CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Construcción y Comportamiento Asintótico del Superbrowniano

T E S I S

Que para obtener el Grado de:

Maestro en Ciencias con Orientación en Probabilidad y Estadística

P R E S E N T A:

Ma. Elena Hernández Hernández

Director:

Dr. José Alfredo López Mimbela

Guanajuato, Guanajuato, México

20 Julio de 2011

Integrantes del jurado

Presidente: Dr. Antonio Murillo Salas
Secretario: Dr. José Villa Morales
Vocal y director de la tesis: Dr. José Alfredo López Mimbela

Director de Tesis:

Dr. José Alfredo López Mimbela.

Con todo mi amor y agradecimiento dedico este trabajo
A mis padres, Enedina y Ascención.

"No quiero continuar teniendo la voluntad libre.
Porque el libre no tiene tal libertad,
y el inactivo no por serlo escapa al error.
Sólo quien es útil es libre:
quien da su voluntad a otro y su energía a una labor,
y trabaja sin querer saber más.
Sólo la parte media del acto es labor nuestra.
Su comienzo y su fin, su causa y su efecto, son de los dioses.
Hazme libre de mi voluntad,
porque todo querer es confusión y todo servicio sabiduría".

Stefan Zweig, *Los Ojos del Hermano Eterno*

Este trabajo forma parte del proyecto Conacyt No. 157772 “Sistemas Estocásticos No Lineales”, dirigido por el Dr. José Alfredo López Mimbela.

Agradecimientos

"Vosotros los eruditos y artistas
tenéis toda clase de cosas extrañas en la cabeza,
pero sois hombres como los demás,
y también nosotros poseemos nuestros sueños
y nuestros juegos en la mente".

Hermann Hesse, *El Lopo Estepario*

A mis padres, Enedina y Ascención,
porque han sido el principal apoyo para alcanzar cada una de mis metas, porque con su amor y confianza han sido mi guía en la búsqueda diaria por ser una mejor persona.

A mis hermanos, Liliana, Homero, Ma. Isabel, Evelina, Alvaro y Aurora,
porque a pesar de la distancia han procurado la unión familiar. Porque no han dejado de creer en mí y porque en todo momento me han alentado para alcanzar mis metas.

A mi amigo Nabucodonosor Solís,
por la amistad sincera e incondicional que me ha brindado misma que ha constituido uno de mis principales respaldos en los últimos años.

A mi amigo Adrián Espínola,
porque con su apoyo me ha dado la confianza para plantearme nuevas metas. Porque su amistad, orientación y consejos han sido fundamentales para los nuevos proyectos académicos.

A la familia Velazquez-Balderas, en particular a Ma. Dolores B., Ricardo V. y Marisol V.,
por la confianza que me brindaron al abrirme las puertas de su casa permitiéndome una agradable estancia en Guanajuato y porque me dieron la oportunidad de compartir gratos momentos dentro de su familia.

Al Dr. José Alfredo López Mimbela,
porque como tutor y profesor constituyó una pieza clave en mi desarrollo académico. Mi más profundo agradecimiento por brindarme su confianza, tiempo e infinita paciencia durante el desarrollo de este trabajo.

A Abelardo, Dialid, Ehyter, Manuel y Nohemi
por brindarme su amistad en todo este tiempo; por los consejos y por cada uno de los momentos compartidos dentro y fuera de las aulas.

A María, Yuriria y Pablo
porque a pesar del poco tiempo de convivencia me brindaron su confianza, amistad y apoyo tanto académica como moralmente, y aún más importante, porque me recordaron el espíritu de compañerismo.

A Soraya, Héctor, Jaime, Ociel y Rubén
por haber compartido conmigo actividades culturales y extra-académicas de las cuales la Casa de Cultura y el Museo Iconográfico de Guanajuato, son testigos.

A mis sinodales, Dr. Antonio Murillo Salas y Dr. José Villa Morales, porque destinaron parte de su tiempo para la revisión de este trabajo, haciéndome sugerencias y aportaciones que contribuyeron a la mejora del mismo.

A los profesores de CIMAT que fueron parte fundamental para mi formación académica, y en particular al Dr. Fernando Galaz Fontes porque constituye un ejemplo claro (y a veces difícil de encontrar) de sabiduría y humildad en el campo docente y de investigación.

