega, \mathrm{d}x)$ es un kernel de transición, entonces la convergencia $\mathcal{G}$-estable de F_n a la medida μ es equivalente a la condición

$$\lim_n \mathbb{E}[Y Q_n f] = \mathbb{E}[Y Q f]$$

para toda variable aleatoria Y medible respecto a $\mathcal{G}$, y para toda función continua y acotada $f : E \to \mathbb{R}$. De esta manera μ puede ser interpretada como la distribución condicional límite de F_n dado $\mathcal{G}$.

A continuación se muestran algunas condiciones equivalentes a la convergencia estable de variables aleatorias, la prueba de dichos resultados puede encontrarse en 1001[7]

1. F_n converge $\mathcal{G}$-establemente.

2. Para cada variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible en Ω, Y. El vector (Y, F_n) converge en ley.

3. Para cada variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible en Ω, Y. El vector (Y, F_n) converge $\mathcal{G}$-establemente.

4. La sucesión F_n es tensa, y para cada $A \in \mathcal{G}$ y $f : E \to$ continua y acotada, la sucesión $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A f(F_n)]$ converge.

5. Si $E = \mathbb{R}^n$, la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tensa, y para cada $A \in \mathcal{G}$, se tiene que la sucesión $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \exp\{iu \cdot F_n\}]$ converge.

2.0.6. Convergencia en ley de integrales de Skorohod múltiples

A continuación mostraremos que, bajo ciertas condiciones de regularidad, algunas las propiedades que satisface la derivada de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tales como la regla de Leibnitz y la fórmula de Faa di Bruno) pueden generalizarse para la derivada de Malliavin.

Considere un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, H un espacio de Hilbert separable, y $\{W(h)\}_{h\in H}$ un proceso gaussiano isonormal, tal que $\mathcal{F} = \sigma(W(h) \mid h \in H)$. Si f y g son funciones reales n-veces derivables, entonces la composición $f \circ g$ es n-veces derivable, y sus derivadas pueden calcularse según la fórmula de Faá di Bruno, la cual establece que

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f \circ g(t) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in A_n} \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(g(t)) \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} g(t)}{j!} \right)^{k_j}.$$

Donde el conjunto A_n está definido por

$$A_n := \{(k_1, ..., k_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n \mid k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n\}. \tag{2.3}$$

Una demostración de este resultado puede encontrarse en [28].

A continuación se demostrará una versión de la fórmula de Faá di Bruno y una versión del teorema del binomio para derivadas iteradas de Malliavin.

Lema 11. *Considere un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, H un espacio de Hilbert separable, y $\{W(h)\}_{h\in H}$ un proceso gaussiano isonormal tal que $\mathcal{F} = \sigma(W(h) \mid h \in H)$. Sean F y G dos variables aleatorias reales definidas en Ω, tales que $G \in \mathbb{D}^{n,p}$ y $F \in \mathbb{D}^{n,q}$, para ciertos números $p, q \geq 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, con $r \geq 1$. Entonces GF pertenece a $\mathbb{D}^{n,r}$, y se satisface lo siguiente*

$$D^n(FG) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k G \widehat{\otimes} D^{n-k} F. \tag{2.4}$$

Más aún, si $G \in \mathbb{D}^{q,q}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función n-veces derivable, con derivadas continuas y acotadas, entonces

$$D^n(f(G)) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in A_n} \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} f(G) \widehat{\bigotimes_{j=1}^{n}} \left(\frac{D^j G}{j!} \right)^{\widehat{\otimes} k_j}, \tag{2.5}$$

donde $\widehat{\otimes}$ denota al producto tensorial simetrizado, y A_n está dado por (2.3).

Demostración. A lo largo de la prueba utilizaremos el siguiente lema auxiliar (La demostración de dicho resultado puede consultarse en 1001[25], proposición 1.5.6):

Lema 12. *Sean $F \in \mathbb{D}^{k,p}$ y $G \in \mathbb{D}^{k,q}$, para ciertos números $k \in \mathbb{N}$, y $0 \leq p, q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ para cierto $r \geq 1$. Entonces $FG \in \mathbb{D}^{k,r}$, y*

$$||FG||_{k,r} \leq c_{p,k,q}||F||_p||G||_{k,q}.$$

Donde la norma $|| \cdot ||_{k,p}$ está definida como en (1.50).

Para probar la primera parte del lema 11 supongamos que F y G pertenecen a $\mathcal{S}$ (recordemos que $\mathcal{S}$ denota al conjunto de variables aleatorias de la forma $\phi(W(h_1), ..., W(h_n))$, para ciertos vectores $h_j \in H$ y cierta función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente derivable, cuyas derivadas tienen crecimiento polinomial). Podemos suponer sin pérdida de generalidad que F y G son de la forma

$$\begin{aligned} F &= f(W(h_1), ..., W(h_n)) \\ G &= g(W(h_1), ..., W(h_n)), \end{aligned} \tag{2.6}$$

para $n \in \mathbb{N}$, $h_j \in H$, y f, g funciones infinitamente derivables, cuyas derivadas tienen crecimiento polinomial. Recordemos que la n-ésima derivada iterada de Malliavin de una variable aleatoria real es una variable aleatoria simétrica en el espacio $H^{\otimes n}$. Por lo tanto, definiendo

$$\partial_{i_1,\ldots,i_a} := \frac{\partial^a}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_a}}$$

se tiene que, para cualesquiera enteros a, b tales que $1 \leq a, b \leq n$

$$\begin{aligned} &D(D^a F \widehat{\otimes} D^b G) \\ &= D\left(\sum_{i_1,\ldots,i_a=1}^{n} \partial_{i_1,\ldots,i_a} f(Y) h_{i_a} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} h_{i_1}\right) \widehat{\otimes} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_a=1}^{n} \partial_{j_1,\ldots,j_a} g(Y) h_{j_a} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} h_{j_1}\right) \\ &= D\left(\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_a=1 \\ j_1,\ldots,j_a=1}}^{n} \partial_{i_1,\ldots,i_a} f(Y) \cdot \partial_{j_1,\ldots,j_a} g(Y) h_{i_a} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} h_{i_1} \widehat{\otimes} h_{j_a} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} h_{j_1}\right) \\ &= \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_a=1 \\ j_1,\ldots,j_a=1}}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\partial_{i_1,\ldots,i_a} f(Y) \cdot \partial_{j_1,\ldots,j_a} g(Y)\right) h_l \widehat{\otimes} h_{i_a} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} h_{i_1} \widehat{\otimes} h_{j_a} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} h_{j_1}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

y por ende,

$$
\begin{aligned}
&D(D^aF\widehat{\otimes}D^bG)\\
&\quad=\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{a+1}=1\\ j_1,\ldots,j_a=1}}^{n}\partial_{i_1,\ldots,i_{a+1}}f(Y)\cdot\partial_{j_1,\ldots,j_a}g(Y)h_{i_{a+1}}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}h_{i_1}\widehat{\otimes}h_{j_a}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}h_{j_1}+\\
&\qquad\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_{a+1}=1\\ i_1,\ldots,i_a=1}}^{n}\partial_{i_1,\ldots,i_{a+1}}g(Y)\cdot\partial_{j_1,\ldots,j_a}f(Y)h_{j_{a+1}}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}h_{i_1}\widehat{\otimes}h_{j_a}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}h_{j_1}\\
&\quad=\sum_{i_1,\ldots,i_{a+1}=1}^{n}\partial_{i_1,\ldots,i_{a+1}}f(Y)h_{i_{a+1}}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}h_{i_1}\widehat{\otimes}\sum_{j_1,\ldots,j_a=1}^{n}\partial_{j_1,\ldots,j_a}g(Y)h_{j_a}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}h_{j_1}+\\
&\qquad\sum_{i_1,\ldots,i_a=1}^{n}\partial_{i_1,\ldots,i_a}f(Y)h_{i_a}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}h_{i_1}\widehat{\otimes}\sum_{j_1,\ldots,j_{a+1}=1}^{n}\partial_{j_1,\ldots,j_{a+1}}g(Y)h_{j_{a+1}}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}h_{j_1}\\
&\quad=D^{a+1}F\widehat{\otimes}D^bG+D^aF\widehat{\otimes}D^{b+1}G
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

donde en la penúltima igualdad se utilizó la relación

$$h_{j_{a+1}}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}h_{i_1}\widehat{\otimes}h_{j_a}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}h_{j_1}=h_{j_a}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}h_{i_1}\widehat{\otimes}h_{j_{a+1}}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}h_{j_1}.$$

Por lo tanto la regla de Leibnitz es válida para variables de la forma (2.6), es decir,

$$D^n(FG) \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^kG\widehat{\otimes}D^{n-k}F, \tag{2.9}$$

para $F,G\in\mathcal{S}$. De manera general, F y G son tales que $G\in\mathbb{D}^{n,p}$ y $F\in\mathbb{D}^{n,q}$, para ciertos números $p,q\geq 1$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, con $r\geq 1$. Entonces, por el Lema 12, se tiene que

$$||D^n(FG)||_{L^2(\Omega,H^{\otimes n},\mathbb{P})} \;\leq\; ||FG||_{n,r}\leq c_{n,p,q}||F||_{n,p}||G||_{n,q}, \tag{2.10}$$

donde la norma $||\cdot||_{k,p}$ está definida como en (1.50). Por otro lado

$$
\begin{aligned}
||D^kG\widehat{\otimes}D^{n-k}F||_{L^1(\Omega,H^{\otimes n})} &= \mathbb{E}\left[||D^kG\widehat{\otimes}D^{n-k}F||_{H^{\otimes n}}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[||D^kG||_{H^{\otimes k}}||D^{n-k}F||_{H^{\otimes(n-k)}}\right]\\
&\leq \mathbb{E}\left[||D^kG||^q_{H^{\otimes k}}\right]^{\frac{1}{q}}\mathbb{E}\left[||D^{n-k}F||^p_{H^{\otimes(n-k)}}\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq ||G||_{n,q}||F||_{n,p}.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Aproximando F y G mediante variables pertenecientes a $\mathcal{S}$, podemos aproximar los términos en el lado izquierdo y derecho de la igualdad (2.9) mediante las relaciones (2.10) y (2.11). Esto aunado al hecho de que la igualdad (2.9) es válida para variables en $\mathcal{S}$, implica que

$$D^n(FG)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^kG\widehat{\otimes}D^{n-k}F,$$

para cualesquiera variables F, G tales que $F \in \mathbb{D}^{n,p}$ y $G \in \mathbb{D}^{n,q}$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$.

Para probar la fórmula de Faá di Bruno procedemos de la siguiente manera. Considere $G \in \mathbb{D}^{q,q}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función n-veces derivable, con derivadas continuas y acotadas. Para $h \in H$ fijo, denotaremos por D_h^n al operador de derivada direccional D_h. De la igualdad

$$D_h^n(\cdot) = \left\langle D^n(\cdot), h^{\widehat{\otimes} n} \right\rangle_{H^{\widehat{\otimes} n}},$$

se sigue que F y G pertenecen al dominio de D_h^n para todo $n \leq q$. Utilizando esta observación, así como la regla de la cadena (Proposición 5), se puede verificar que las siguientes variables aleatorias están bien definidas

$$H := f(G), \qquad H_n := D_h^n H, \qquad G_n := D_h^n G, \qquad F_n := \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(G).$$

Por otro lado, las variables F_n están acotadas casi seguramente puesto que las derivadas de f son funciones acotadas. Supongamos por un momento que cualquier producto finito de la forma $G_{a_1} \cdots G_{a_n}$, con $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ es derivable. Bajo este supuesto, podemos calcular, con ayuda de la regla de Lebnitz, los primeros términos de la sucesión $\{H_n\}_{n \geq 1}$ de la siguiente forma

$$H_1 = D_h f(G) = \langle Df(G), h \rangle_H = \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(G) DG, h \right\rangle_H = F_1 G_1. \tag{2.12}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} H_2 &= D_h(F_1 G_1) = \langle G_1 DF_1, h \rangle_H + \langle F_1 DG_1, h \rangle_H = F_2 G_1^2 + F_1 G_2 \\ H_3 &= F_3 G_1^3 + 3F_2 G_1 G_2 + F_1 G_3 \\ H_4 &= F_1 G_4 + F_2(3G_2^2 + 4G_1 G_3) + F_3(6G_1^2 G_2) + F_4 G_1^4. \end{aligned}$$

Se puede intuir a partir de las ecuaciones anteriores que, en general, los términos H_n deben tener la forma

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} F_k L_{n,k}(G_1, ..., G_n), \tag{2.13}$$

donde $L_{n,l} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una combinación lineal de términos de la forma

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}, \tag{2.14}$$

con $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n \leq n$ (de hecho se cumple que $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n = n$, pero para nuestros propósitos es suficiente tener $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n \leq n$).

A continuación mostraremos por inducción, que efectivamente se satisface la fórmula (2.13)

i) Si $n = 1$, se tiene que la variable $f(G)$ es derivable gracias a la regla de la cadena. El resultado se sigue de (2.12).

ii) Supongamos que para cierta $n \leq q$, la variable H_{n-1} satisface la relación (2.13), es decir,

$$H_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} C_{k,n-1} F_k \prod_{j=1}^{n-1} G_j^{\alpha_{j,n-1,k}},$$

para ciertas constantes $C_{k,n-1} \in \mathbb{R}$ y $\alpha_{j,n-1,k} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que

$$\alpha_{1,n-1,k} + 2\alpha_{1,n-1,k} + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1,n-1,k} \leq n-1.$$

Primeramente mostraremos que las variables aleatorias de la forma

$$F_k \prod_{j=1}^{n-1} G_j^{\alpha_{j,n-1,k}}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

pertenecen a $\mathbb{D}^{1,1}$, y satisfacen

$$D\left(F_k \prod_{j=1}^{n-1} G_j^{\alpha_{j,n-1,k}}\right) = F_k D\left(\prod_{j=1}^{n-1} G_j^{\alpha_{j,n-1,k}}\right) + D\left(F_k\right) \prod_{j=1}^{n-1} G_j^{\alpha_{j,n-1,k}}. \qquad (2.15)$$

Aplicando $\alpha_{j,n-1,k}$ -veces el lema 12 a la variable G_j (la cual pertenece a $\mathbb{D}^{1,q}$), se puede deducir que $G_j^{\alpha_{j,n-1,k}} \in \mathbb{D}^{1,q\alpha_{j,n-1,k}^{-1}}$. Por un razonamiento análogo, de lo anterior se sigue que $\prod_{j=1}^{n-1} G_j^{\alpha_{j,n-1,k}}$ pertenece a $\mathbb{D}^{1,q(\sum_{j\leq n-1}\alpha_{j,n-1,k})^{-1}}$. A partir de esto, podemos deducir la ecuación (2.15) gracias al lema 12 y a la regla de Leibnitz (ecuación 2.4).

A continuación mostraremos que H_n es de la forma (2.13). Sea

$$B_{k,n} := \{1 \leq j \leq n \mid \alpha_{j,n,k} \neq 0\}.$$

Utilizando la regla de la cadena[1] y la ecuación (2.15), se verifica lo siguiente

$$
\begin{aligned}
&D_h(H_{n-1})\\
&= D_h\left(\sum_{k=1}^{n-1} F_k L_{k,n}(G_1,...,G_{n-1})\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} C_{k,n-1} D_h\left(F_k \prod_{j=1}^{n-1} G_j^{\alpha_{j,n-1,k}}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} C_{k,n-1}(D_hF_k)\prod_{j=1}^{n-1} G_j^{\alpha_{j,n-1,k}} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{k,n-1}F_k D_h\left(\prod_{j=1}^{n-1} G_j^{\alpha_{j,n-1,k}}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} C_{k,n-1}F_{k+1}G_1\prod_{j=1}^{n-1} G_j^{\alpha_{j,n-1,k}} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{k,n-1}F_k \sum_{l\in B_{k,n-1}}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n-1} G_j^{\alpha_{j,n-1,k}}\right) D_hG_l\\
&= \sum_{k=2}^{n} C_{k-1,n-1}F_kG_1\prod_{j=1}^{n-1} G_j^{\alpha_{j,n-1,k-1}} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l\in B_{k,n-1}} C_{k,n-1}F_kG_{l+1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n-1} G_j^{\alpha_{j,n-1,k}}.\\
&= \sum_{k=2}^{n} C_{k-1,n-1}F_kG_1\prod_{j=1}^{n-1} G_j^{\alpha_{j,n-1,k-1}} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l\in B_{k,n-1}} C_{k,n-1}F_kG_{l+1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n-1} G_j^{\alpha_{j,n-1,k}}.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

De la ecuación anterior se sigue que H_n es de la forma (2.13), lo cual termina el argumento de inducción.