A la población mexicana,
porque hace posible la existencia de becas de posgrado, de las cuales la beca No. 41705 me fue otorgada vía el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Índice general

Introducción

Un superproceso puede concebirse como un proceso de Markov que toma valores en un espacio de medidas, y que emerge como límite de difusión de poblaciones infinitas sujetas a ramificación y difusión espacial aleatorias. Varios de los ingredientes fundamentales para la construcción de un superproceso, entre ellos la ramificación con estado continuo, aparecieron en algunos trabajos tempranos debidos a Feller [21] y Jirina [35]. Los contribuciones pioneras de Watanabe [53] y de Dawson [7] quienes, respectivamente, proporcionaron una construcción rigurosa del superbrowniano y un estudio de su comportamiento asintótico en el contexto de ecuaciones diferenciales parciales, sentaron las bases para un desarrollo sostenido de esta teoría.

El superbrowniano, y más generalmente, el superproceso de Dawson-Watanabe, es un proceso de Markov cuyos valores son las medidas de Radon no negativas sobre R^d, y cuyo estado inicial es la medida de Lebesgue en dicho espacio. El superbrowniano y sus variantes se obtienen como límites “de alta densidad, vida media corta y masa pequeña” de modelos clásicos de poblaciones ramificadas [9], en particular, de caminatas aleatorias con ramificación crítica, o bien de movimientos brownianos ramificados críticos, y aun más generalmente, de movimientos α-estables simétricos ramificados, $0 < \alpha \leq 2$, donde el caso $\alpha = 2$ corresponde al superbrowniano. Uno de los primeros resultados sobre este tipo de modelos es que su distribución queda determinada por una ecuación diferencial parcial no lineal, la cual gobierna al comportamiento de sus —así llamados— funcionales log-Laplace. Además de caracterizar la distribución de un superproceso, el funcional log-Laplace es una herramienta muy útil para investigar el comportamiento límite, cuando $t \to \infty$, del correspondiente superproceso.

Un método alternativo para definir y determinar un superproceso es el de caracterizarlo como solución a un problema de martingala, de manera similar a como lo hicieron Strock y Varadahn [50] en el caso de difusiones clásicas. Estudios recientes han mostrado que el superbrowniano y variantes de éste, emergen como límite de una gran cantidad de modelos de sistemas de partículas (reescalados apropiadamente), tales como procesos de contacto, el modelo de votantes y cierto tipo de difusiones [5], [12], [13], [6]. De igual modo, es posible obtener una construcción explícita mediante serpientes brownianas [41].

Tomando en consideración lo anterior, un primer acercamiento a esta teoría exige el conocimiento de una amplia variedad de herramientas probabilísticas y analíticas, entre ellas teoría de semigrupos de Markov, convergencia débil en espacios métricos, algunos resultados analíticos de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, así como cálculo estocástico. Estos tópicos no suelen ser parte de cursos de probabilidad y procesos estocásticos estándar, y aún cuando existe una vasta cantidad de material para el estudio de cada disciplina, en general no se encuentra concentrado de modo que se pueda dar una lectura sin tener que recurrir a la búsqueda de otras fuentes. Es por ello que el propósito primordial de este trabajo, es el de proveer al lector interesado en una primera aproximación a esta teoría, de un documento en el cual se presente de manera clara y precisa los resultados relevantes para la construcción de uno de los modelos más ricos y representativos de la teoría de superprocesos: el superbrowniano.

Debido a que el superbrowniano es un caso particular del super proceso de Dawson-Watanabe, el propósito y objetivos particulares de esta tesis son los siguientes:

1. Presentar la construcción de un superproceso de Dawson-Watanabe como límite de movimientos α-estables simétricos ramificados.
2. Exhibir la caracterización de dicho proceso como solución a un problema de martingala bien planteado.
3. Enunciar el resultado básico sobre persistencia de dicho proceso, cuando $t \to \infty$.

Debido a la amplia variedad de resultados previos requeridos para dar la prueba de convergencia al superproceso de interés, únicamente la prueba de dicha convergencia se hace de manera detallada. Para el resto de temas tratados, que escencialmente corresponden a medidas de Radon en espacios localmente compactos, convergencia débil en espacios métricos y problemas de martingala, en general no se darán demostraciones, pero se remitirá al lector a las fuentes en las cuales se puede profundizar en detalles y en las demostraciones sobre los diferentes tópicos tratados.

Se considera que el aporte de esta tesis, no es más que el de constituir una recopilación de los resultados más importantes para comprender la construcción y caracterización de superprocesos clásicos. Así, para cubrir los objetivos mencionados, el trabajo ha sido estructurado en seis capítulos.

El capítulo 1 introduce conceptos preliminares sobre el espacio de medidas de Radon y sus subespacios de interés, como lo son las medidas de Radon finitas, las medidas de contar y las medidas temperadas. También se definen los conceptos de medida aleatoria y de procesos estocásticos con valores medidas. La bibliografía básica de este apartado corresponde a [34], [38] y [32].

El capítulo 2 contiene teoría referente a sistemas de partículas Markovianos ramificados, mismos que son procesos estocásticos de Markov con valores en el espacio de medidas de contar. También se establece la caracterización de tales procesos vía su funcional de probabilidades de transición, la cual, en términos del funcional generador de probabilidades (FGP), se transforma en la denominada ecuación de Moyal. Se finaliza con algunos resultados básicos sobre procesos de Markov y problema de la martingala. Otro tema importante que se introduce en este capítulo es la ecuación de Skorohod, la cual es un caso particular de la ecuacion de Moyal. El desarrollo de este material corresponde principalmente a las referencias [44], [45] y [18].

El capítulo 3 se centra en presentar aquellos aspectos del movimiento α-estable simétrico ramificado (MR^{α}) que son relevantes para los propósitos planteados. En particular, se dan tanto la definición heurística clásica del MR^{α}, así como su caracterización vía la ecuación de Skorohod, introducida en el Capítulo 1. Se determina su funcional log-Laplace, y se hace uso de éste para obtener la medida primer momento, es decir, la medida de intensidad del proceso. Debido a que los procesos de ramificación usados son procesos de Markov, se presentan los resultados y los cálculos necesarios para obtener el generador infinitesimal de las dinámicas de ramificación y migración de éstos. Tales resultados serán requeridos para la caracterización del superproceso vía problemas de martingala. La bibliografía corresponde a [17] y [49].

Un paso crucial es demostrar la compacidad relativa de los procesos aproximantes en el espacio de Skorokhod de funciones *càdlàg*, con valores en las medidas temperadas. Con este fin, el capítulo 4 se ha centrado en proporcionar los resultados generales sobre convergencia débil en espacios métricos, haciendo énfasis en lo referente a convergencia débil cuando tales espacios son espacios de funciones. La bibliografía utilizada principalmente corresponde a [1], [18] y [40].

Con la herramienta teórica introducida en éstos primeros capítulos, en el Capítulo 5 se presenta a detalle la demostración de que el superproceso en cuestión surge como límite de difusión de movimientos α-estables ramificados. De igual modo, se presenta la caracterización vía problema de la martingala de éste superproceso. La fuente bibliográfica corresponde a [49]. Se finaliza con el Capítulo 6, en el cual se incluye el resultado básico sobre persistencia en grandes dimensiones del superproceso de Dawson-Watanabe, donde se siguió la prueba dada en [54].