Note que la ecuación (2.13) es válida independientemente de la elección de f. Por lo tanto, podemos tomar $f(t) = \exp\{at\}$, para $a < 0$. De esta manera, se tiene que

$$
\begin{aligned}
F_k &= a^k \exp\{aG\} \\
H_n &= D^n(\exp\{aG\}).
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Por lo tanto, sustituyendo las ecuaciones (2.17) en (2.13) y multiplicando por $\exp\{-aG\}$, se tiene que

$$
\exp\{-aG\}D^n\exp\{aG\} = \sum_{k=1}^{n} a^k L_{n,k}(G_1,...,G_n). \tag{2.18}
$$

Si definimos $B_n = \exp\{-aG\}D^n\exp\{aG\}$, entonces, gracias a la fórmula (2.4), para $n \geq 1$

[1] Utilizar la regla de la cadena para calcular $D_h(g(G_1,...,G_{n-1}))$, con $g(x_1,...,x_{n-1}) = x_1^{\alpha_{1,n-1,k}}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1,n-1,k}}$

arbitrario

$$\begin{aligned} B_n &= \exp\{-aG\}D^{n-1}(aG_1\exp\{aG\}) \\ &= a\exp\{-aG\}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}G_{k+1}D^{n-k-1}\exp\{aG\} \\ &= a\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}G_{k+1}B_{n-k-1}. \end{aligned}$$

Note que la ecuación anterior obtenemos, para cada $\omega \in \Omega$ fijo, una relación en recurrencia para las sucesiones $\{B_n(\omega)\}_n$ y $\{G_n(\omega)\}_n$. Es decir, $\{B_n(\omega)\}_n$ y $\{G_k(\omega)\}_k$ son dos sucesiones que satisfacen

$$B_n(\omega) = a\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}G_{k+1}(\omega)B_{n-k-1}(\omega).$$

La solución de dicha ecuación en recurrencia es conocida (para mayores referencias ver [28]), y está dada por

$$B_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n} n!a^k \sum_{(k_1,\cdots,k_n)\in A_n} \frac{k}{k_1!\cdots k_n!}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{G_j(\omega)}{j!}\right)^{k_j}.$$

Utilizando la igualdad anterior, así como la expresión (2.18), se tiene que, para todo $a < 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a^k L_{n,k}(G_1,...,G_n) &= \exp\{-aG\}D^n\exp\{aG\} = B_n(\omega) \\ &= \sum_{k=0}^{n} n!a^k \sum_{(k_1,\cdots,k_n)\in A_n} \frac{k}{k_1!\cdots k_n!}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{G_j}{j!}\right)^{k_j}. \end{aligned}$$

De donde deducimos que

$$L_{n,k}(G_1,...,G_n) = n!\sum_{(k_1,\cdots,k_n)\in A_n} \frac{k}{k_1!\cdots k_n!}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{G_j}{j!}\right)^{k_j}.$$

De esta manera, a partir de (2.13), se obtiene la igualdad

$$D_h^n(f(G)) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in A_n} \frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}f(G)\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{D_h^jG}{j!}\right)^{k_j}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left\langle D^n(f(G)), h^{\otimes n}\right\rangle_{H^{\otimes n}} &= D_h^n(f(G)) \\
&= \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in A_n} \frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(G)\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{D_h^j G}{j!}\right)^{k_j} \\
&= \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in A_n} \frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(G)\left\langle \bigotimes_{j=1}^{n}\left(\frac{D^j G}{j!}\right)^{\otimes k_j}, h^{\otimes n}\right\rangle_{H^{\otimes n}} \\
&= \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in A_n} \frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(G)\left\langle \widehat{\bigotimes}_{j=1}^{n}\left(\frac{D^j G}{j!}\right)^{\widehat{\otimes} k_j}, h^{\otimes n}\right\rangle_{H^{\otimes n}},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

donde la última igualdad se debe al hecho de que el vector $h^{\otimes n}$ es simétrico. Finalmente, para $v \in H^{\otimes n}$ arbitrario, se tiene que el vector $\widehat{v}$ es un vector simétrico, y por ende, tiene la forma $\widehat{v} = h^{\otimes n}$ para cierto $h \in H$. Por lo tanto, de (2.19) se sigue que

$$\begin{aligned}
\left\langle D^n(f(G)), v\right\rangle_{H^{\otimes n}} &= \left\langle D^n(f(G)), \widehat{v}\right\rangle_{H^{\otimes n}} \\
&= \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in A_n} \frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(G)\left\langle \widehat{\bigotimes}_{j=1}^{n}\left(\frac{D^j G}{j!}\right)^{\widehat{\otimes} k_j}, \widehat{v}\right\rangle_{H^{\otimes n}}. \\
&= \left\langle \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in A_n} \frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(G)\widehat{\bigotimes}_{j=1}^{n}\left(\frac{D^j G}{j!}\right)^{\widehat{\otimes} k_j}, v\right\rangle_{H^{\otimes n}}.
\end{aligned}$$

De aquí se sigue el resultado. $\square$

A continuación se presenta el teorema principal de esta sección

Teorema 4 (Teorema del Límite Central para Integrales de Skorohod Múltiples). *Sea $q \in \mathbb{N}$, y suponga que F_n es una sucesión de variables aleatorias de la forma $F_n = \delta^q(u_n)$, para ciertas variables simétricas u_n pertenecientes a $\mathbb{D}^{2q,2q}(H^{\otimes q})$. Suponga adicionalmente que la sucesión F_n es acotada en $L^1(\Omega)$ y que*

1. *$\left\langle u_n, (DF_n)^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes (D^{q-1}F_n)^{\otimes k_{q-1}} \otimes h\right\rangle_{H^{\otimes q}}$ converge en $L^1(\Omega)$ a cero para cualesquiera enteros $r, k_1, ..., k_{q-1} \geq 0$ tales que*

$$k_1 + 2k_2 + \cdots + (q-1)k_{q-1} + r = q,$$

   y para todo $h \in H^{\otimes r}$.

2. *$\langle u_n, D^q F_n\rangle_{H^{\otimes q}}$ converge en L^1 a una variable aleatoria no negativa S^2.*

Entonces, F_n converge establemente a una variable aleatoria con ley condicional Gaussiana $N(0, S^2)$, dado X.

Demostración. De acuerdo a las equivalencias de la definición de convergencia estable enunciadas al final de la sección 2.0.5, para probar que F_n converge establemente basta verificar que para $h_1, ..., h_n \in H$ arbitrarios la sucesión

$$(F_n, W(h_1), ..., W(h_n))$$

converge en distribución, o equivalentemente, que

$$\psi_n := (F_n, S^2, W(h_1), ..., W(h_n))$$

converge en distribución.

Ya que F_n, y S^2 son acotadas en $L^1(\Omega)$, la sucesión ψ_n es tensa y por ende, basta mostrar que el límite en distribución de toda subsucesión que converge débilmente es único. Sea ψ_{n_k} una subsucesión de ψ_n que converge en distribución a cierto vector aleatorio $(F_\infty, Z, X_1, ..., X_m)$.

Considere las variables aleatorias

$$\begin{aligned} Y_0 &:= \phi(W(h_1), ..., W(h_m)) \\ Y &:= \phi(X_1, ..., X_m). \end{aligned}$$

Con $\phi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^m)$ (es decir, ϕ es una función infinitamente derivable, con derivadas parciales acotadas). Sea

$$\varphi_{n_k}(\lambda) := \mathbb{E}[\exp\{i\lambda F_{n_k}\}Y],$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario. La convergencia en ley de ψ_{n_k}, aunada al hecho de que F_{n_k} es una sucesión acotada en L^1, implican que

$$\begin{aligned} \lim_k \varphi'_{n_k}(\lambda) &= \lim_k i\mathbb{E}[F_{n_k} \exp\{i\lambda F_{n_k}\}Y_0] \\ &= \lim_k i\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{|F_{n_k}| \le c\}} F_{n_k} \exp\{i\lambda F_{n_k}\}Y_0] + \lim_k i\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{|F_{n_k}| > c\}} F_{n_k} \exp\{i\lambda F_{n_k}\}Y_0] \\ &= i\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{|F_\infty| \le c\}} F_\infty \exp\{i\lambda F_\infty\}Y] + \lim_k i\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{|F_{n_k}| > c\}} F_{n_k} \exp\{i\lambda F_{n_k}\}Y_0]. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Ya que la variable Y_0 es acotada (puesto que la función ϕ es acotada), y la sucesión $\{F_{n_k}\}_k$ es u.i. (pues $\{F_{n_k}\}_k$ converge en $L^1(\Omega)$), existe una constante $K \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\begin{aligned} |\lim_{n_k} i\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{|F_{n_k}| > c\}} F_{n_k} \exp\{i\lambda F_{n_k}\}Y_0]| &\le \lim_k K\mathbb{E}[|\mathbb{1}_{\{|F_{n_k}| > c\}} F_{n_k}|] \\ &\le \sup_k K\mathbb{E}[|\mathbb{1}_{\{|F_{n_k}| > c\}} F_{n_k}|] < \infty. \quad (2.21) \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad (2.21) y el teorema de convergencia dominada[2], podemos calcular el límite cuando $c \to \infty$ de la expresión (2.20), obteniendo lo siguiente

$$\lim_k \varphi'_{n_k}(\lambda) = i\mathbb{E}[F_\infty \exp\{i\lambda F_\infty\}Y]. \quad (2.22)$$

[2]aplicado a la sucesión $\mathbb{1}_{\{|F_\infty| \le c\}} F_\infty \exp\{i\lambda F_\infty\}Y$,

Por otro lado, de la regla de Leibnitz, y la fórmula de Faá di Bruno (lema 11), se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi'_{n_k}(\lambda) &= i\mathbb{E}[F_{n_k}\exp\{i\lambda F_{n_k}\}Y_0] = i\mathbb{E}[\delta^q(u_{n_k})e^{i\lambda F_{n_k}}Y_0] \\
&= i\mathbb{E}[\langle u_{n_k}, D^q\left(e^{i\lambda F_{n_k}}Y_0\right)\rangle_{H^{\otimes q}}] \\
&= i\sum_{a=0}^{q}\binom{q}{a}\mathbb{E}[\langle u_{n_k}, D^a\left(e^{i\lambda F_{n_k}}\right)\widehat{\otimes}D^{q-a}Y_0\rangle_{H^{\otimes q}}] \\
&= i\sum_{a=0}^{q}\binom{q}{a}\sum_{(k_1,\dots,k_a)\in A_a}\frac{a!}{k_1!\cdots k_a!}(i\lambda)^{k_1+\cdots k_a}\times \\
&\mathbb{E}\left[e^{i\lambda F_{n_k}}\left\langle u_{n_k}, \frac{1}{1!}(DF_{n_k})^{\otimes k_1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\frac{1}{a!}(D^aF_{n_k})^{\otimes k_a}\widehat{\otimes}D^{q-a}Y_0\right\rangle_{H^{\otimes q}}\right] \\
&= i\sum_{a=0}^{q}\binom{q}{a}\sum_{(k_1,\dots,k_a)\in A_a}\frac{a!}{k_1!\cdots k_a!}(i\lambda)^{k_1+\cdots k_a}\times \\
&\mathbb{E}\left[e^{i\lambda F_{n_k}}\left\langle u_{n_k}, \frac{1}{1!}(DF_{n_k})^{\otimes k_1}\otimes\cdots\otimes\frac{1}{a!}(D^aF_{n_k})^{\otimes k_a}\otimes D^{q-a}Y_0\right\rangle_{H^{\otimes q}}\right], \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

la última igualdad es consecuencia del hecho de que las variables u_k son simétricas. Por lo tanto, se tiene que

$$\varphi'_{n_k}(\lambda) \;=\; -\lambda\mathbb{E}[e^{i\lambda F_{n_k}}\left\langle u_{n_k}, D^qF_{n_k}\right\rangle_{H^{\otimes q}}Y_0] + R_{n_k}, \qquad (2.24)$$

donde

$$\begin{aligned}
R_{n_k} \;:=\; & i\sum_{a=0}^{q-1}\binom{q}{a}\sum_{(k_1,\dots,k_a)\in A_a}\frac{a!}{k_1!\cdots k_a!}(i\lambda)^{k_1+\cdots+k_a}\times \\
&\mathbb{E}\left[e^{i\lambda F_{n_k}}\left\langle u_{n_k}, \frac{1}{1!}(DF_{n_k})^{\otimes k_1}\otimes\cdots\otimes\frac{1}{a!}(D^aF_{n_k})^{\otimes k_a}\otimes D^{q-a}Y_0\right\rangle_{H^{\otimes q}}\right] + \\
& i\sum_{\substack{(k_1,\dots,k_q)\in A_q\\(k_1,\dots,k_q)\neq(0,\dots,0,1)}}\frac{a!}{k_1!\cdots k_a!}(i\lambda)^{k_1+\cdots+k_q}\times \\
&\mathbb{E}\left[e^{i\lambda F_{n_k}}\left\langle u_{n_k}, \frac{1}{1!}(DF_{n_k})^{\otimes k_1}\otimes\cdots\otimes\frac{1}{a!}(D^qF_{n_k})^{\otimes k_a}\otimes Y_0\right\rangle_{H^{\otimes q}}\right. . \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Gracias a las hipótesis del teorema, los términos

$$u_{n_k,a} \;:=\; \left\langle u_{n_k}, \frac{1}{1!}(DF_{n_k})^{\otimes k_1}\otimes\cdots\otimes\frac{1}{a!}(D^aF_{n_k})^{\otimes k_a}\otimes D^{q-a}Y_0\right\rangle_{H^{\otimes q}} \qquad 0\le a\le q,$$

que aparecen en la igualdad (2.25), convergen a cero en $L^1(\Omega)$. Para verificar dicha afirmación basta expresar a u_{n_k} en la forma

$$\begin{aligned} u_{n_k,a} &= \left\langle u_{n_k}, \frac{1}{1!}(DF_{n_k})^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes \frac{1}{a!}(D^aF_{n_k})^{\otimes k_a} \otimes D^{q-a}Y_0 \right\rangle_{H^{\otimes q}} \\ &= \sum_{j_1,\dots,j_{q-a}=1}^{m} \frac{1}{1!\cdots a!}\partial_{j_1,\dots,j_{q-a}}\phi(W(h_{j_1}),...,W(h_{j_{q-a}}))\times \\ &\left\langle u_{n_k}, (DF_{n_k})^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes (D^aF_{n_k})^{\otimes k_a} \otimes h_{j_1} \otimes \cdots \otimes h_{j_{q-a}} \right\rangle_{H^{\otimes q}}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Como los términos

$$\frac{1}{1!\cdots a!}\partial_{j_1,\dots,j_{q-a}}\phi(W(h_{j_1}),...,W(h_{j_{q-a}}))$$

en la ecuación (2.26) están acotados c.s. (ya que ϕ tiene derivadas acotadas), mientras que los términos

$$\left\langle u_{n_k}, (DF_{n_k})^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes (D^aF_{n_k})^{\otimes k_a} \otimes h_{j_1} \otimes \cdots \otimes h_{j_{q-a}} \right\rangle_{H^{\otimes q}}$$

convergen a cero en $L^1(\Omega)$ (gracias a las hipótesis del teorema), podemos concluir que las variables R_{n_k} convergen a cero en $L^1(\Omega)$. Por lo tanto, tomando límite cuando $n \to \infty$ en la ecuación (2.24), concluimos que

$$\begin{aligned} i\mathbb{E}[F_\infty e^{i\lambda F_\infty}Y] &= \lim_k \varphi'_{n_k}(\lambda) \\ &= -\lambda \lim_k \mathbb{E}[e^{i\lambda F_{n_k}} \langle u_{n_k}, D^qF_{n_k}\rangle_{H^{\otimes q}} Y_0] \\ &= -\lambda \lim_k \mathbb{E}[e^{i\lambda F_{n_k}} S^2 Y_0] + -\lambda \lim_k \mathbb{E}[e^{i\lambda F_{n_k}}(S^2 - \langle u_{n_k}, D^qF_{n_k}\rangle_{H^{\otimes q}})Y_0] \\ &= -\lambda \lim_k \mathbb{E}[e^{i\lambda F_{n_k}} S^2 Y_0] \\ &= -\lambda \mathbb{E}[e^{i\lambda F_\infty} ZY], \end{aligned} \tag{2.27}$$

donde la cuarta igualdad se sigue del hecho de que Y_0 y $e^{i\lambda F_{n_k}}$ son variables aleatorias acotadas c.s. y $\langle u_{n_k}, D^qF_{n_k}\rangle_{H^{\otimes q}}$ converge en distribución a S^2, mientras que la última igualdad se deduce utilizando un argumento de truncamiento.

Finalmente, utilizando el lema de clases monótonas, es posible mostrar que la igualdad (2.27) es válida para toda variable aleatoria Y que sea acotada y medible respecto a $(X_1, ..., X_m, S^2)$. Por otro lado, utilizando el teorema de convergencia dominada es posible demostrar, a partir de (2.27), que se satisface la siguiente ecuación diferencial para la esperanza condicional de F_∞ dado $X_1, ..., X_m, S^2$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbb{E}[e^{i\lambda F_\infty} \mid X_1, ..., X_m, S^2] = -\lambda S^2 \mathbb{E}[e^{i\lambda F_\infty} \mid X_1, ..., X_m, S^2].$$

Resolviendo dicha ecuación diferencial obtenemos

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda F_\infty} \mid X_1, ..., X_m, S^2] = \exp\left\{-\frac{\lambda^2 S^2}{2}\right\} \tag{2.28}$$

y por ende, para $\lambda, \mu_0, ..., \mu_m \in \mathbb{R}$ arbitrarios, se tiene que

$$\mathbb{E}[e^{i\langle (F_\infty, Z, X_1,...,X_m),(\lambda,\mu_0,...,\mu_m)\rangle_{\mathbb{R}^{m+2}}}] = \mathbb{E}[e^{-\frac{\lambda^2 Z}{2}} e^{i\langle (Z,X_1,...,X_m),(\mu_0,...,\mu_m)\rangle_{\mathbb{R}^{m+1}}}].$$

Tomando $\lambda = 0$ en la igualdad anterior deducimos que

$$(Z, X_1, ..., X_m) \stackrel{d}{=} (S^2, W(h_1), ..., W(h_m)),$$

y por ende,

$$\mathbb{E}[e^{i\langle (F_\infty, Z, X_1,...,X_m),(\lambda,\mu_0,...,\mu_m)\rangle_{\mathbb{R}^{m+2}}}] = \mathbb{E}[e^{-\frac{\lambda^2 S^2}{2}} e^{i\left\langle (S^2,W(h_1),...,W(h_m)),(\mu_0,...,\mu_m)\right\rangle_{\mathbb{R}^{m+1}}}].$$

Esto implica que todas las subsucesiones de ψ_n que convergen en distribución tienen la misma ley asintótica. De aquí se concluye que ψ_n, y consecuentemente

$$(F_n, W(h_1), ..., W(h_m)),$$

converge en distribución, y por ende, F_n converge establemente. La ley del límite estable es condicionalmente normal de media cero y varianza S^2 como consecuencia de la ecuación (2.28).

$\square$

El siguiente corolario muestra condiciones más restrictivas pero más sencillas de verificar, bajo las cuales el teorema 4 es válido

Corolario 4. *Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables en $\mathbb{D}^{2p,2q}(H^{\otimes q})$ simétricas, y sean $F_n := \delta^q(u_n)$. Suponga que la sucesión $\{F_n\}_{n\geq 1}$ es acotada en $\mathbb{D}^{q,p}$ para todo $p \geq 2$, y que se cumplen las siguientes condiciones*

1. *$\langle u_n, h\rangle_{H^{\otimes q}}$ converge a cero en $L^1(\Omega)$ para todo $h \in H^{\otimes q}$, y $u_n \otimes_l D^l F_n$ converge a cero en $L^2(\Omega, H^{\otimes(q-l)}, \mathbb{P})$ para todo $l = 1, ..., q-1$.*

2. *$\langle u_n, D^q F_n\rangle_{H^{\otimes q}}$ converge en $L^1(\Omega)$ a una variable aleatoria positiva S^2.*

Entonces, F_n converge establemente a una variable aleatoria con ley condicional $N(0, S^2)$ dado $\{W(h)\}_{h\in H}$.

Demostración. Es suficiente ver que la condición (a) del corolario 4 implica la condición (a) del teorema 4. En la condición (a) del teorema 4, si $k_a \neq 0$ para cierto $1 \leq a \leq q-1$, entonces para todo $h \in H^{\otimes r}$ con $r = q - k_1 - \cdots - ak_a$, se satisface

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle u_n, (DF_n)^{\otimes k_1} \cdots (D^a F_n)^{\otimes k_a} \otimes h\right\rangle_{H^{\otimes q}}\right| \\
&\qquad = \left|\left\langle u_n, (DF_n)^{\otimes k_1} \cdots (D^a F_n)^{\otimes (k_a - 1)} \otimes h \otimes D^a F_n\right\rangle_{H^{\otimes q}}\right| \\
&\qquad = \left|\left\langle u_n \otimes_a D^a F_n, (DF_n)^{\otimes k_1} \cdots (D^a F_n)^{\otimes k_a - 1} \otimes h\right\rangle_{H^{\otimes (q-a)}}\right| \\
&\qquad \leq ||u_n \otimes_a D^a F_n||_{H^{(q-a)}} ||(DF_n)^{\otimes k_1} \cdots (D^a F_n)^{\otimes k_a} \otimes h||_{H^{\otimes(q-a)}}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Note que el segundo factor en la última igualdad está acotada en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ debido al hecho de que F_n es acotada en $\mathbb{D}^{q,p}$ para todo $p \geq 2$. Por otro lado, por hipótesis, el primer término converge en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ para todo $a = 0, ..., q-1$, de donde se sigue el resultado.

$\square$

2.0.7. Integrales estocásticas múltiples

Durante esta sección supondremos que H es de la forma $H = L^2(\mathbb{T}, \mathcal{G}, \mu)$, donde $(\mathbb{T}, \mathcal{G}, \mu)$ es un espacio de medida, y μ es una medida no atómica. Sea $m \geq 2$, y consideremos una sucesión de integrales múltiples $\{F_n = I_m(g_n)\}_{n\geq 1}$, con $g_n \in H^{\widehat{\otimes} m}$. En este caso, gracias a las proposiciones 6 y 12, podemos escribir a las variables F_n como integrales de Skorohod de la siguiente manera

$$F_n = \frac{1}{m}\delta(DF_n).$$

Este hecho nos permitirá, bajo ciertas condiciones adicionales, aplicar el teorema 4 a la sucesión F_n.

Proposición 16. *Sea $m \geq 2$ un entero fijo. Sea $\{F_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias de la forma $F_n = I_m(g_n)$, con $g_n \in H^{\widehat{\otimes} m}$. Suponga adicionalmente que $\{F_n\}_{n\geq 1}$ está acotada en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$, y que $F_n = \delta(u_n)$, donde $u_n = I_{m-1}(\widehat{g}_n)$ para cierta función $\widehat{g}_n \in H^{\otimes m}$ simétrica sobre las primeras $m-1$ variables. Si se cumplen las siguientes condiciones*

1. *$\langle \widehat{g}_n \otimes_{m-1} \widehat{g}_n, h^{\otimes 2}\rangle_{H^{\otimes 2}}$ converge a cero para toda $h \in H$*
2. *$\langle u_n, DF_n\rangle_H$ converge en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ a una variable aleatoria no negativa S^2.*

Entonces, F_n converge establemente a una variable aleatoria con ley condicional normal $N(0, S^2)$ dado $\{W(h)\}_{h\in H}$.

Demostración. Es suficiente aplicar el teorema 4 a u_n, con $q = 1$. En este caso, la condición (a) del teorema 4 se reduce a pedir que $\langle u_n, h\rangle_H$ converja a cero en $L^1(\Omega)$ para todo $h \in H$. Para ver esto note que, gracias a la igualdad

$$\mathbb{E}[I_m(f)I_q(g)] = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq q \\ n!\langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle_{L^2(T^m,\mu^m)} & \text{si } n = q \end{cases},$$

se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\langle u_n, h\rangle_H] &= \mathbb{E}[\langle I_{m-1}(\widehat{g_n}), h\rangle_H^2] = \mathbb{E}[I_{m-1}(\widehat{g}_n \otimes_1 h)^2] \\ &= (m-1)!||\widehat{g}_n \otimes_1 h||_{H^{\otimes(m-1)}} \\ &= (m-1)!\left\langle \widehat{g}_n \otimes_{m-1} \widehat{g}_n, h^{\otimes 2}\right\rangle_H \to 0, \end{aligned}$$

de donde se sigue la condición (a). La segunda condición del teorema 4 se sigue de la condición (b).

□

Observación Note que, en el contexto de la notación utilizada en la proposición anterior, si F_n es de la forma

$$F_n = I_m(g_n),$$

entonces siempre podemos tomar $\widehat{g} := g$, en cuyo caso es posible elegir $u_n = I_m(\widehat{g}_n)$, donde $\widehat{g}_n$ es una función simétrica sobre todas sus variables (y no solo sobre las primeras $m-1$).

Sin embargo, la variable u_n en la representación $F_n = \delta(u_n)$ no es única, de hecho, y como se muestra en el siguiente ejemplo, distintas elecciones de u_n pueden satisfacer o no las condiciones de la proposición 16.

Ejemplo Suponga que $\{W_t\}_{t\in[0,1]}$ es un movimiento browniano estándar. Suponga que $m = 2$ y que $g_n(s,t) = \frac{1}{2}\sqrt{n}(s \vee t)^n$. Entonces

$$F_n = I_2(g_n) = \sqrt{n}\int_0^1 t^n W(\mathrm{d}t),$$

y

$$D_s F_n \sqrt{n} s^n W_s + \sqrt{n}\int_s^1 t^n W_t W(\mathrm{d}t).$$

Podemos tomar $u_n = \sqrt{n} t^n W_t$, es decir, $\widehat{g}_n(s,t) = \sqrt{n} t^n \mathbb{1}_{[0,t]}(s)$. En este caso se tiene que

$$\widehat{g}_n \otimes_1 \widehat{g}_n(s,t) = n s^n t (s \wedge t),$$

dicha cantidad converge a cero en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$, mientras que

$$\langle u_n, DF_n\rangle_H = \int_0^1 n t^{2n} W_t^2 \mathrm{d}t + n\int_0^1 t^n W_t (\int_0^t s^n W_s \mathrm{d}W_s)\mathrm{d}t.$$

El primer término en la igualdad anterior converge en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ a $\frac{1}{2}W_1^2$ mientras que el segundo converge en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ a cero como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 n t^{2n} W_t^2 \mathrm{d}t - \frac{1}{2}W_1^2 &= \int_0^1 n t^{2n}(W_t^2 - W_1^2)\mathrm{d}t + W_1^2\left(\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \int_0^\infty n e^{-u(2n+1)}(W_1^2 - W_{e^{-u}}^2)\mathrm{d}u - W_1^2 \frac{1}{4n+2} \\
&= \frac{n}{2n+1}\int_0^\infty e^{-v}(W_1^2 - W^2_{\exp\{-\frac{v}{2n+1}\}})\mathrm{d}v - W_1^2\frac{1}{4n+2}
\end{aligned}$$

Utilizando el teorema de convergencia dominada sobre el primer término [3] deducimos, a partir de la igualdad anterior, que $\int_0^1 n t^{2n} W_t^2 \mathrm{d}t - \frac{1}{2}W_1^2$ converge c.s. a cero. Adicionalmente se tiene que dicho término está acotado por $\sup_{s\le 1} W_s^2 \int_0^\infty e^{-v}\mathrm{d}v \in L^3(\Omega)$, de donde se puede concluir que la convergencia se cumple también en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$. Utilizando un razonamiento análogo, se puede deducir que el segundo término de la igualdad también converge a cero en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$, y por ende, $\int_0^1 n t^{2n} W_t^2 \mathrm{d}t$ converge en $L^2(\omega,\mathbb{P})$ a $\frac{1}{2}W_1^2$.

Para concluir que $\langle u_n, DF_n\rangle_H$ converge en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ a $\frac{1}{2}W_1^2$ resta ver que

$$n\int_0^1 t^n W_t (\int_0^t s^n W_s \mathrm{d}W_s)\mathrm{d}t$$

[3] la función $\frac{n}{2n+1}e^{-v}(W_1^2(\omega) - W^2_{\exp\{-\frac{v}{2n+1}\}}(\omega))$ está dominada por $e^{-v}\sup_{s\le 1} W_s^2(\omega)$

converge a cero en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$. Para ello, note que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(n\int_0^1\int_0^t t^n W_t s^n W_s \mathrm{d}W_s \mathrm{d}t\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(W_s\int_0^1\int_s^1 nt^n W_t s^n \mathrm{d}t\mathrm{d}W_s\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(W_s\int_0^1\int_s^1 nt^n W_t s^n \mathrm{d}t\mathrm{d}W_s\right)^2\right] \\
&\leq \int_0^1 \mathbb{E}\left[\left(W_s\int_s^1 nt^n W_t s^n \mathrm{d}t\right)^2\right]\mathrm{d}s \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sup_{u\leq 1} W_u^4\right]\int_0^1 n^2 s^n\left(\frac{1-s^{n+1}}{n+1}\right)^2\mathrm{d}s \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sup_{u\leq 1} W_u^4\right]\frac{n^2 s^n}{(n+1)^2(n+1)} \xrightarrow{n} 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, las variables $\langle u_n, DF_n\rangle_H$ convergen en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ a $\frac{1}{2}W_1^2$, y por ende, podemos aplicar la proposición 16 con $S^2=\frac{1}{2}W_1^2$ para deducir que F_n converge en distribución a $\frac{1}{\sqrt{w}}W_1 N(0,1)$. Donde $N(0,1)$ es una variable aleatoria normal estándar independiente de W.

2.1. Variaciones de Hermite ponderadas para el movimiento browniano fraccionario

En esta sección utilizaremos el teorema del límite central para integrales de Skorohod múltiples para estudiar el comportamiento asintótico de las p-variaciones de Hermite del movimiento browniano fraccionario. Comenzaremos definiendo al movimiento browniano fraccionario y enunciaremos algunos resultados asintóticos conocidos para dicho proceso.

2.1.1. Propiedades básicas del movimiento browniano fraccionario

El movimiento browniano fraccionario con parámetro de Hurst $H\in(0,1)$ es un proceso gaussiano centrado con función de covarianzas dadas por

$$R_H(s,t) \;:=\; \mathbb{E}[B_sB_t]=\frac{1}{2}(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H}). \tag{2.30}$$

De la ecuación (2.30) se sigue

$$\mathbb{E}[|B_t-B_s|^2]=(t-s)^{2H}, \tag{2.31}$$

para cualesquiera $t,s\geq 0$ tales que t. Adicionalmente se puede ver que para toda $a>0$, el proceso $\{a^{-H}B_{at}\}_{t\geq 0}$ es igual en ley que el proceso $\{B_t\}_{t\geq 0}$, es decir, el proceso $\{B_t\}_{t\geq 0}$ tiene la propiedad de autosimilitud (para mayores referencias ver [1]).

2.1.2. Correlación entre los incrementos

Cuando $H = \frac{1}{2}$, el proceso $\{B_t^H\}_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano estándar, y por ende, es una martingala y satisface la propiedad de Markov. Por otro lado, cuando $H \neq \frac{1}{2}$, el proceso $\{B_t^H\}_{t\geq 0}$ no cumple ninguna de estas dos propiedades, esto debido al hecho de que sus incrementos están correlacionados. El comportamiento de la dependencia de dichos incrementos difiere considerablemente cuando $H > \frac{1}{2}$, y $H < \frac{1}{2}$ en el siguiente sentido: sean $s, h > 0$, y consideremos el proceso

$$X_n := B_{s+(n+1)h} - B_{s+nh}, \tag{2.32}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_n X_1] &= \mathbb{E}[(B_{s+nh+h} - B_{s+nh})(B_{s+h} - B_s)] \\
&= R_H(s+nh+h, s+h) + R_H(s+nh, s) - \\
&\quad R_H(s+nh+h, s) - R_H(s+nh, s+h) \\
&= h^{2H}\rho_H(n),
\end{aligned} \tag{2.33}$$

donde

$$\rho_H(n) = \frac{1}{2}[|n+1|^{2H} - 2|n|^{2H} + |n-1|^{2H}]. \tag{2.34}$$

Consecuentemente, los incrementos consecutivos $B_{t+2h}^H - B_{t+h}^H$ y $B_{t+h} - B_t$ están correlacionados positivamente cuando $H > \frac{1}{2}$ y negativamente cuando $H < \frac{1}{2}$. Más aún, utilizando la regla de L'Hôpital en la expresión (2.33) se sigue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} & \frac{(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}}{2n^{2H-2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+n^{-1}\right)^{2H} + \left(1-n^{-1}\right)^{2H} - 2}{2n^{-2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2H\left(1+n^{-1}\right)^{2H-1}(-n^{-2}) + 2H\left(1-n^{-1}\right)^{2H-1}(n^{-2})}{-4n^{-3}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H(1+n^{-1})^{2H-1} - H(1-n^{-1})^{2H-1}}{2n^{-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H(2H-1)n^{-2}\left((1-n^{-1})^{2H-2} - (1+n^{-1})^{2H-2}\right)}{2n^{-2}} \\
&= H(2H-1),
\end{aligned}$$

y por ende,

$$\rho_H(n) \sim H(2H-1)n^{2H-2}. \tag{2.35}$$

A partir de (2.33) se sigue que la correlación entre X_{k+n} y X_k está dada por $\mathbb{E}[X_{k+n}X_k] = \rho(n)$, y por lo tanto, de (2.35) deducimos que dicha correlación se comporta asintóticamente de la siguiente manera:

1. Si $H > \frac{1}{2}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_H(n) = \infty$
2. Si $H < \frac{1}{2}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_H(n) < \infty$.

2.1.3. Estado del arte de los teoremas Límite de las Variaciones del movimiento browniano fraccionario

Una manera de obtener información distribucional de $\{B_t^H\}_{t\geq 0}$ a partir de datos empíricos[4] consiste en analizar sumas del tipo $\sum_{k=1}^n a_n f(\Delta_{k/n})$, donde f son funciones reales, y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de constantes normalizadoras. En esta sección estudiaremos este tipo de sumas cuando f es igual al q-ésimo polinomio de Hermite, para cierto $q\in\mathbb{N}$. En este caso $\sum_{k=1}^n a_n H_q(\Delta_{k/n})$ se conoce como q-variación de Hermite[5]. A continuación enunciaremos algunos de los resultados más importantes a cerca del comportamiento asintótico de sumas del tipo $\sum_{k=1}^n a_n f(\Delta_{k/n})$:

Utilizando el teorema ergódico y la propiedad de autosimilitud de $\{B_t^H\}_{t\geq 0}$, se sigue que la sucesión $n^{2H-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\Delta B_{k/n}^H\right)^2$ converge casi seguramente y en $L^1(\Omega)$ a $\mathbb{E}[(B_1^H)^2]=1$ (para mayores referencias ver [2]). Más aún, es posible ver que para $H\in(0,\frac{3}{4})$, la sucesión

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(n^{2H}(\Delta B_{k/n}^H)^2-1\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}H_2(n^H\Delta B_{k/n}^H), \tag{2.36}$$

converge en distribución a una ley normal $N(0,\sigma_H^2)$ para cierta constante $\sigma_H>0$. Si $H=\frac{3}{4}$ se tiene un resultado similar con una diferente normalización. Dicho resultado afirma que

$$\frac{1}{\sqrt{n\log(n)}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(n^{2H}(\Delta B_{k/n}^H)^2-1\right)\xrightarrow{d}N(0,\sigma_H). \tag{2.37}$$

Cuando $H>\frac{3}{4}$, la sucesión

$$n^{1-2H}\sum_{k=0}^{n-1}\left(n^{2H}\left(\Delta B_{k/n}^H\right)^2-1\right)=n^{1-2H}\sum_{k=0}^{n-1}\left(H_2\left(n^H\Delta B_{k/n}^H\right)\right.$$

converge en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ a una variable aleatoria no degenerada. Esto implica que cuando $H>\frac{3}{4}$, la normalización requerida para que la suma $\sum_{k=0}^{n-1}\left(n^{2H}(\Delta B_{k/n}^H)^2-1\right)$ converja en distribución comienza a depender de H. De manera general, para todo $q\geq 2$ se tiene lo siguiente

1. Si $H<1-\frac{1}{2q}$, entonces la sucesión

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}H_q(n^H\Delta B_{k/n}^H) \tag{2.38}$$

converge en ley a una distribución normal centrada.

[4]por ejemplo, estimar el parámetro de Hurst H

[5]los términos a_n se toman de manera que el límite distribucional de $\sum_{k=1}^n a_n H_q(\Delta_{k/n})$ exista y sea no degenerado

2. Si $H > 1 - \frac{1}{2q}$, entonces la sucesión

$$n^{q-qH-1} \sum_{k=0}^{n-1} H_q(n^H \Delta B^H_{k/n}) \tag{2.39}$$

converge en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ a una variable aleatoria no degenerada.

Aquí se aprecia nuevamente que en el valor crítico $H = 1 - \frac{1}{2q}$, el orden de la velocidad de crecimiento de $\sum_{k=0}^{n-1} H_q(n^H \Delta B^H_{k/n})$ comienza a depender de H.

Cuando agregamos pesos de la forma $f(B^H_{k/n})$, a las variaciones (2.38), obtenemos un nuevo valor crítico ($H = \frac{1}{2q}$) para el comportamiento distribucional asintótico de las variaciones (2.38). Si definimos, para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fija, y $q \in \mathbb{N}$, las variaciones de Hermite ponderadas G_n mediante la fórmula

$$G_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n}) H_q(n^H \Delta B^H_{k/n}). \tag{2.40}$$

Entonces, bajo ciertas condiciones de regularidad para f, se tienen los siguientes resultados (para mayores referencias ver [17] y [19])

1. Si $H < \frac{1}{2q}$, entonces

$$n^{qH-\frac{1}{2}} G_n \overset{L^2(\Omega,\mathbb{P})}{\longrightarrow} \frac{(-1)^q}{2^q q!} \int_0^1 f^{(q)}(B^H_s) \mathrm{d}s. \tag{2.41}$$

2. Si $\frac{1}{2q} < H < 1 - \frac{1}{2q}$, entonces

$$G_n \overset{\text{establemente}}{\longrightarrow} \sigma_{H,q} \int_0^1 f(B^H_s) \mathrm{d}W_s, \tag{2.42}$$

donde W es un movimiento browniano independiente de B, y

$$\sigma^2_{H,q} = q! \sum_{r \in \mathbb{Z}} \rho_H(r)^q < \infty. \tag{2.43}$$

3. Si $H = 1 - \frac{1}{2q}$, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{\log(n)}} G_n \overset{\text{establemente}}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{q!}} \left(1 - \frac{1}{2q}\right)^{q/2} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{q/2} \int_0^1 f(B^H_s) \mathrm{d}W_s, \tag{2.44}$$

donde W es un movimiento browniano independiente de B.