Notación

Símbolo	**Significado**
$\mathbb{N}$	$\{1,2,3,...\}$
$\mathbb{Z}^+$	$\{0,1,2,\ldots\}$
$\mathbb{Q}^+$	Número racionales no-negativos.
$\mathbb{R}^d$	espacio euclideano $d-$dimensional, $d \in \mathbb{N}$
$C(G)$	funciones continuas de G en $\mathbb{R}$
$C_K(G)$	$\{f \in C(G),\ \text{con soporte compacto}\}$
$C_b(G)$	$\{f \in C(G),\ \text{acotadas}\ \}$ con la norma del supremo
$\mathbf{M}(G)$	$\{f : G \to \mathbb{R} : f\ \text{medible}\}$
$C_b^u(G)$	funciones continuas y uniformemente acotadas, definidas en G
$B_b(G)$	$\{f \in \mathbf{M}(G),\ \text{acotada}\ \}$
$C_0^\infty(G)$	$\{f \in C(G) : \text{lím}_{\lvert x\rvert \to \infty} f(x) = 0\}$, es decir es el espacio de funciones continuas que se anulan en infinito.
φ_p	$\frac{1}{(1+\lvert x\rvert^2)^p}$
$C_{K,p}(G)$	$C_K(G) \bigcup \{\varphi_p\}$
$\mathcal{M}_p \equiv \mathcal{M}_p(G)$	$\{\mu \in \mathcal{M}(G) : \mu\varphi_p < +\infty\}$
$\dot{\mathbb{R}}^d := \mathbb{R}^d \cup \{\tau_p\},\ p > 0$	compactificación de Watanabe de $\mathbb{R}^d$, donde τ_p es un punto aislado.
$\dot{\varphi}_p(x)$	$\varphi_p(x)\mathbb{I}_{\mathbb{R}^d}(x) + \mathbb{I}_{\{\tau_p\}}(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.
$K_p(\mathbb{R}^d)$	$C_0(\dot{\mathbb{R}}^d) \cup \{\varphi_p\}$
$K_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$	$C_0(\dot{\mathbb{R}}^d) \cup \{\dot{\varphi}_p\}$
$C_0(\dot{\mathbb{R}}^d)$	extensión de $C_0(\mathbb{R}^d)$, resultante de hacer $f(\tau_p) = 0$, $\forall f \in C_0(\mathbb{R}^d)$.
$\mathfrak{B}(G)$	$\sigma-$álgebra de Borel de subconjuntos de G.
$\mathcal{B}$	$\{B \in \mathfrak{B}(G) \vert B\ \text{es relativamente compacto}\}$
$C_{\mathbb{E}}$	$\{f : [0,\infty) \to \mathbb{E}, f\ \text{continua}\}$ espacio polaco de funciones continuas con la topología de convergencia uniforme en compactos.
$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(G)$	espacio de medidas de Radon sobre G.
$\mathcal{M}_F \equiv \mathcal{M}_F(G)$	espacio de medidas finitas de Radon sobre G.
$\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_1(G)$	espacio de medidas de probabilidad de Radon sobre G.
$\mathcal{M}_{\leq 1} \equiv \mathcal{M}_{\leq 1}(G)$	espacio de medidas de sub-probabilidad de Radon sobre G.
$\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$	$\{\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) : \langle \mu, \varphi_p \rangle < +\infty\}$
$\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$	$\{\mu \in \mathcal{M}(\dot{\mathbb{R}}^d) : \langle \mu, \varphi_p \rangle + \mu(\tau_p) < +\infty\}$
$\mathcal{M}_T \equiv \mathcal{M}_T(G)$	espacio de medidas temperadas sobre G, $p > 0$.
$\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}(G)$	espacio de medidas de Radon con valores en $\mathbb{Z}^+$ (medidas puntuales).