4. Si $H > 1 - \frac{1}{2q}$, entonces

$$n^{q(1-H)-\frac{1}{2}} G_n \overset{L^2(\Omega,\mathbb{P})}{\longrightarrow} \int_0^1 f(B_s^H) \mathrm{d}Z_s^{(q)},$$

donde $Z^{(q)}$ es el proceso de Hermite asociado a B (para mayores referencias véase [22]).

El objetivo de esta sección es estudiar a las variables $\{G_n\}_{n\geq 1}$ cuando H pertenece a una vecindad de $\frac{1}{2q}$. A groso modo, se mostrará que se satisface la siguiente convergencia estable

$$G_n - n^{qH-\frac{1}{2}} \frac{(-1)^q}{2^q q!} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(q)}(B_{k/n}^H) \overset{\text{establemente}}{\longrightarrow} \sigma_{H,q} \int_0^1 f(B_s^H) \mathrm{d}W_s,$$

donde $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano independiente de $\{B_t\}_{t\geq 0}$.

2.1.4. Algunos resultados preliminares

A lo largo de esta sección denotaremos por $\{B_t\}_{t\geq 0}$ al movimiento Browniano fraccionario de parámetro de Hurst H. Sean $\mathcal{E}$ el conjunto de funciones simples en $[0,1]$, y $\mathfrak{H}$ la cerradura de $\mathcal{E}$ respecto al producto interno (definido en $\mathcal{E}$) dado por

$$\left\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, \mathbb{1}_{[0,s]} \right\rangle_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s-t|^{2H}) \qquad s,t \geq 0.$$

Entonces $\mathfrak{H}$ es un espacio de Hilbert[6], cuyo producto interno denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{H}}$. El mapeo $\mathbb{1}_{[0,t]} \longrightarrow B(\mathbb{1}_{[0,t]}) := B_t$, puede extenderse a una isometría definida en $\mathcal{H}$, la cual denotaremos por

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{H} & \overset{B}{\longrightarrow} & \{\text{Variables aleatorias } \sigma(\{B(\phi)\}_{\phi\in\mathfrak{H}})\text{-medibles}\} \\ \phi & \longmapsto & B(\phi). \end{array}$$

Por construcción, el proceso $\{B(\phi)\}_{\phi\in\mathfrak{H}}$ **tiene estructura de proceso gaussiano isonormal**. En lo sucesivo supondremos que $H < \frac{1}{2}$, y utilizaremos la siguiente notación

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &:= \mathbb{1}_{[0,t]}, \\ \partial_{k/n} &:= \varepsilon_{(k+1)/n} - \varepsilon_{k/n} = \mathbb{1}_{(k/n,(k+1)/n]}, \end{aligned} \tag{2.45}$$

para $t \in [0,1]$, $n \geq 1$ y $k = 0, ..., n-1$. Adicionalmente denotaremos por $\{B_t\}_{t\geq 0}$ al proceso $\{B_t^H\}_{t\geq 0}$. A continuación enunciaremos una serie de resultados que utilizaremos en el estudio de las p-variaciones de Hermite del movimiento browniano fraccionario.

[6] Una descripción detallada del espacio $\mathfrak{H}$ puede encontrarse en [24]

Teorema 5. *Sea V un espacio de Hilbert real y separable. Para $p>1$, y $s\in\mathbb{N}$, el operador D es continuo de $\mathbb{D}^{s,p}(V)$ en $\mathbb{D}^{s-1,p}(V\otimes\mathfrak{H})$ y el operador δ (definido como el adjunto de D) es continuo de $\mathbb{D}^{s,p}(V\otimes\mathfrak{H})$ en $\mathbb{D}^{s-1,p}(V)$. Es decir, para todo $p>1$ y $s\in\mathbb{R}$, se tiene que*

$$||\delta(u)||_{s-1,p}\leq c_{s,p}||u||_{s,p,\mathfrak{H}}$$

para cierta constante $c_{s,p}$.

Demostración. Dicho resultado puede consultarse en 1001[25], Proposición 1.5.7. □

Adicionalmente, haremos uso de los siguientes lemas

Lema 13. *Sea $q\geq 1$ un entero. Suponga que $F\in\mathbb{D}^{q,2}$, y sea u un elemento simétrico de Dom(δ^q). Suponga adicionalmente, que para cualesquiera $r,j\in\mathbb{N}$, con $0\leq r+j\leq q$, se tiene $\langle D^rF,\delta^j(u)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}\in L^2(\Omega,\mathfrak{H}^{\otimes(q-r-j)})$. Entonces, para todo $r=0,...,q-1$, $\langle D^rF,\delta^j(u)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}$ pertenece al dominio de δ^{q-r}, y se tiene que*

$$F\delta^q(u)=\sum_{r=0}^{q}\begin{pmatrix} q\\ r\end{pmatrix}\delta^{q-r}(\langle D^rF,u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}),$$

donde $\delta^0(u):=u$ y $D^0(F):=F$

Demostración. Probaremos este resultado por inducción sobre q:

1. Cuando $q=1$ la afirmación es consecuencia de la proposición 10.
2. Supongamos ahora que el resultado es válido para $q\in\mathbb{N}$ dado. Para probarlo para $q+1$ utilizaremos el siguiente lema

Lema 14. *En el contexto de las hipótesis del Lema 13 se tiene que*

$$\langle D^rF,\delta(u)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}=\delta\left(\langle D^rF,u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}\right)+\left\langle D^{r+1}F,u\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}.$$

Demostración. Sea $G\in\mathbb{D}^{1,2}$. Por la regla regla de Leibnitz para la derivada de Malliavin se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left\langle\langle D^rF,\delta(u)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}},G\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-r-1)}}\right]&=\mathbb{E}\left[\langle G\otimes D^rF,\delta(u)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}\right]\\&=\mathbb{E}\left[\langle D(G\otimes D^rF),u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q-1}}\right],\end{aligned}$$

por lo tanto, usando la simetría de u y la fórmula de Leibnitz obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left\langle\langle D^rF,\delta(u)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}},G\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-r-1)}}\right]\\&\qquad=\mathbb{E}\left[\langle DG\otimes D^rF,u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-1)}}+\left\langle G\otimes D^{r+1},u\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-1)}}\right]\\&\qquad=\mathbb{E}\left[\left\langle DG,\langle D^rF,u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-r)}}+\left\langle G,\left\langle D^{r+1},u\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-r-1)}}\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-r-1)}}\right]\\&\qquad=\mathbb{E}\left[\left\langle G,\delta(\langle D^rF,u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}})\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-r-1)}}+\left\langle G,\left\langle D^{r+1},u\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-r-1)}}\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-r-1)}}\right]\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left[\left\langle G, \delta(\langle D^r F, u\rangle_{H^{\otimes r}}) + \left\langle D^{r+1}, u\right\rangle_{H^{\otimes(q-r-1)}} - \langle D^r F, \delta(u)\rangle_{H^{\otimes r}}\right\rangle_{H^{\otimes(q-r-1)}}\right] = 0. \tag{2.46}$$

Escogiendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, la variable G de la forma

$$G = J_n(\delta(\langle D^r F, u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}) + \langle D^r F, u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}} - \langle D^r F, \delta(u)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}),$$

donde J_n denota la proyección en el n-ésimo caos, podemos deducir a partir de (2.46), que las proyecciones en caos de la variable $\langle D^{r+1}F, u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}} + \delta(\langle D^r F, u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}) - \langle D^r F, \delta(u)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}$ son idénticamente cero, y por ende,

$$\left\langle D^{r+1}F, u\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}} + \delta(\langle D^r F, u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}) - \langle D^r F, \delta(u)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}} = 0,$$

de donde se sigue el resultado. □

Continuaremos ahora con la prueba del lema 13. Aplicando la hipótesis de inducción a la variable $\delta(u)$ y posteriormente el lema 14, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
F\delta^{q+1}(u) &= F\delta^q(\delta(u)) \\
&= \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} \delta^{q-r}(\langle D^r F, \delta(u)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}) \\
&= \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} \delta^{q+1-r}(\langle D^r F, \delta(u)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}) + \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} \delta^{q-r}(\left\langle D^{r+1} F, \delta(u)\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}) \\
&= \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} \delta^{q+1-r}(\langle D^r F, \delta(u)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}) + \sum_{r=1}^{q+1} \binom{q}{r-1} \delta^{q+1-r}(\langle D^r F, \delta(u)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}) \\
&= \sum_{r=0}^{q+1} \binom{q+1}{r} \delta^{q+1-r}(\langle D^r F, u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}).
\end{aligned}$$

De aquí se sigue el resultado □

Lema 15. *Para cualquier elemento $u \in \mathbb{D}^{j+k,2}(\mathfrak{H}^{\otimes j})$ de la forma*

$$u = h^{\otimes j} f(W(v)), \qquad v \in \mathfrak{H}$$

con $F \in \mathbb{D}^{j+k,2}(\mathfrak{H}^{\otimes j})$ de la forma $F = f(W(v))$, para cierta función $f \in C^{2j}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, se tiene lo siguiente

$$D^k \delta^j(u) = \sum_{i=0}^{j\wedge k} \binom{k}{i} \binom{j}{i} i!\delta^{j-i}(h^{\otimes(j-i)} F_{k-i}) v^{\otimes(k-i)} \widehat{\otimes} h^{\otimes i} \tag{2.47}$$

donde

$$F_r := f^{(r)}(W(v)). \tag{2.48}$$

En particular, si $j = k = 1$ se tiene que

$$D(\delta(u)) = u + v\delta(F_1 h) \tag{2.49}$$

Demostración. El resultado se sigue de manera directa cuando $j = 0$ o $k = 0$, por lo que supondremos que $j, k \neq 0$.

1. Comenzaremos demostrando el resultado cuando $k = 1$ y $j \in \mathbb{N}$ es arbitraria, es decir, veremos que para todo $j \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\begin{aligned} D\delta^j(u) &= \sum_{i=0}^{1} \binom{j}{i} i!\delta^{j-i}(h^{\otimes(j-i)}F_{1-i})v^{\otimes(1-i)} \otimes h^{\otimes i} \\ &= \delta^j(h^{\otimes j}F_1)v + j\delta^{j-1}(h^{\otimes(j-1)}F)h. \end{aligned} \tag{2.50}$$

La relación (2.50) se mostrará, a su vez, por inducción sobre j:

a) Supongamos que $j = 1$. Gracias a la relación (1.79), para todo $w \in \mathfrak{H}$ se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle D(\delta(hF)), w\rangle_{\mathfrak{H}} &= \langle hF, w\rangle_{\mathfrak{H}} + \delta(\langle Du, w\rangle_{\mathfrak{H}}) \\ &= \langle hF, w\rangle_{\mathfrak{H}} + \delta(F_1 \langle v, w\rangle_{\mathfrak{H}} h) \\ &= \langle hF, w\rangle_{\mathfrak{H}} + \langle v, w\rangle_{\mathfrak{H}} \delta(F_1 h) \\ &= \langle hF + v\delta(F_1 h), w\rangle_{\mathfrak{H}}. \end{aligned}$$

Como la igualdad anterior es válida para todo $w \in \mathfrak{H}$, se deduce el resultado.

b) Si la ecuación (2.50) es válida para cierto $j \in \mathbb{N}$, entonces, definiendo $Y := h\delta^j(h^{\otimes j}F)$, y utilizando la ecuación (1.79), deducimos que para todo $w \in \mathfrak{H}$ se cumple

$$\begin{aligned} &D\delta^{j+1}(u) \\ &\quad= \left\langle D\delta^{j+1}(h^{\otimes(j+1)}F), w\right\rangle_{\mathfrak{H}} \\ &\quad= \left\langle D\delta(h\delta^j(h^{\otimes j}F)), w\right\rangle_{\mathfrak{H}} = \langle D\delta Y, w\rangle_{\mathfrak{H}} \\ &\quad= \langle Y, w\rangle_{\mathfrak{H}} + \delta\left(\langle DY, w\rangle_{\mathfrak{H}}\right) \\ &\quad= \langle Y, w\rangle_{\mathfrak{H}} + \delta\left(\left\langle (D\delta^j(h^{\otimes j}F)) \otimes h, w\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right) \\ &\quad= \left\langle \delta^j(h^{\otimes j}F)h, w\right\rangle_{\mathfrak{H}} + \delta\left(\left\langle \delta^j(h^{\otimes j}F_1)v \otimes h + j\delta^{j-1}(h^{\otimes(j-1)}F)h^{\otimes 2}, w\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right), \end{aligned}$$

y por ende,

$$\begin{aligned} &D\delta^{j+1}(u) \\ &\qquad= \left\langle \delta^j(h^{\otimes j}F)h, w\right\rangle_{\mathfrak{H}} + \delta\left(\delta^j(h^{\otimes j}F_1)\langle v, w\rangle_{\mathfrak{H}} h\right) + \\ &\qquad\quad \delta\left(j\delta^{j-1}(h^{\otimes(j-1)}F)\langle h, w\rangle_{\mathfrak{H}} h\right) \\ &\qquad= \left\langle \delta^j(h^{\otimes j}F)h, w\right\rangle_{\mathfrak{H}} + \delta^{j+1}\left(h^{\otimes(j+1)}F_1\right)\langle v, w\rangle_{\mathfrak{H}} + j\delta^j(h^{\otimes j}F)\langle h, w\rangle_{\mathfrak{H}} \\ &\qquad= \left\langle \delta^{j+1}\left(h^{\otimes(j+1)}F_1\right)v + (j+1)\delta^j(h^{\otimes j}F)h, w\right\rangle_{\mathfrak{H}} \end{aligned}$$

Como la igualdad anterior es válida para $w \in \mathfrak{H}$ arbitraria, concluimos que la ecuación (2.50) es válida para todo $j \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que para cierto $k \in \mathbb{N}$, la relación (2.47) se cumple para todo $k' \leq k$. Queremos probar que

$$D^{k+1}\delta^j(u) = \sum_{i=0}^{j\wedge(k+1)} \binom{k+1}{i}\binom{j}{i} i!\delta^{j-i}(h^{\otimes(j-i)}F_{k+1-i})v^{\otimes(k+1-i)}\widehat{\otimes}h^{\otimes i}.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $j \leq k$ (para el caso $k+1 \leq j$ se procede de manera análoga). Como el resultado es válido para $k = 1$ y para todo entero menor o igual a k, entonces se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
&D(D\delta^j(u)) \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} \binom{k}{i}\binom{j}{i} i!D\left(\delta^{(j-i)}(h^{\otimes(j-i)}F_{k-i})v^{\otimes(k-i)}\widehat{\otimes}h^{\otimes i}\right) + \\
&\binom{k}{j} j!D(F_{k-j}v^{\otimes(k-j)}\widehat{\otimes}h^{\otimes j}) \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} \binom{k}{i}\binom{j}{i} i!\sum_{l=0}^{1}\binom{j-i}{l} l!\delta^{j-i-l}(h^{\otimes(j-i-l)}F_{k-i+1-l})v^{\otimes(1-l)}\widehat{\otimes}h^{\otimes l} + \\
&\binom{k}{j} j!v\otimes v^{\otimes(k-j)}\widehat{\otimes}h^{\otimes j},
\end{aligned} \tag{2.51}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&D(D\delta^j(u)) \\
&= \sum_{i=0}^{j} \binom{k}{i}\binom{j}{i} i!\delta^{j-i}(h^{\otimes(j-i)}F_{k-i+1})v\otimes v^{\otimes(k-i)}\widehat{\otimes}h^{\otimes i} + \\
&\sum_{i=1}^{j} \binom{k}{i-1}\binom{j}{i-1}(i-1)!(j+1-i)\times \\
&\qquad \delta^{j-i}(h^{\otimes(j-i)}F_{k+1-i})h\otimes v^{\otimes(k+1-i)}\widehat{\otimes}h^{\otimes(i-1)} \\
&= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} i!\delta^{j-i}(h^{\otimes(j-i)}F_{k-i+1})\times \\
&\left\{\binom{k}{i} v\otimes v^{\otimes(k-i)}\widehat{\otimes}h^{\otimes i} + \binom{k}{i-1} h\otimes v^{\otimes(k+1-i)}\widehat{\otimes}h^{\otimes(i-1)}\right\}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Para calcular el término entre llaves en la expresión anterior procedemos como sigue: sea S_n el conjunto de permutaciones de n elementos. Para cada elemento $\sigma \in S_n$, y para cada vector en $\mathfrak{H}^{\otimes k}$ de la forma

$$x = \bigotimes_{l=1}^{k} x_l \qquad x_l \in \mathfrak{H}, l = 1, ..., k,$$

denotaremos por $\sigma(x)$ al vector en $\mathfrak{H}^{\otimes k}$ definido por

$$\sigma(x) := \bigotimes_{l=1}^{k} x_{\sigma(l)}. \tag{2.53}$$

Sean

$$\begin{aligned} Z_n &:= \{\sigma \in S_n \mid \sigma(v^{\otimes(k+1-i)} \otimes h^{\otimes i}) = v^{\otimes(k+1-i)} \otimes h^{\otimes i}\} \\ A_n &:= \{\sigma \in Z_n \mid \sigma^{-1}(1) \leq k+1-i\} \\ B_n &:= \{\sigma \in Z_n \mid \sigma^{-1}(1) > k+1-i\}. \end{aligned}$$

Equivalentemente, un elemento $\sigma \in Z_n$ pertenece a A_n si y sólo si el primer factor del tensor

$$\sigma\left(v^{\otimes(k+1-i)} \otimes h^{\otimes i}\right)$$

es v. Es decir, $\sigma\left(v^{\otimes(k+1-i)} \otimes h^{\otimes i}\right) = v \otimes y$ para cierto $y \in \mathfrak{H}^{\otimes k}$. De manera similar, $\sigma \in Z_n$ pertenece a B_n si y sólo si el primer factor del tensor

$$\sigma\left(v^{\otimes(k+1-i)} \otimes h^{\otimes i}\right)$$

es h. Es decir, $\sigma\left(v^{\otimes(k+1-i)} \otimes h^{\otimes i}\right) = h \otimes y$, para cierto $y \in \mathfrak{H}^{\otimes k}$. Utilizando estas observaciones es fácil verificar que $\#Z_n = \binom{k+1}{i}$, $\#A_n = \binom{k}{i}$, $\#B_n = \binom{k}{i-1}$, y $A_n \cup B_n = Z_n$. Por lo tanto, utilizando la simetría del vector $v^{\otimes(k-i)}\widehat{\otimes}h^{\otimes i}$, podemos reescribir a la ecuación (2.52) en la forma

$$\begin{aligned} D(D\delta^j(u)) &= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} i!\delta^{j-i}(h^{\otimes(j-i)}F_{k-i+1}) \times \\ &\left\{ \binom{k}{i} v \otimes v^{\otimes(k-i)}\widehat{\otimes}h^{\otimes i} + \binom{k}{i} h \otimes v^{\otimes(k+1-i)}\widehat{\otimes}h^{\otimes(i-1)} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} i!\delta^{j-i}(h^{\otimes(j-i)}F_{k-i+1}) \times \\ &\left\{ \sum_{\sigma \in A_n} \sigma(v \otimes v^{\otimes(k-i)}\widehat{\otimes}h^{\otimes i}) + \sum_{\sigma \in B_n} \sigma(h \otimes v^{\otimes(k+1-i)}\widehat{\otimes}h^{\otimes(i-1)}) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} i!\delta^{j-i}(h^{\otimes(j-i)}F_{k-i+1}) \sum_{\sigma \in Z_n} \sigma(v \otimes v^{\otimes(k-i)}\widehat{\otimes}h^{\otimes i}) \\ &= \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} i!\delta^{j-i}(h^{\otimes(j-i)}F_{k-i+1}) \binom{k+1}{i} v\widehat{\otimes}v^{\otimes(k-i)}\widehat{\otimes}h^{\otimes i}. \end{aligned}$$

De donde se sigue el resultado. □

Como corolario del lema anterior se deduce el siguiente resultado

Lema 16. *Sean* $u, v \in \mathbb{D}^{2q,2}(\mathfrak{H}^{\otimes q}) \subset Dom(\delta^q)$ *dos variables simétricas. Considere la permutación* $\sigma \in S_n$ *definida por* $\sigma(i) = 2q - i$, $i = 1, ..., 2q$, *entonces*

$$\mathbb{E}[\delta^q(u)\delta^q(v)] \;=\; \sum_{i=0}^{q} \binom{q}{i}^2 i!\mathbb{E}[\langle D^{q-i}u, \sigma(D^{q-i}v)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(2q-i)}}],$$

donde $\sigma(h)$ *está definido como en* (2.53).

Demostración. Basta probar el resultado cuando $u, v \in \mathbb{D}^{2q,2}(\mathfrak{H}^{\otimes q}) \subset Dom(\delta^q)$ son dos variables aleatorias $\mathfrak{H}^{\otimes q}$-valuadas de la forma

$$\begin{aligned} u &= h_1^{\otimes q} f(W(w_1)) \\ v &= h_2^{\otimes q} g(W(w_2)), \end{aligned}$$

con $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}$, y f, g funciones reales infinitamente diferenciables. Entonces, utilizando el lema 15 es posible mostrar que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta^q(u)\delta^q(v)] &= \mathbb{E}[\langle u, D^q(\delta^q(v))\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}] \\ &= \sum_{i=0}^{q} \binom{q}{i}^2 i!\mathbb{E}\left[\langle u, \delta^{q-i}(\sigma_{q-i}(D^{q-i}v)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{q} \binom{q}{i}^2 i!\mathbb{E}\left[\langle D^{q-i}u, \sigma_{q-i}(D^{q-i}v)\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(2q-i)}}\right]. \end{aligned}$$

El resultado puede obtenerse en general utilizando la linealidad de δ y D, y posteriormente un argumento de aproximación. $\square$

Lema 17. *Sean* $n \geq 1$ *y* $k = 0, ..., n-1$. *Utilizando la notación* (2.45), *se tiene lo siguiente*

(a) $|\mathbb{E}[B_r(B_t - B_s)]| \leq (t-s)^{2H}$ *para* $r \in [0,1]$ *y* $0 \leq s < t \leq 1$.

(b) $|\langle \varepsilon_t, \partial_{k/n}\rangle_H| \leq n^{-2H}$ *para todo* $t \in [0,1]$.

(c) $\sup_{t\in[0,1]} \sum_{k=0}^{n-1} |\langle \varepsilon_t, \partial_{k/n}\rangle_H| = O(1)$ *cuando* n *tiende a infinito.*

(d) Para todo entero $q \geq 2$ *se tiene que*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \langle \varepsilon_{k/n}, \partial_{k/n}\rangle_H^q - \frac{(-1)^q}{2^q n^{2qH}} \right| = O(n^{-2H(q-1)}) \qquad \text{cuando } n \text{ tiende a infinito}$$

(e) Para todo entero $q \geq 1$, *se tiene que*

$$\sum_{k,j=0}^{n-2} |\langle \partial_{j/n}, \partial_{k/n}\rangle_H|^q = O(n^{1-2qH}) \qquad \text{cuando } n \text{ tiende a infinito}$$

(f) Se cumple la igualdad

$$\left\langle \partial_{j/n}, \partial_{k/n} \right\rangle_H \quad = \quad n^{-2H}\rho_H(j-k). \tag{2.54}$$

Donde ρ_H *está dada por* (2.34).

(g) Para todo entero $q \geq 1$, *y* $k \in \mathbb{N}$, *se tiene que*

$$\sum_{j=0}^{n-2} |\left\langle \partial_{j/n}, \partial_{k/n} \right\rangle_H|^q = O(n^{-2qH}) \qquad \textit{cuando } n \textit{ tiende a infinito}$$

Demostración. Para probar (a) note que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_r(B_t - B_s)] &= \frac{1}{2}(r^{2H} + t^{2H} - |t-r|^{2H}) - \frac{1}{2}(r^{2H} + s^{2H} - |r-s|^{2H}) \\ &= \frac{1}{2}(t^{2H} - s^{2H}) + \frac{1}{2}(|s-r|^{2H} - |t-r|^{2H}). \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad del triángulo $||a| - |b|| \leq |a-b|$, así como la desigualdad $|b^{2H} - a^{2H}| \leq |b-a|^{2H}$ para $a, b \in [0,1]$ se sigue que

$$|\mathbb{E}[B_r(B_t - B_s)]| \;\leq\; \frac{1}{2}(t-s)^{2H} + \frac{1}{2}(|s-r|^{2H} - |t-r|^{2H}) \leq (t-s)^{2H},$$

lo cual prueba el resultado. La propiedad (b) se sigue de la propiedad (a) gracias a la igualdad

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \varepsilon_t, \partial_{k/n} \right\rangle_H\right| &= \left|\left\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, \mathbb{1}_{[0,(k+1)/n]} \right\rangle_H - \left\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, \mathbb{1}_{[0,k/n]} \right\rangle_H\right| \\ &= |\mathbb{E}[B_t B_{(k+1)/n}] - \mathbb{E}[B_t B_{k/n}]|. \end{aligned}$$

Para probar la propiedad (c) note que

$$\left\langle \varepsilon_t, \partial_{k/n} \right\rangle_H = \frac{1}{2n^{2H}}\left[(k+1)^{2H} - k^{2H} - |k+1-nt|^{2H} + |k-nt|^{2H}\right],$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in(0,1)} \sum_{k=0}^{n-1} |\left\langle \varepsilon_t, \partial_{k/n} \right\rangle_H| \\ &= \frac{1}{2n^{2H}} \sup_{t\in(0,1)} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)^{2H} - k^{2H} - |k+1-nt|^{2H} + |k-nt|^{2H}\right] \\ &= \frac{1}{2n^{2H}} \sup_{t\in(0,1)} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor nt\rfloor -1} \left[(k+1)^{2H} - k^{2H} - |k+1-nt|^{2H} + |k-nt|^{2H}\right] + \right. \\ &\left[(\lfloor nt\rfloor + 1)^{2H} - \lfloor nt\rfloor^{2H} - |\lfloor nt\rfloor + 1 - nt|^{2H} + |\lfloor nt\rfloor - nt|^{2H}\right] + \\ &\left. \sum_{k=\lfloor nt\rfloor+1}^{n-1} \left[(k+1)^{2H} - k^{2H} - |k+1-nt|^{2H} + |k-nt|^{2H}\right] \right) \end{aligned} \tag{2.55}$$

Note que si $k \leq \lfloor nt \rfloor - 1$, entonces $|k+1-nt| = (nt-1-k)$. Por lo tanto, gracias a la concavidad de la función $g(x) = x^{2H}$ (restringida a $\mathbb{R}^+$) se tiene que[7]

$$(nt-k)^{2H} - (nt-k-1)^{2H} \quad \leq \quad (nt - \lfloor nt \rfloor + k + 1)^{2H} - (nt - \lfloor nt \rfloor + k)^{2H},$$

y por ende, utilizando un argumento de series telescópicas deducimos lo siguiente

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} & |k+1-nt|^{2H} - |k-nt|^{2H} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} (nt-k)^{2H} - (nt-k-1)^{2H} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} (nt - \lfloor nt \rfloor + k + 1)^{2H} - (nt - \lfloor nt \rfloor + k)^{2H} \qquad (2.56) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} (k+1)^{2H} - k^{2H} = \lfloor nt \rfloor^{2H},
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=\lfloor nt \rfloor + 1}^{n-1} |k+1-nt|^{2H} - |k-nt|^{2H} &= -\sum_{k=\lfloor nt \rfloor + 1}^{n-1} (k+1-nt)^{2H} - (k-nt)^{2H} \\
&\leq (1 - (nt - \lfloor nt \rfloor))^{2H} - (n-nt)^{2H} \\
&\leq 1 - (n-nt)^{2H}. \qquad (2.57)
\end{aligned}$$

De las desigualdades (2.55),(2.56) y(2.57) se sigue que

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in (0,1)} & \sum_{k=0}^{n-1} | \left\langle \varepsilon_t, \partial_{k/n} \right\rangle_H | \\
&= \frac{1}{2n^{2H}} \sup_{t \in (0,1)} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} (k+1)^{2H} - k^{2H} - \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} |k+1-nt|^{2H} + |k-nt|^{2H} + \right. \\
&\left[(\lfloor nt \rfloor + 1)^{2H} - \lfloor nt \rfloor^{2H} - | \lfloor nt \rfloor + 1 - nt|^{2H} + | \lfloor nt \rfloor - nt|^{2H} \right] + \\
&\left. \sum_{k=\lfloor nt \rfloor + 1}^{n-1} (k+1)^{2H} - k^{2H} - \sum_{k=\lfloor nt \rfloor + 1}^{n-1} |k+1-nt|^{2H} - |k-nt|^{2H} \right) \\
&\leq \frac{1}{2n^{2H}} \sup_{t \in (0,1)} \left(\lfloor nt \rfloor^{2H} + (\lfloor nt \rfloor + 1)^{2H} - \lfloor nt \rfloor^{2H} + \right. \\
&\left. - | \lfloor nt \rfloor + 1 - nt|^{2H} + | \lfloor nt \rfloor - nt|^{2H} + 1 - (n-nt)^{2H} \right).
\end{aligned}$$

[7]para verificar esto basta definir $x_k := nt - k$, $y_k := nt - \lfloor nt \rfloor + k + 1$, verificar que $x_k \geq y_k$, y usar la concavidad de $g(x) = x^{2H}$ para mostrar que $x_k^{2H} - (x_k - 1)^{2H} \leq y_k^{2H} - (y_k - 1)^{2H}$.

El resultado se sigue de la igualdad anterior, haciendo n tender a infinito. Para probar (d) note que

$$\left\langle \varepsilon_{k/n}, \partial_{k/n} \right\rangle_H = \frac{1}{2n^{2H}} \left[(k+1)^{2H} - k^{2H} - 1 \right],$$

y por ende

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \varepsilon_{k/n}, \partial_{k/n} \right\rangle_H^q - \frac{(-1)^q}{2^q n^{2qH}} \right| &= \frac{1}{2^q n^{2qH}} \left| ((k+1)^{2H} - k^{2H} - 1)^q - (-1)^q \right| \\
&= \frac{1}{2^q n^{2qH}} \left| \sum_{i=1}^{q} \binom{q}{i} \left[(k+1)^{2H} - k^{2H} \right]^i (-1)^{q-i} \right| \\
&\leq \frac{1}{2^q n^{2qH}} \left[(k+1)^{2H} - k^{2H} \right] \sum_{i=1}^{q} \binom{q}{i}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \left| \left\langle \varepsilon_{k/n}, \partial_{k/n} \right\rangle_H^q - \frac{(-1)^q}{2^q n^{2qH}} \right| &\leq \frac{1}{2^q n^{2qH}} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)^{2H} - k^{2H} \right] \sum_{i=1}^{q} \binom{q}{i} \\
&= \frac{n^{2H}}{2^q n^{2qH}} \sum_{i=1}^{q} \binom{q}{i} = O(n^{-2H(q-1)}).
\end{aligned}$$

De aquí se sigue el resultado. Para demostrar (f) note que, de acuerdo con la definición de (2.34), se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\left\langle \partial_{j/n}, \partial_{k/n} \right\rangle_H &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{j+1}{n} \right)^{2H} + \left(\frac{k+1}{n} \right)^{2H} - \left| \frac{j-k}{n} \right|^{2H} \right. \\
&\quad - \left(\frac{j}{n} \right)^{2H} - \left(\frac{k+1}{n} \right)^{2H} + \left| \frac{k+1-j}{n} \right|^{2H} \\
&\quad - \left(\frac{j+1}{n} \right)^{2H} + \left(\frac{k}{n} \right)^{2H} - \left| \frac{j+1-k}{n} \right|^{2H} + \\
&\quad \left. \left(\frac{j}{n} \right)^{2H} + \left(\frac{k}{n} \right)^{2H} - \left| \frac{j-k}{n} \right|^{2H} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left| \frac{k+1-j}{n} \right|^{2H} + \left| \frac{j+1-k}{n} \right|^{2H} - 2 \left| \frac{j-k}{n} \right|^{2H} \right) \\
&= n^{-2H} \rho_H(j-k). \qquad (2.58)
\end{aligned}$$

Para verificar (g), notamos que, gracias al inciso (f),

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}\left|\left\langle \partial_{j/n},\partial_{k/n}\right\rangle_{H}\right|^{q} &= n^{-2qH}\sum_{j=0}^{n-1}|\rho_H(j-k)|^q\\ &\leq n^{-2qH}\sum_{r\in\mathbb{Z}}|\rho_H(r)|^q\\ &= n^{-2qH}\sum_{r\in\mathbb{Z}}|\rho_H(r)|^q. \end{aligned}\tag{2.59}$$

Como se mencionó posteriormente a la definición de ρ_H, la serie $\sum_{r\in\mathbb{Z}}|\rho_H(r)|^q$ es convergente ya que $\rho_H(r)$ se comporta como $H(2H-1)|r|^{2H-2}$ cuando $|r|\longrightarrow\infty$. Por lo tanto, de (2.59) se sigue el inciso (g), el cual implica a su vez el inciso (e). □

2.1.5. Un resultado auxiliar

En lo sucesivo, q denotará a **un número natural mayor o igual a dos**, y f denotará a una función real $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisface la siguiente condición:

(H) f es $2q$-veces diferenciable, con derivadas continuas y para cualesquiera $p\geq 2$, $i=0,...,2q$, se tiene que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}\left|f^{(i)}(B_t)\right|^p\right]<\infty.$$

Note que una condición suficiente para que esta condición se satisfaga es que f tenga una condición de crecimiento exponencial de la forma $|f^{(2q)}(x)|\leq ke^{c|x|^p}$, para ciertas constantes $c,k>0$, y $0<p<2$.

Teorema 6. *Suponga que $H\in(\frac{1}{4q},\frac{1}{2})$, para cierto $q\in\mathbb{N}$ mayor o igual a dos, y sea f una función que satisface la hipótesis **(H)**. Considere la siguiente sucesión de procesos simples*

$$u_n=n^{qH-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}f(B_{k/n})\partial_{k/n}^{\otimes q}.\tag{2.60}$$

Entonces u_n pertenece a $Dom(\delta^q)$ y $\delta^q(u_n)$ converge establemente a $\sigma_{H,q}\int_0^1 f(B_s)dW_s$, donde $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano independiente de $\{B_t\}_{t\geq 0}$, y $\sigma_{H,q}>0$ está dado por[8]

$$\sigma_{H,q} = q!\sum_{r\in\mathbb{Z}}\rho_H(r)^q<\infty\tag{2.61}$$

[8] Aquí ρ_H está definido por (2.34)

Demostración. A lo largo de la prueba se utilizará la notación

$$\alpha_{k,j} = \left\langle \varepsilon_{k/n}, \partial_{j/n} \right\rangle_{\mathfrak{H}}, \qquad \beta_{k,j} = \left\langle \partial_{k/n}, \partial_{j/n} \right\rangle_{\mathfrak{H}}. \tag{2.62}$$

Gracias a la regla de la cadena[9] y a la condición **(H)**, se sigue que u_n pertenece a $\mathbb{D}^{q,2}(\mathfrak{H}^{\otimes q})$. Por lo tanto, de la contención[10] $\mathbb{D}^{q,2}(\mathfrak{H}^{\otimes q}) \subset Dom(\delta^q)$, se sigue que $u_n \in Dom(\delta^q)$. Para probar la segunda parte del teorema verificaremos que la sucesión

$$F_n := \delta^q(u_n),$$

satisface las condiciones del teorema 4.

Paso 1. Mostraremos que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$. Por el Teorema 5, es suficiente mostrar que u_n es acotada respecto a la norma de $\mathbb{D}^{q,2}(H^{\otimes q})$, o equivalentemente, que las normas de u_n y sus derivadas están acotadas en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$. Considere $k \leq 2q$ arbitrario, y $p \geq 2$. Entonces, utilizando el inciso (e) del lema 17[11], se tiene que la sucesión

$$n^{2qH-1} \sum_{k,j=0}^{n-1} \beta_{k,j}^q,$$

con $\beta_{k,j}$ definido por (2.62) es convergente, y por ende, está acotada por cierta constante $C > 0$. De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} ||u_n||^2_{H^{\otimes q}} &= n^{2qH-1} \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n}) \partial_{k/n}^{\otimes q}, \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n}) \partial_{k/n}^{\otimes q} \right\rangle_{H^{\otimes q}} \\ &= n^{2qH-1} \sum_{k,j=0}^{n-1} f(B_{k/n}) f(B_{j/n}) \beta_{k,j}^q \\ &\leq C \sup_{t\leq 1} |f(B_t)|^2. \end{aligned} \tag{2.63}$$

De manera similar, de acuerdo a la notación (2.45), para $k \geq 1$ arbitrario se tiene la igualdad

$$D^k u_n = n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{k,j=0}^{n-1} f^k(B_{j/n}) \varepsilon_{j/n}^{\otimes k} \otimes \partial_{j/n}^{\otimes q}.$$

Por lo tanto, se tiene la siguiente cota

$$\begin{aligned} ||D^k u_n||^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(q+k)}} &= n^{2qH-1} \sum_{l,j=0}^{n-1} f^{(k)}(B_{l/n}) f^{(k)}(B_{j/n}) \left\langle \varepsilon_{l/n}, \varepsilon_{j.n} \right\rangle_{\mathfrak{H}}^k \beta_{l,j}^q \\ &\leq C_1 \sup_{t\leq 1} |f^{(k)}(B_t)|^2. \end{aligned} \tag{2.64}$$

[9]La regla de la cadena garantiza que la q-ésima derivada iterada de Malliavin de $f(B_{k/n})$ existe para $1 \leq k \leq n$

[10]Para mayores referencias ver Proposición 8

[11]El cual afirma que $\sum_{k,j=0}^{n-1} \beta_{k,j}^q - O(n^{2qH-1})$

Note que $\left\langle \varepsilon_{l/n}, \varepsilon_{j/n} \right\rangle_{\mathfrak{H}} = R_H(\frac{l}{n}, \frac{j}{n}) \leq 1$. Por lo tanto, de la desigualdad (2.64) y del lema 17, inciso (e), deducimos que

$$||D^k u_n||^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(q+k)}} \leq C_1 \sup_{t \leq 1} |f^{(k)}(B_t)|^2, \tag{2.65}$$

para cierta constate $C_1 > 0$. Utilizando la condición **(H)**, y las desigualdades (2.63) y (2.64), se puede deducir que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada respecto a la norma de $\mathbb{D}^{q,2}(\mathfrak{H}^{\otimes q})$.

Paso 2. Verificaremos enseguida la condición (i) del teorema 4. Sean $r, k_1, ..., k_{q-1}, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $k_1 + \cdots + k_{q-1} + r = q$, y sea $h \in \mathfrak{H}^{\otimes r}$. Queremos ver que

$$\left\langle u_n, (DF_n)^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes (D^{q-1}F_n)^{\otimes k_{q-1}} \otimes h \right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}} \tag{2.66}$$

converge a cero en $L^1(\Omega)$.

Supongamos primeramente que $r \geq 1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que h es de la forma

$$h = g \otimes \varepsilon_t,$$

con $g \in \mathfrak{H}^{\otimes r-1}$, ya que el conjunto de combinaciones lineales finitas de elementos de la forma $g \otimes \varepsilon_t$, con $g \in \mathfrak{H}^{\otimes r-1}$ forman un conjunto denso en $\mathfrak{H}^{\otimes r}$. Sea

$$\Phi_n := (DF_n)^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes (D^{q-1}F_n)^{\otimes k_{q-1}} \otimes g. \tag{2.67}$$

Entonces la sucesión (2.66) converge a cero en $L^1(\Omega)$ si y sólo si $\langle u_n, \Phi_n \otimes \varepsilon_t \rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}$ converge a cero en $L^1(\Omega)$. Note que

$$\langle u_n, \Phi_n \otimes \varepsilon_t \rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}} = n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n}) \left\langle \partial_{k/n}^{\otimes(q-1)}, \Phi_n \right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-1)}} \left\langle \partial_{k/n}, \varepsilon_t \right\rangle_{\mathfrak{H}},$$

y consecuentemente,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left| \langle u_n, \Phi_n \otimes \varepsilon_t \rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}} \right| \right] \\ &\qquad \leq n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\left| f(B_{k/n}) \left\langle \partial_{k/n}^{\otimes(q-1)}, \Phi_n \right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-1)}} \right| \right] \left| \left\langle \partial_{k/n}, \varepsilon_t \right\rangle_{\mathfrak{H}} \right|. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Del inciso (c) del lema 17, se deduce que existe una constante $C_3 \geq 0$ t.q.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,1]} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \left\langle \partial_{k/n}, \varepsilon_t \right\rangle_{\mathfrak{H}} \right| \leq C_3. \tag{2.69}$$

A partir de la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y las desigualdades (2.68) y (2.69), se sigue que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\left\langle u_n, \Phi_n \otimes \varepsilon_t\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}\right|\right] \\
&\quad \leq n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\left|f(B_{k/n}) \left\langle \partial_{k/n}^{\otimes(q-1)}, \Phi_n \right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-1)}}\right|\right] \left|\left\langle \partial_{k/n}, \varepsilon_t\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right| \\
&\quad \leq n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[f(B_{k/n})^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\left\langle \partial_{k/n}^{\otimes(q-1)}, \Phi_n \right\rangle^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-1)}}\right]^{\frac{1}{2}} \left|\left\langle \partial_{k/n}, \varepsilon_t\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right| \qquad (2.70) \\
&\quad \leq n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[f(B_{k/n})^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[||\Phi_n||^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-1)}}\right]^{\frac{1}{2}} ||\partial_{k/n}^{\otimes(q-1)}||_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-1)}} \left|\left\langle \partial_{k/n}, \varepsilon_t\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right|.
\end{aligned}
$$

Gracias a la ecuación (2.54), se tiene que $||\partial_{k/n}^{\otimes(q-1)}||_{\mathfrak{H}} = n^{-2H}$. Por lo tanto, de la desigualdad anterior se sigue que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\left\langle u_n, \Phi_n \otimes \varepsilon_t\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}\right|\right] \\
&\qquad \leq n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t} f(B_s)^2\right]^{\frac{1}{2}} n^{-2H} \mathbb{E}[||\Phi_n||^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-1)}}]^{\frac{1}{2}} \left|\left\langle \partial_{k/n}, \varepsilon_t\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right|. \qquad (2.71)
\end{aligned}
$$

Del lema 17, inciso $c)$[12], se deduce que existe una constante $C_4 > 0$ que acota a $\sum_{k=0}^{n-1} \left|\left\langle \partial_{k/n}, \varepsilon_t\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right|$, y por ende, de la desigualdad (2.71) se sigue que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\left\langle u_n, \Phi_n \otimes \varepsilon_t\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}\right|\right] &\leq n^{qH-\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t} f(B_s)^2\right]^{\frac{1}{2}} n^{-2H(q-1)} \times \\
&\qquad \mathbb{E}[||\Phi_n||^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-1)}}]^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \left|\left\langle \partial_{k/n}, \varepsilon_t\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right| \\
&\leq K n^{2H-qH-\frac{1}{2}} \mathbb{E}[||\Phi_n||^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-1)}}]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.72)
\end{aligned}
$$

donde

$$
K := C_4 \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t} f(B_s)^2\right]^{\frac{1}{2}}.
$$

Para aproximar al término $\mathbb{E}[||\Phi_n||^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-1)}}]^{\frac{1}{2}}$ procedemos como sigue: de la definición de Φ se tiene que

$$
||\Phi_n||^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-1)}} = ||g||^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(r-1)}} \prod_{m=1}^{q-1} ||D^m F_n||^{2k_m}_{\mathfrak{H}^{\otimes m}},
$$

por lo que, aplicando la desigualdad de Hölder generalizada[13] a las variables $||g||^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(r-1)}}$,

[12] El cual afirma que $\sup_{t\in[0,1]} \sum_{k=0}^{n-1} \left|\left\langle \varepsilon_t, \partial_{k/n}\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right| = O(1)$

[13] Para mayores referencias sobre dicha desigualdad ver Apéndice, teorema 8

$||DF_n||_{\mathfrak{H}}^{2k_1}$, $||D^2F_n||_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}}^{2k_2}$,...,$||D^{q-1}F_n||_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-1)}}^{2k_{q-1}}$, deducimos la desigualdad

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[||\Phi_n||^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-1)}}] &\leq \mathbb{E}\left[||g||^{2(q-1)}_{\mathfrak{H}^{\otimes(r-1)}}\right]^{\frac{1}{q-1}}\prod_{m=1}^{q-1}\left(\mathbb{E}[||D^mF_n||^{2k_m(q-1)}_{\mathfrak{H}^{\otimes m}}]\right)^{\frac{1}{q-1}}\\ &= ||g||^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(r-1)}}\prod_{m=1}^{q-1}||D^mF_n||^{2k_m}_{L^{2k_m(q-1)}(\Omega,\mathfrak{H}^{\otimes m})}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando el teorema 5, existe una constante $C_5 > 0$ tal que, para cualesquiera $m = 1, ..., q-1$, y $p \geq 2$, se tiene que

$$\begin{aligned}||D^mF_n||_{L^2(\Omega,\mathfrak{H}^{\otimes m})} &= ||D^m\delta^q(u_n)||_{L^p(\Omega,\mathfrak{H}^{\otimes m})}\\ &\leq ||\delta^q(u_n)||_{\mathbb{D}^{m,p}} \leq C_5||u_n||_{\mathbb{D}^{m+q,p}(\mathfrak{H}^{\otimes q})}.\end{aligned} \tag{2.73}$$

Por el paso 1, u_n está acotado en $\mathbb{D}^{k,p}(\mathfrak{H}^{\otimes q})$ para cualesquiera $k \leq 2q$ y $p \geq 2$. Por lo tanto, de la desigualdad (2.73), deducimos que existe una constante $K_2 > 0$ tal que

$$||D^mF_n||_{L^2(\Omega,\mathfrak{H}^{\otimes m},\mathbb{P})} \leq K_2,$$

para cualesquiera $m = 1, ..., q-1$, y $p \geq 2$. Esto implica, por la desigualdad (2.72), que

$$\mathbb{E}[|\langle u_n, \Phi_n \otimes \varepsilon_t\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}|] \leq Kn^{H(2-q)-\frac{1}{2}},$$

y ya que $q \geq 2$ (y consecuentemente $H(2-q) - \frac{1}{2} < 0$), se tiene que $n^{H(2-q)-\frac{1}{2}} \overset{n}{\longrightarrow} 0$. Por lo tanto, la sucesión

$$\left\langle u_n, (DF_n)^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes (D^{q-1}F_n)^{\otimes k_{q-1}} \otimes h\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}} = \langle u_n, \Phi_n \otimes \varepsilon_t\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}$$

converge a cero en $L^1(\Omega)$.

Supongamos ahora que $r = 0$. Entonces se tiene que $\Phi_n = (DF_n)^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes (D^{q-1}F_n)^{k_{q-1}}$, y por ende

$$\left\langle \partial^{\otimes q}_{j/n}, \Phi_n\right\rangle_{H^{\otimes q}} = \langle \partial_{j/n}, DF_n\rangle^{k_1}_H \cdots \left\langle \partial^{\otimes(q-1)}_{j/n}, D^{q-1}F_n\right\rangle^{k_{q-1}}_{H^{\otimes(q-1)}}.$$

Esto implica que

$$\langle u_n, \Phi_n\rangle_{H^{\otimes q}} = n^{qH-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n})\prod_{m=1}^{q-1}\left\langle \partial^{\otimes m}_{j/n}, D^mF_n\right\rangle^{k_m}_{H^{\otimes m}}. \tag{2.74}$$

Sea

$$\Psi^{m,j}_n := \left\langle \partial^{\otimes m}_{j/n}, D^mF_n\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes m}}. \tag{2.75}$$

Utilizando el Lema 15, podemos calcular los términos $D^m F_n$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
D^m F_n &= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \binom{q}{i} i! \delta^{q-i}(D^{m-i} u_n) \\
&= n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \binom{q}{i} i! \sum_{l=0}^{n-1} (\varepsilon_{l/n}^{\otimes(m-i)} \otimes \partial_{l/n}^{\otimes i}) \delta^{q-i}(f^{(m-i)}(B_{l/n}) \partial_{l/n}^{\otimes(q-i)}),
\end{aligned}$$

y de aquí se sigue que

$$\begin{aligned}
\Psi_n^{m,j} &= n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \binom{q}{i} i! \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{l,j}^{m-i} \beta_{l,j}^{i} \delta^{q-i}(f^{(m-i)}(B_{l/n}) \partial_{l/n}^{\otimes(q-i)}) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \Phi_n^{i,m,j}, \qquad (2.76)
\end{aligned}$$

donde los términos $\Phi_n^{i,m,j}$ están definidos por

$$\Phi_n^{i,m,j} = n^{qH-\frac{1}{2}} \binom{m}{i} \binom{q}{i} i! \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{l,j}^{m-i} \beta_{l,j}^{i} \delta^{q-i}(f^{(m-i)}(B_{l/n}) \partial_{l/n}^{\otimes(q-i)}). \qquad (2.77)$$

A continuación acotaremos la norma en $L^p(\Omega)$ de los términos $\Phi_n^{i,m,j}$. Utilizando nuevamente el lema 5, obtenemos

$$\begin{aligned}
&||\delta^{q-i}(f^{(q-i)}(B_{l/n}) \partial_{l/n}^{\otimes(q-i)})||_{L^p(\Omega)} \\
&\quad \leq C ||f^{(m-i)}(B_{l/n}) \partial_{l/n}^{\otimes(q-i)}||_{\mathbb{D}^{q-i,p}(H^{\otimes(q-i)})} \\
&\quad = C \left(\sum_{k=0}^{m-i} \mathbb{E}[||f^{(m-i+k)}(B_{l/n}) \varepsilon_{l/n}^{\otimes k} \otimes \partial_{l/n}^{\otimes(q-i)}||^p_{H^{\otimes(q-i+k)}}] \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-i} \mathbb{E}\left[\left| f^{(m-i+k)}(B_{l/n}) \right|^p \right] ||\varepsilon_{l/n}^{\otimes k} \otimes \partial_{l/n}^{\otimes(q-i)}||^p_{H^{\otimes(q-i+k)}} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.78) \\
&\quad \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-i} \mathbb{E}\left[\left| f^{(m-i+k)}(B_{l/n}) \right|^p \right] n^{-p(q-i)H} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \leq K n^{-(q-i)H},
\end{aligned}$$

para cierta constante $K > 0$. Por otro lado, si $i > 0$, podemos utilizar los incisos $b)$ y $g)$ del lema 17 (el inciso $g)$ puede aplicarse ya que $i > 0$) para obtener las desigualdades

$$\begin{aligned}
|\alpha_{l,j}^{m-i}| &\leq C n^{-2(m-i)H} \\
\sum_{l=0}^{n-1} |\beta_{l,j}^{i}| &\leq C n^{-2iH}. \qquad (2.79)
\end{aligned}$$

Sustituyendo las desigualdades 2.78 y 2.79 en 2.77, obtenemos la siguiente aproximación para la norma en $L^p(\Omega)$ de $\Phi_n^{i,m,j}$

$$||\Phi_n^{i,m,j}||_{L^p(\Omega)} \leq Cn^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{n-1} |\alpha_{l,j}^{m-i}\beta_{l,j}^{i}| n^{-2(q-i)H} \leq Cn^{-\frac{1}{2}-2mH+iH}. \tag{2.80}$$

Supongamos ahora que $i=0$. Utilizando el inciso (b), y desarrollando el término $||\delta^q(f^{(q)}(B_{l/n})\partial_{l/n}^{\otimes q})||_{L^p(\Omega)}$ de manera similar a la ecuación (2.78), obtenemos

$$\begin{aligned}
||\Phi_n^{0,m,j}||_{L^p(\Omega)} & \\
&\leq Cn^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{l,j}^{m} \left(\sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}[f^{(m+k)}(B_{l/n})^p] ||\varepsilon_{l/n}^{\otimes(k} \otimes \partial_{l/n}^{\otimes q}||_{\mathfrak{H}^{\otimes(q+k)}}^{p} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C'n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{l,j}^{m} ||\varepsilon_{l/n}||_{\mathfrak{H}}^{k} ||\partial_{l/n}||_{\mathfrak{H}}^{q} \\
&\leq C''n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{l,j}^{m} \left\langle \partial_{l/n}, \partial_{l/n} \right\rangle_{\mathfrak{H}}^{\frac{q}{2}} \\
&\leq C'''n^{qH-\frac{1}{2}-2mH-qH} \\
&\leq C'''n^{-2mH-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Teniendo estas cotas para $||\Phi_n^{0,m,j}||_{L^p(\Omega)}$, procedemos a aproximar a $||\Psi_n^{m,j}||_{L^p(\Omega)}$. Ya que $\sum_{k=1}^{q-1} k_m = q \geq 2$, existen al menos dos factores distintos de uno en el producto

$$\prod_{m=1}^{q-1} \left\langle \partial_{j/n}, D^m F_n \right\rangle_{H^{\otimes m}}^{k_m}. \tag{2.82}$$

Consecuentemente, podemos utilizar la ecuación (2.74) para expresar a $\langle u_n, \Phi_n \rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}$ en términos de las variables $\Psi_n^{m,j}$ (definidas por (2.75)) de la siguiente manera

$$\langle u_n, \Phi_n \rangle_{H^{\otimes q}} = n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} f(B_{j/n}) \Psi_n^{\mu,j} \Psi^{\nu,j} \Theta_n^j,$$

donde $1 \leq \mu, \nu \leq q-1$ son índices no necesariamente distintos y

$$\Theta_n^j := (\Psi_n^{\mu,j})^{k_\mu - 1} (\Psi_n^{\nu,j})^{k_\nu - 1} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq \mu,\nu}}^{q-1} (\Psi_n^{m,j})^{k_m}.$$

Utilizando la ecuación (2.76) para expresar al producto $\Psi_n^{\mu,j}\Psi^{\nu,j}$ en términos de las variables $\Phi_n^{i,j}$, podemos reescribir la ecuación (2.82) en la forma

$$\begin{aligned}\langle u_n, \Phi_n\rangle_{H^{\otimes q}} &= n^{qH-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{n-1} f(B_{j/n})\Psi_n^{\mu,j}\Psi^{\nu,j}\Theta_n^j \\ &= n^{qH-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{n-1} f(B_{j/n})\left(\sum_{i=0}^{\mu}\sum_{k=0}^{\nu}\Phi_n^{i,\mu,j}\Phi_n^{k,\nu,j}\Theta_n^j\right) \\ &= Q_n + P_n,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}Q_n &:= n^{qH-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{n-1} f(B_{j/n})\left(\sum_{i=0}^{\mu}\sum_{k=0}^{\nu}\mathbb{1}_{\{i+k\geq 1\}}\Phi_n^{i,\mu,j}\Phi_n^{k,\nu,j}\Theta_n^j\right) \\ P_n &:= n^{qH-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{n-1} f(B_{j/n})\Phi_n^{0,\mu,j}\Phi_n^{0,\nu,j}\Theta_n^j\end{aligned}$$

A continuación acotaremos la norma en $L^p(\Omega)$ de Q_n y P_n. A partir de la desigualdad (2.80), deducimos que

$$||\Psi_n^{m,j}||_{L^p(\Omega)} \leq Cn^{-mH}. \tag{2.83}$$

Utilizando la desigualdad de Hölder generalizada, y la desigualdad (2.83), obtenemos la siguiente cota para $\mathbb{E}[\Theta_n^j]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Theta_n^j] &= \mathbb{E}\left[\left|\Psi_n^{\mu,j}\right|^{k_\mu-1}\left|\Psi_n^{\nu,j}\right|^{k_\nu-1}\prod_{\substack{m=1\\ m\neq\mu,\nu}}^{q-1}\left|\Psi_n^{m,j}\right|^{k_m}\right] \\ &\leq C\mathbb{E}\left[\left|\Psi_n^{\mu,j}\right|^{(q-1)(k_\mu-1)}\right]^{\frac{1}{q-1}}\mathbb{E}\left[\left|\Psi_n^{\nu,j}\right|^{(q-1)(k_\nu-1)}\right]^{\frac{1}{q-1}}\times \\ &\prod_{\substack{m=1\\ m\neq\mu,\nu}}^{q-1}\mathbb{E}\left[\left|\Psi_n^{m,j}\right|^{(q-1)k_m}\right]^{\frac{1}{q-1}} \\ &= C\,||\Psi_n^{\mu,j}\,||_{L^{(q-1)(k_\mu-1)}(\Omega)}^{k_\mu-1}\,||\Psi_n^{\nu,j}\,||_{L^{(q-1)(k_\nu-1)}(\Omega)}^{k_\nu-1}\times \\ &\prod_{\substack{m=1\\ m\neq\mu,\nu}}^{q-1}||\Psi_n^{m,j}\,||_{L^{(q-1)(k_m-1)}(\Omega)}^{k_m} \\ &\leq Cn^{-H(q-\mu-\nu)}.\end{aligned} \tag{2.84}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder generalizada y las desigualdades (2.84), (2.80), (2.81) en la definición de Q_n , obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|Q_n|] &= n^{qH-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[f(B_{j/n})\left(\sum_{i=0}^{\mu}\sum_{k=0}^{\nu}\mathbb{1}_{\{i+k\geq 1\}}\Phi_n^{i,\mu,j}\Phi_n^{k,\nu,j}\Theta_n^j\right)\right]\\
&\leq Cn^{qH-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\mathbb{E}\left[\left|f(B_{j/n})\left(\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{k=1}^{\nu}\Phi_n^{i,\mu,j}\Phi_n^{k,\nu,j}\Theta_n^j\right)\right|\right]+\right.\\
&\quad \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\left|f(B_{j/n})\left(\sum_{k=1}^{\nu}\Phi_n^{0,\mu,j}\Phi_n^{k,\nu,j}\Theta_n^j\right)\right|\right]+\\
&\quad \left.\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\left|f(B_{j/n})\left(\sum_{i=1}^{\mu}\Phi_n^{i,\mu,j}\Phi_n^{0,\nu,j}\Theta_n^j\right)\right|\right]\right\},
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|Q_n|] &\leq C'n^{qH-\frac{1}{2}+1}\left\{\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{k=1}^{\nu}n^{1-2(\mu+\nu)H+(i+k)H-1}\times n^{-H(q-\mu-\nu)}+\right.\\
&\quad \left.\sum_{j=1}^{\nu}n^{1-2(\mu+\nu)+jH-1}\times n^{-(q-\mu-\nu)H}+\sum_{k=1}^{\mu}n^{1-2(\nu_\mu)+kH-1}\times n^{-(q-\mu-\nu)H}\right\},\\
&\leq C'n^{-\frac{1}{2}-(\mu+\nu)H}\left(\sum_{k=1}^{\nu}n^{Hk}\right)\left(\sum_{i=1}^{\mu}n^{Hi}\right)+\\
&\quad n^{-(\mu+\nu)H}\left(\sum_{i=1}^{\mu}n^{Hi}\right)+n^{-(\mu+\nu)H}\left(\sum_{j=1}^{\nu}n^{Hj}\right).
\end{aligned}$$

Es fácil verificar, a partir de la desigualdad anterior, que $\mathbb{E}[|Q_n|]$ es del orden de $n^{-\frac{1}{2}}$. Por lo tanto, Q_n converge a cero en $L^1(\Omega)$.

Para acotar al término P_n aplicamos la desigualdad de Hölder generalizada y las cotas 2.81, 2.84 en la definición de P_n , obteniendo así la desigualdad

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|P_n|] &\leq n^{qH-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}[|f(B_{j/n})|\Phi_n^{0,\mu,j}\Phi_n^{0,\nu,j}\Theta_n^j|]\\
&\leq n^{qH-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}[|f(B_{j/n})|^4]^{\frac{1}{4}}\mathbb{E}[|\Phi_n^{0,\mu,j}|^4]^{\frac{1}{4}}\mathbb{E}[|\Phi_n^{0,\nu,j}|]^{\frac{1}{4}}\mathbb{E}[|\Theta_n^j|^4]^{\frac{1}{4}}\\
&\leq Cn^{qH+\frac{1}{2}}n^{-2(\mu+\nu)H-1}n^{-H(q-\mu-\nu)}=Cn^{-(\mu+\nu)H-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que P_n converge a cero en $L^1(\Omega)$.

Veamos ahora que la condición $ii)$ del teorema 4 se satisface. Note que

$$\langle u_n, D^qF_n\rangle_{H^{\otimes q}}=n^{qH-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{n-1}f(B_{j/n})\left\langle\partial_{j/n}^{\otimes q},D^qF_n\right\rangle_{H^{\otimes q}}.$$

Utilizando la igualdad (2.76), y susituyendo el valor de $\Psi_n^{q,j}$, dado por (2.75), obtenemos

$$\left\langle \partial_{j/n}^{\otimes q}, D^q F_n \right\rangle_{H^{\otimes q}} = n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{q} \binom{q}{i}^2 i! \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{l,j}^{q-i} \beta_{l,j}^{i} \delta^{q-i} \left(B_{l/n} \partial_{l/n}^{\otimes(q-i)} \right).$$

De las igualdades anteriores se puede deducir la siguiente descomposición para $\langle u_n, D^q F_n \rangle_{H^{\otimes q}}$:

$$\langle u_n, D^q F_n \rangle_{H^{\otimes q}} = R_n + S_n + T_n,$$

donde

$$R_n = n^{2qH-1} q! \sum_{l,j=0}^{n-1} \beta_{l,j}^{q} f(B_{j/n}) f(l/n) \tag{2.85}$$

$$S_n = n^{2qH-1} \sum_{i=1}^{q-1} \binom{q}{i}^2 i! \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{l,j}^{q-i} \beta_{l,j}^{i} f(B_{j/n}) \delta^{q-i}(B_{l/n}) \partial_{l/n}^{\otimes(q-i)} \tag{2.86}$$

$$T_n = n^{2qH-1} \sum_{l,j=0}^{n-1} \alpha_{l,j}^{q} f(B_{j/n}) \delta^{q} (f^{(1)}(B_{l/n}) \partial_{l/n}^{\otimes q}). \tag{2.87}$$

El término R_n, como veremos a continuación, converge en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ a

$$q! \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho_H(k)^q \int_0^1 f(B_s)^2 \mathrm{d}s \right).$$

Para verificar dicha afirmación note que, gracias al inciso (c) del lema 17, se tiene que $\beta_{l,j}^i = 2^{-i} n^{-2Hi} \rho(l-j)^i$, y por ende,

$$\begin{aligned}
&R_n \\
&= \frac{q!}{2^q n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{j/n}) f(B_{j/n}) (|k-j+1|^{2H} + |k-j-1|^{2H} - 2|k-j|^{2H})^q \\
&= \frac{q!}{2^q n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{p=-j}^{n-1-j} f(B_{j/n}) f(B_{(j+p)/n}) (|p+1|^{2H} + |p-1|^{2H} - 2|p|^{2H})^q \\
&= \frac{q!}{2^q n} \sum_{p=-(n-1)}^{n-1} \sum_{j=0\vee(-p)}^{(n-1)\wedge(n-1-p)} f(B_{j/n}) f(B_{(j+p)/n}) (|p+1|^{2H} + |p-1|^{2H} - 2|p|^{2H})^q \\
&= \frac{q!}{2^q} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} (|p+1|^{2H} + |p-1|^{2H} - 2|p|^{2H})^q \sum_{j=0\vee(-p)}^{(n-1)\wedge(n-1-p)} f(B_{j/n}) f(B_{(j+p)/n}),
\end{aligned} \tag{2.88}$$

donde en la segunda igualdad se hizo el cambio de variable $p = k - j$, mientras que en la última igualdad se utilizó la notación $\sum_{j=i_1}^{i_2} a_j = 0$ si $i_2 < i_1$. Note que el término dentro de la segunda suma del lado derecho de la igualdad anterior tiende a $\int_0^1 f(B_s)\mathrm{d}s$ en $L^1(\Omega)$, para verificar esto note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=0\vee(-p)}^{(n-1)\wedge(n-1-p)} f(B_{j/n})f(B_{(j+p)/n}) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0\vee(-p)}^{(n-1)\wedge(n-1-p)} f(B_{j/n})^2\\ &+ \frac{1}{n}\sum_{j=0\vee(-p)}^{(n-1)\wedge(n-1-p)} (f(B_{(j+p)/n})-f(B_{j/n})). \qquad (2.89)\end{aligned}$$

Como las trayectorias de $\{B_t\}_{t\geq 0}$ son Hölder continuas con índice $\alpha < H$, y la función f pertenece a $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (y por ende, es Lipchitz en el intervalo $[0,1]$), concluimos que existe una constante $C(\omega) > 0$ tal que, para toda $p \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0\vee(-p)}^{(n-1)\wedge(n-1-p)} (f(B_{(j+p)/n})-f(B_{j/n}))\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{j=0\vee(-p)}^{(n-1)\wedge(n-1-p)} |(f(B_{(j+p)/n})-f(B_{j/n}))|\\ &\leq \frac{C}{n}\sum_{j=0\vee(-p)}^{(n-1)\wedge(n-1-p)} \frac{p^\alpha}{n^\alpha}\\ &= \frac{Cp^\alpha}{n^\alpha} \xrightarrow{n} 0. \qquad (2.90)\end{aligned}$$

A partir de las igualdades (2.89) y (2.90), es fácil mostrar que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0\vee(-p)}^{(n-1)\wedge(n-1-p)} f(B_{j/n})f(B_{(j+p)/n})$$

converge c.s. a $\int_0^1 f(B_s)^2\mathrm{d}s$. Más aún, la convergencia anterior se satisface también en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$, esto puede verificarse utilizando la convergencia casi segura, el teorema de convergencia dominada, y la condición **(H)**.

Resta mostrar que los términos S_n y T_n en la descomposición (2.85) convergen a cero en $L^1(\Omega)$. Utilizando las desigualdades (2.79) se obtiene $\sum_{l,j=0}^{n-1} |\alpha_{l,j}^{(q-i)H}\beta_{l,j}^{iH}| \leq Cn^{-2qH+1}$, y por lo tanto, gracias a la desigualdad (2.78) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_n|] &\leq Cn^{2qH-1}\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{l,j=0}^{n-1} |\alpha_{l,j}^{q-i}\beta_{l,j}^{i}|||\delta^{q-i}(f^{(q-i)}(B_{l/n})\partial_{l/n}^{\otimes(q-i)})||_{L^2(\Omega)}\\ &\leq C'n^{2qH-1}\sum_{i=1}^{q-1} n^{-2qH+1}n^{-(q-i)H}\\ &\leq C'n^{-qH}\times n^{-H}\left(\frac{1-n^{H(q-1)}}{1-n^H}\right) = o(n^{-H})\end{aligned}$$

El término $||T_n||_{L^p(\Omega)}$ puede acotarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|T_n|] &\leq n^{2qH-1}||\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{l,j}^q f(B_{j/n})\delta^q(f^{(1)}(B_{l/n})\partial_{l/n}^{\otimes q})||_{L^p(\Omega)} \\
&\leq Cn^{2qH-1}||\sum_{j=0}^{n-1}\Phi_n^{0,q,j}||_{L^p(\Omega)} \\
&\leq Cn^{2qH}||\Phi_n^{0,q,j}||_{L^p(\Omega)} = Cn^{2qH}n^{-2qH-\frac{1}{2}} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Esto termina la prueba.

□

Lema 18. *Suponga que $h \in H$ tiene norma unitaria. Entonces se cumple la siguiente igualdad*

$$q!H_q(W(h)) = \delta^q(h^{\otimes q}) \tag{2.91}$$

Demostración. Demostraremos el lema por inducción sobre q:

1. Si $q = 1$ el resultado es directo.

2. Si el resultado es cierto para q, veamos que se cumple para $q+1$. Para ello, basta verificar que para toda $F \in \mathbb{D}^{q+1,2}$ se cumple la igualdad

$$\mathbb{E}[\delta^{q+1}(h^{\otimes(q+1)})] = \mathbb{E}[(q+1)!H_{q+1}(W(h))F].$$

Comenzaremos verificando la igualdad anterior para variables F de la forma $F = f(W(h_1), ..., W(h_m))$, para cierta $m \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ infinitamente derivable, con derivadas de crecimiento polinomial. Por hipótesis de inducción se tiene que las variables $F_j := \frac{\partial}{\partial x_j} f(W(h_1), ..., W(h_m))$ satisfacen

$$\mathbb{E}[F_j\delta^q(h^{\otimes q})] = \mathbb{E}[F_j q!H_q(W())]. \tag{2.92}$$

Por lo tanto, se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\delta^{q+1}(h^{\otimes(q+1)})F] &= \mathbb{E}[\langle D^{q+1}, h^{\otimes(q+1)}\rangle_{H^{\otimes(q+1)}} F] \\
&= \sum_{j=1}^{m} \langle h_j, h\rangle_H \, \mathbb{E}[\langle D^q F_j, h^{\otimes q}\rangle_{H^{\otimes q}}] \\
&= \sum_{j=1}^{m} \langle h_j, h\rangle_H \, \mathbb{E}[F_j\delta^q(W(h^{\otimes q}))] \\
&= \sum_{j=1}^{m} \langle h_j, h\rangle_H \, \mathbb{E}[F_j q!H_q(W(h))] \\
&= \mathbb{E}[\langle DF, hq!H_q(W(h))\rangle_H] \\
&= \mathbb{E}[F\delta(hq!H_q(W(h)))].
\end{aligned}$$

y por la proposición 10, y las propiedades (1.3) de los polinomios de Hermite, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\delta^{q+1}(h^{\otimes(q+1)})F] &= q!\mathbb{E}[F(H_q(W(h))W(h) - D^h H_q(W(h)))] \\
&= \mathbb{E}[Fq!(H_q(W(h))W(h) - H_{q-1})] \\
&= \mathbb{E}[F(q+1)!H_{q+1}(W(h))].
\end{aligned}$$

La ecuación anterior se puede verificar para F general utilizando un argumento de aproximación.

□

Teorema 7. *Suponga que f es una función que satisface la hipótesis **(H)**. Considere la sucesión de variables aleatorias G_n definidas por* (2.40)*. Entonces, dado $H \in (\frac{1}{4q}, \frac{1}{2})$ se tiene que*

$$G_n - n^{-\frac{1}{2}-qH} \frac{(-1)^q}{2^q q!} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(q)}(B_{k/n}) \overset{establemente}{\longrightarrow} \sigma_{H,q} \int_0^1 f(B_s)dW_s, \tag{2.93}$$

donde $\{W_s\}_{s\geq 0}$ es un movimiento browniano independiente de $\{B_t\}_{t\geq 0}$, y $\sigma_{H,q}$ está definida por (2.43)*.*

Demostración. Por el lema 18 se tiene que

$$H_q(n^H(\Delta B_{k/n})) = \frac{1}{q!} n^{qH} \delta^q(\partial_{k/n}^{\otimes q}).$$

Entonces, utilizando el lema 13 obtenemos

$$f(B_{k/n})\delta^q(\partial_{k/n}^{\otimes q}) = \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} \alpha_{k,k}^r \delta^{q-r}(f^{(r)}(B_{k/n})\partial_{k/n}^{\otimes(q-r)}),$$

donde las constantes $\alpha_{i,j}$ está definido por (2.62). Consecuentemente

$$\begin{aligned}
G_n &= \frac{1}{q!} n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{q}\sum_{k=0}^{n-1} \binom{q}{r} \alpha_{k,k}^r \delta^q(f^{(r)}(B_{k/n})\partial_{k/n}^{\otimes(q-r)}) \\
&= \frac{1}{q!}\delta^q(u_n) + \sum_{r=1}^{q-1} \delta^{q-r}(v_n^{(r)}) + R_n,
\end{aligned}$$

donde u_n está definido por (2.60),

$$v_n^{(r)} = \frac{1}{q!} \binom{q}{r} n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,k}^r f^{(r)}(B_{k/n})\partial_{k/n}^{\otimes(q-r)},$$

y

$$R_n = \frac{1}{q!} n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,k}^q f^{(q)}(B_{k/n}).$$

La prueba se efectuará en dos pasos:

Paso 1. Mostraremos que para todo $H \in (0, \frac{1}{2})$, entonces, para $r = 1, ..., q-1$, $\delta^{q-r}(v_n^{(r)})$ converge a cero en $L^2(\Omega)$ cuando n tiende a infinito. Como consecuencia del teorema 5, para verificar esta afirmación basta mostrar que $v_n^{(r)}$ converge a cero en la norma de $\mathbb{D}^{q-r,2}(\mathfrak{H}^{\otimes(q-r)})$. Considere las variables $\beta_{i,j}$ definidas por (2.62), entonces, utilizando el lema 17 se tiene que para todo $0 \leq m \leq q-r$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[||D^m v_n^{(r)}||^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-r+m)}}] \\
&\quad \leq \left(\frac{1}{q!}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}\right)^2 n^{2qH-1} \times \\
&\quad \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,k}^r f^{(r)}(B_{k/n}) \partial_{k/n}^{\otimes(q-r)}, \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{l,l}^r f^{(r)}(B_{l/n}) \partial_{l/n}^{\otimes(q-r)} \right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-r+m)}} \\
&\quad \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,k}^r f^{(r)}(B_{k/n}) \partial_{k/n}^{\otimes(q-r)}, \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{l,l}^r f^{(r)}(B_{l/n}) \partial_{l/n}^{\otimes(q-r)} \right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes(q-r+m)}} \qquad (2.94) \\
&\quad = \left(\frac{1}{q!}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}\right)^2 n^{2qH-1} \sum_{k,l=0}^{n-1} \mathbb{E}[f^{(r+m)}(B_{k/n}) f^{r+m}(B_{l/n}) \alpha_{k,k}^r \alpha_{l,l}^r \alpha_{k,l}^m \beta_{k,l}^{q-r}] \\
&\quad \leq C n^{2qH-1} \sum_{k,l=0}^{n-1} \alpha_{k,k}^r \alpha_{l,l}^r \alpha_{k,l}^m \beta_{k,l}^{q-r} \leq C n^{2qH-1} \sum_{k,l=0}^{n-1} n^{-2Hr} n^{-2Hr} n^{-2Hm} \beta_{k,l}^{q-r} \\
&\quad \leq C n^{2qH-1} n^{-2H(2r+m)} n^{1-2(q-r)H} \to 0
\end{aligned}$$

Paso 2. Para completar la prueba basta verificar que

$$R_n - n^{-\frac{1}{2}-qH} \frac{(-1)^q}{2^q q!} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(q)}(B_{k/n})$$

converge a cero en $L^2(\Omega)$ cuando n tiende a infinito. Esto se sigue del inciso (d) del lema

17, y de la desigualdad

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{q!} n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,k}^{q} f^{(q)}(B_{k/n}) - \frac{(-1)^q}{2^q q!} n^{-\frac{1}{2}-qH} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(q)}(B_{k/n}) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad \leq \left\| \frac{1}{q!} n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_{k,k}^{q} - \frac{(-1)^q}{2^q q!} n^{-2qH} \right) f^{(q)}(B_{k/n}) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad \leq C \frac{1}{q!} n^{qH-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \alpha_{k,k}^{q} - \frac{(-1)^q}{2^q q! n^{2qH}} \right| \\
&\qquad \leq C n^{qH-\frac{1}{2}} n^{-2H(q-1)} = C n^{-qH+2H-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Como $H \in (\frac{1}{4q}, \frac{1}{2})$, el término $-qH + 2H - \frac{1}{2}$ en la igualdad anterior es estrictamente menor a cero, lo cual termina la prueba. $\square$

Apéndice A

Resultados de análisis funcional

Teorema 8 (Desigualdad de Hölder Generalizada). *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad. Suponga que* $r \in (0, \infty)$*, y* $p_1, ..., p_n \in (0, \infty]$ *son tales que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}.$$

Entonces, para cualesquiera variables aleatorias $X_1, ..., X_n$ *definidas en* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, se tiene que*

$$\left|\left|\prod_{k=1}^{n} X_k\right|\right|_r \leq \prod_{k=1}^{n} ||X_k||_{p_k}.$$

donde

$$||X||_p := \mathbb{E}\left[X^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad \text{si } p_{k<\infty}$$

y $||\cdot||_\infty$ *denota el supremo esencial. En particular, si* $X_k \in L^{p_k}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y* $r \geq 1$*, entonces* $\prod_{k=1}^{n} X_k \in L^r(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Demostración. Para demostrar el resultado utilizaremos inducción sobre n:

1. Para $n = 1$ el resultado es claro.

2. Supongamos que el resultado es válido para n. Sean $p_1, ..., p_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ tales que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $p_1 \leq p_2 \cdots \leq p_{n+1}$.

   a) Si $p_{n+1} = \infty$, entonces

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r},$$

   y por la hipótesis de inducción,

   $$\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} |X_k|^r\right]^{\frac{1}{r}} \leq \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} |X_k|^r\right]^{\frac{1}{r}}.$$

De aquí se deduce que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n+1}|X_k|^r\right]^{\frac{1}{r}} &\leq \mathbb{E}\left[||X_{n+1}||_\infty\prod_{k=1}^{n}|X_k|^r\right]^{\frac{1}{r}}\\ &\leq ||X_{n+1}||_\infty\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n}|X_k|^r\right]^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

b) si $p_{n+1} < \infty$ (y consecuentemente, todos los p_k son finitos) definimos

$$p := \frac{p_n}{p_n - r} \qquad \text{y} \qquad q := \frac{p_n}{r}.$$

Note que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, por lo que, gracias a la desigualdad de Hölder,

$$\left|\left|X_{n+1}^r\prod_{k=1}^{n}X_k^r\right|\right|_1 \leq \left|\left|\prod_{k=1}^{n}X_k^r\right|\right|_p \left|\left|X_{n+1}^r\right|\right|_q,$$

elevando a la potencia $\frac{1}{r}$ en ambos lados en la igualdad anterior obtenemos

$$\left|\left|\prod_{k=1}^{n+1}X_k\right|\right|_r \leq \left|\left|\prod_{k=1}^{n}X_k\right|\right|_{pr} ||X_{n+1}||_{qr}.$$

Como $qr = p_{n+1}$, y

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p_{n+1}} = \frac{p_n - r}{rp_n} = \frac{1}{pr},$$

por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\left|\left|\prod_{k=1}^{n+1}X_k\right|\right|_r \leq \left|\left|\prod_{k=1}^{n-1}X_k\right|\right|_{pr} ||X_{n+1}||_{qr} \leq \prod_{k=1}^{n}||X_{n+1}||_{p_{n+1}}||X_k||_{p_k}.$$

□

Teorema 9 (Descomposición Ortogonal). *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ un espacio de Hilbert y $W \subset V$ un subespacio lineal cerrado. Para todo $x \in V$ hay una representación única $x = y + z$, con $y \in W$ y $z \in W^\perp$.*

Demostración. Sea $x \in V$, $c = \text{ínf}\{||x - w||_V\ ;\ w \in W\}$ y sea $\{w_n\}$ una sucesión en W con $||x - w_n|| \to c$ cuando $n \to \infty$. Usando la ley del paralelogramo obtenemos

$$||w_m - w_n||_V^2 = 2||w_m - x||_V + 2||w_n - x||_V^2 - 4||\frac{1}{2}(w_m - w_n) - x||_V^2$$

Como W es un subsepacio lineal, $(w_m+w_n)/2 \in W$ y por lo tanto $||\frac{1}{2}(w_m+w_n)-x||_V \geq c$. Por lo tanto, $\{w_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy: $||w_m - w_n||_V \to 0$ si $m, n \to \infty$. Como

V es completo y W es cerrado, también es completo, de modo que existe $y \in W$ con $w_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Sea ahora $z = x - y$, entonces $||z||_V = \lim_n ||w_n - x||_V = c$ por la continuidad de la norma.

Consideremos un $w \in W\backslash\{0\}$ cualquiera. Definimos $\rho = -\langle z, w\rangle /||w||_V^2$ y tenemos $y + \rho w \in W$. En consecuencia

$$c^2 \leq ||x - (y + \rho w)||_V^2 = ||z||_V^2 + \rho^2||w||_V^2 - 2\rho \langle z, w\rangle_V = c^2 - \rho^2||w||_V^2$$

y en conclusión $\langle z, w\rangle_V = 0$ para todo $w \in W$ y por lo tannto $z \in W^{\perp}$.

Falta ver la unicidad en la descomposición. Si $x = y' + z'$ es otra descomposición ortogonal entonces $y - y'$ y $z - z' \in W^{\perp}$ y además $y - y' + z - z' = 0$. En consecuencia

$$\begin{aligned} 0 &= ||y - y' + z - z'||_V^2 = ||y - y'||_V^2 + ||z - z'||_V^2 + 2\langle y - y', z - z'\rangle_V \\ &= ||y - y'||_V^2 + ||z - z'||_V^2, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $y = y'$ y $z = z'$ □

Teorema 10 (**Teorema de extensión de Hahn Banach**). *Supongamos que M es un subespacio de cierto espacio vectorial X, que p es una seminorma en X, y que f es un funcional lineal en M tal que*

$$|f(x)| \leq p(x) \qquad \textit{para} \;\; x \in M.$$

Entonces f puede extenderse a un funcional lineal Λ en X que satisface

$$|\Lambda x| \leq p(x) \qquad \textit{para} \;\; x \in M.$$

Demostración. Para su prueba véase 1001[30] □

Apéndice B

Productos tensoriales

Sean U y V dos espacios vectoriales. El **producto tensorial** de U y V, el cual denotaremos por $U \otimes V$ es un espacio vectorial con la siguiente propiedad:

Existe una función bilineal $T : U \times V \longrightarrow U \otimes V$ tal que, si W es un espacio vectorial, y $A : U \times V \longrightarrow W$ es una función bilineal, entonces existe una transformación lineal $A' : U \otimes V \longrightarrow W$, tal que $A' \circ T$ coincide con A[1], es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, dash, "T"] \arrow[dr, dash, "A"'] & U \otimes V \arrow[d, dash, "A'"] \\ & W \end{tikzcd}$$

A la imagen de una pareja $(u, v) \in U \times V$ bajo T se le llama normalmente el **producto tensorial de los vectores u y v**, y se le denota por

$$u \otimes v := T(u, v).$$

La función T, con valores en el espacio $U \otimes V$, puede pensarse como la “función bilineal más general”, en el sentido de que toda función bilineal puede “factorizarse a través de $U \otimes V$”, es decir, toda función bilineal puede verse como composición de T, con una función lineal A' con dominio en $U \otimes V$. Es posible verificar que la pareja $(U \otimes V, T)$ es única salvo isomorfismos. A continuación se muestra una manera intuitiva de construir el espacio $U \otimes V$.

[1] Esta propiedad se conoce como “propiedad de universalidad”

Construcción del espacio tensorial

Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base de U y $\{f_j\}_{j\in J}$ una base de V. Entonces las funciones bilineales definidas en $U \times V$ (en particular la función T que queremos construir) están completamente determinadas por su valor en los elementos de la base $\{(e_i, f_j) \mid i \in I, j \in J\}$, es decir, si $u = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i e_i$ y $v = \sum_{j=1}^{N_2} \beta_j f_j$, entonces

$$T(u,v) \;=\; T\left(\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{N_2} \beta_j f_j\right) = \sum_{\substack{1\le i\le N_1\\ 1\le j\le N_2}} \alpha_i \beta_j T(e_i, f_j). \tag{B.1}$$

Por lo tanto, basta construir una base para definir al espacio $U \otimes V$, en cuyo caso T quedará completamente determinada por las cantidades $e_i \otimes f_j$. Para cada pareja (e_i, f_j), con $i \in I$ y $j \in J$, definimos los símbolos formales $e_i \otimes f_j$, a partir de los cuales definimos el conjunto

$$\mathcal{D} := \{e_i \otimes f_j \mid i \in I, j \in J\}$$

El espacio $U \otimes V$ lo definimos como el espacio vectorial con base $\mathcal{D}$. El mapeo T lo definiremos mediante

$$T(e_i, f_j) = e_i \otimes f_j \qquad i \in I, j \in J.$$

De esta manera se tiene que si $A : U \times V \longrightarrow W$ es una función bilineal, definimos la función lineal $A' : U \otimes V \longrightarrow W$ mediante

$$A'(e_i \otimes f_j) := A(e_i, f_j).$$

Definida de esta manera, la función A se factoriza a través de $U \otimes V$ mediante A', y por ende, el espacio $U \otimes V$ es una versión del espacio tensorial de U con V.

Producto tensorial simetrizado

En general podemos definir el producto tensorial de una colección finita de espacios vectoriales $V_1, ..., V_n$, el cual denotaremos por $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ mediante la siguiente recursión

$$\begin{aligned} W_2 &:= V_1 \otimes V_2 \\ W_k &:= W_{k-1} \otimes V_k \qquad\qquad 2 \le k \le n-1 \\ V_1 \otimes \cdots \otimes V_n &:= W_{n-1} \otimes V_n. \end{aligned}$$

Introduciremos a continuación el concepto de simetrización de un producto tensorial

Definición 9. *Sean $V_1, ..., V_n$ espacios vectoriales y sea $\left\{e_i^k\right\}_{i\in I_k}$ una base para V_k, $1 \le k \le n$. Definimos la simetrización de un elemento $x \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ de la forma*

$$x = \sum_{\substack{1\le i_1\le N_1\\ \cdots \\ 1\le i_n\le N_n}} a_{i_1,\ldots,i_n} e^1_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^n_{i_n},$$

para $N_1, ..., N_n \in \mathbb{N}$, *y para ciertos escalares* $a_{i_1,...,i_n}$ *de la siguiente manera*

$$symm(x) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq N_1 \\ \cdots \\ 1 \leq i_n \leq N_n}} a_{i_{\sigma(1)},...,i_{\sigma(n)}} e^1_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e^n_{i_{\sigma(n)}}.$$

En ocasiones también denotaremos a $symm(x)$ *mediante* $\widehat{x}$. *Diremos que* x *es un* ***vector simétrico*** *si* $x = symm(x)$, *y denotaremos por*

$$V_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} V_n$$

al conjunto de todos los vectores en $V_1 \otimes \cdots V_n$ *que son simétricos.*

Productos tensoriales de espacios de Hilbert

Si $H_1, ..., H_n$ son espacios de Hilbert con productos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1}, ..., \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_n}$ respectivamente. Entonces $H_1 \otimes \cdots H_n$ también tiene estructura de espacio de Hilbert, con producto interno dado por

$$\langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \rangle_{H_1 \otimes \cdots \otimes H_n} := \prod_{k=1}^{n} \langle v_k, w_k \rangle_{H_k}.$$

Por ejemplo, si $H_k = L^2(X_k, \mathcal{X}_k, \mu_k)$ para ciertos espacios de medida $(X_k, \mathcal{X}_k, \mu_k)$, $1 \leq k \leq n$, es fácil verificar que el producto tensorial $H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$ es isomorfo al espacio $L^2(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{X}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{X}_n, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)$ (donde $\mathcal{X}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{X}_n$ denota a la σ-álgebra producto y $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ denota a la medida producto) mediante el mapeo

$$\begin{aligned} H_1 \otimes \cdots \otimes H_n &\longrightarrow L^2(X_1 \times \cdots X_n, \mathcal{X}_1 \otimes \cdots \mathcal{X}_n, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n) \\ h_1 \otimes \cdots \otimes h_n &\longmapsto \prod_{k=1}^{n} h_k, \end{aligned}$$

donde $\prod_{k=1}^n h_k : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$ está definida por $\prod_{k=1}^n h_k(x_1, ..., x_n) = \prod_{k=1}^n h_k(x_k)$. Más aún, el producto interno de $H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$ está dado por

$$\begin{aligned} &\langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \rangle_{H_1 \otimes \cdots \otimes H_n} \\ &\qquad = \prod_{k=1}^{n} \langle v_k, w_k \rangle_{H_k} \\ &\qquad = \int_{X_1} \cdots \int_{X_n} \prod_{k=1}^{n} v_k(x_k) w_k(x_k) \mu_n(\mathrm{d}x_n) \mu_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1}) \cdots \mu(\mathrm{d}x_1). \end{aligned}$$

Bibliografía

[1] Francesca Biagini, Yaozhong Hu, Bernt Øksendal, and Tusheng Zhang. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag London Ltd., London, 2008.

[2] Philippe Carmona and Laure Coutin. Fractional Brownian motion and the Markov property. *Electron. Comm. Probab.*, 3:95–107 (electronic), 1998.

[3] L. Decreusefond and A. S. Üstünel. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion. *Potential Anal.*, 10(2):177–214, 1999.

[4] Giulia Di Nunno, Bernt Øksendal, and Frank Proske. *Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[5] Helge Holden, Bernt Øksendal, Jan Ubøe, and Tusheng Zhang. *Stochastic partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2010. A modeling, white noise functional approach.

[6] Nobuyuki Ikeda and Shinzo Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*, volume 24 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1989.

[7] Jean Jacod and Albert N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[8] Ju. M. Kabanov and A. V. Skorohod. Extended stochastic integrals. In *Proceedings of the School and Seminar on the Theory of Random Processes (Druskininkai, 1974), Part I (Russian)*, pages 123–167. Inst. Fiz. i Mat. Akad. Nauk Litovsk. SSR, Vilnius, 1975.

[9] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[10] Shigeo Kusuoka and Daniel Stroock. Applications of the Malliavin calculus. I. In *Stochastic analysis (Katata/Kyoto, 1982)*, volume 32 of *North-Holland Math. Library*, pages 271–306. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[11] Shigeo Kusuoka and Daniel Stroock. Applications of the Malliavin calculus. II. *Journal of the Faculty of Science. University of Tokyo. Section IA. Mathematics*, 32(1):1–76, 1985.

[12] Shigeo Kusuoka and Daniel Stroock. Applications of the Malliavin calculus. III. *Journal of the Faculty of Science. University of Tokyo. Section IA. Mathematics*, 34(2):391–442, 1987.

[13] Stanisław Kwapień and Wojbor A. Woyczyński. *Random series and stochastic integrals: single and multiple*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

[14] Paul Malliavin. Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators. In *Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976)*, pages 195–263, New York, 1978. Wiley.

[15] Paul Malliavin. *Stochastic analysis*, volume 313 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[16] Paul Malliavin and Anton Thalmaier. *Stochastic calculus of variations in mathematical finance*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[17] Ivan Nourdin. Asymptotic behavior of weighted quadratic and cubic variations of fractional Brownian motion. *Ann. Probab.*, 36(6):2159–2175, 2008.

[18] Ivan Nourdin and David Nualart. Central limit theorems for multiple Skorokhod integrals. *J. Theoret. Probab.*, 23(1):39–64, 2010.

[19] Ivan Nourdin, David Nualart, and Ciprian A. Tudor. Central and non-central limit theorems for weighted power variations of fractional Brownian motion. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 46(4):1055–1079, 2010.

[20] Ivan Nourdin and Giovanni Peccati. Stein's method on Wiener chaos. *Probab. Theory Related Fields*, 145(1-2):75–118, 2009.

[21] Ivan Nourdin, Giovanni Peccati, and Gesine Reinert. Invariance principles for homogeneous sums: universality of Gaussian Wiener chaos. *Ann. Probab.*, 38(5):1947–1985, 2010.

[22] Ivan Nourdin and Anthony Réveillac. Asymptotic behavior of weighted quadratic variations of fractional Brownian motion: the critical case $H = 1/4$. *Ann. Probab.*, 37(6):2200–2230, 2009.

[23] D. Nualart and S. Ortiz-Latorre. Central limit theorems for multiple stochastic integrals and Malliavin calculus. *Stochastic Process. Appl.*, 118(4):614–628, 2008.

[24] David Nualart. Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications. In *Stochastic models (Mexico City, 2002)*, volume 336 of *Contemp. Math.*, pages 3–39. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[25] David Nualart. *The Malliavin calculus and related topics.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.

[26] David Nualart and Giovanni Peccati. Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals. *Ann. Probab.*, 33(1):177–193, 2005.

[27] Nobuaki Obata. *White noise calculus and Fock space*, volume 1577 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[28] Steven Roman. The formula of Faà di Bruno. *Amer. Math. Monthly*, 87(10):805–809, 1980.

[29] Steven Roman. *Advanced linear algebra*, volume 135 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, third edition, 2008.

[30] Walter Rudin. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.

[31] Marta Sanz-Solé. *Malliavin calculus.* Fundamental Sciences. EPFL Press, Lausanne, 2005. With applications to stochastic partial differential equations.

[32] A. V. Skorohod. On a generalization of the stochastic integral. *Teor. Verojatnost. i Primenen.*, 20(2):223–238, 1975.

Índice alfabético