$\mathfrak{M}$	σ–álgebra de Borel de $\mathcal{M}$.
$\mathfrak{N}$	σ–álgebra de Borel de $\mathcal{N}$.
$<\mu, f>$	$\int f(s)d\mu(x)$, $\forall f \in \mathbf{M}^+$.
Pf	$\int f dP = < P, f >$, para P medida de probabilidad.
$(f\mu)(A)$	$\int_A f d\mu$, $\forall f \in \mathbf{M}^+$.
$\psi_X(\cdot)$	función generadora de momentos de X.
$L_\xi(\cdot)$	transformada de Laplace de la medida aleatoria ξ.
$G_\xi(\cdot)$	funcional generador de probabilidades de la medida aleatoria ξ.
$G_t(\cdot\vert\mu)$	funcional generador de probabilidades del proceso $\{N_t\}$, con estado inicial μ .
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	conjunto de funciones infinitamente diferenciables y rapidamente decrecientes en $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$	distribuciones de Shwartz (dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).
$\mathcal{P}(S)$	$\{\mu : (S, \mathfrak{B}(S)) \to [0,1] : \mu$ medida de probabilidad$\}$.
$\mathcal{F}_t^X$	$\sigma(X_r, 0 \leq r \leq t)$.
C	$\{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f$ continua$\}$
$C(\mathbb{R}^+, E)$	$\{f : \mathbb{R}^+ \to E, f$ continua$\}$
D	$\{f : [0,1] \to \mathbb{R},$ f es càdlàg$\}$
$D(\mathbb{R}^+, E)$	$\{f : \mathbb{R}^+ \to E,$ f es càdlàg$\}$, es decir, es el espacio de Skorohod de trayectorias con valores en E, con la topología J_1- de Skorohod
D_∞	$D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$
$P(s, x, t, \Gamma)$	$\mathbb{P}(X_t \in \Gamma \vert X_s = x)$.
Δ	$\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, el Laplaciano
Δ_α	$-(-\Delta)^{\alpha/2}$, potencia fraccionaria del Laplaciano. Generador infinitesimal de un proceso α-estable esféricamente simétrico en $\mathbb{R}^d$.
$\mathbb{I}$	es la función identidad en $\mathbb{R}^d$.
$f(t) \sim g(t), t \to \infty$	significa que $\text{lím}_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$.
$a_n = \circ(b_n)$	$\text{lím}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
$a_n = \bigcirc(b_n)$	$\vert a_n\vert < M\vert b_n\vert$, para algún $M > 0$.
$c.s$	casi seguramente
$:=$	igual por definición
$a \wedge b$	$\text{mín}(a, b)$
$\blacksquare$	fin de demostración.
$\Rightarrow$	convergencia débil.
c.s	casi seguramente
MBR	Movimiento Browniano Ramificado
MR^α	Movimiento α-estable Ramificado, $0 < \alpha \leq 2$.
$MR^\alpha R$	Movimiento α-estable Ramificado Reescalado
SPM	Sistema de Partículas Markoviano
SPMM	Sistema de Partículas Markoviano Multiplicativo
DDF	Distribuciones de Dimensión Finita

Para los espacios de funciones, cuando los elementos son no-negativos, se indicará por el superíndice +, por ejemplo $C_K^+(G)$.

Capítulo 1

Preliminares

Típicamente los superprocesos surgen como límites de difusión de sistemas de partículas ramificadas, los cuales son procesos con valores en espacios de medidas. El propósito de este capítulo es el de brindar la herramienta teórica necesaria referente al espacio de medidas sobre el cual tomarán valores los procesos en cuestión. Este apartado tiene como base bibliográfica el material contenido en [34], [38] y [32].

1.1. Espacio de Medidas de Radon

En adelante G denotará un espacio topológico, Hausdorff y localmente compacto. Además, se supondrá que G tiene base numerable. Puede demostrarse que lo anterior implica que G es un espacio ***polaco*** (es decir, G es un espacio métrico, separable y completo) y σ-compacto, es decir, existe una familia $\{K_i\}_{i\geq 1}$ tal que

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i, \qquad K_i \text{ es compacto y } K_i \subset \mathrm{Int}K_{i+1}, \forall i. \tag{1.1}$$

Definición 1. *Un conjunto $A \subset G$, se dice* ***acotado*** *o* ***relativamente compacto*** *si su cerradura, $\bar{A}$, es un conjunto compacto.*

Notación. Si M es un espacio topológico, $\mathfrak{B}(M)$ denotará la $\sigma-$álgebra de Borel de M, es decir, la mínima $\sigma-$álgebra que contiene a los abiertos de M, y $\mathcal{B}$ a la familia de subconjuntos de $\mathfrak{B}(M)$ que son relativamente compactos.

Definición 2. *Una medida μ en el espacio medible $(G, \mathfrak{B}(G))$ es de* ***Borel-Radon*** *(o localmente finita) si $\mu(B) < +\infty$, $\forall B \in \mathcal{B}$.*

El espacio de medidas de Radon sobre $(G, \mathfrak{B}(G))$ se denotará por $\mathcal{M}$ o $\mathcal{M}(G)$.

Definición 3. *Una medida $\mu \in \mathcal{M}(G)$ se dice* ***difusa*** *si $\mu(\{x\}) = 0, \quad \forall x \in G$.*

El espacio de medidas de Radon da lugar a los subespacios siguientes:

a) $\mathcal{M}_F \equiv \mathcal{M}_F(G) := \Big\{\mu : \mu \in \mathcal{M} \text{ y } \mu \text{ finita}\Big\}$.

b) $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_1(G) := \Big\{\mu : \mu \in \mathcal{M} \text{ y } \mu \text{ es una medida de probabilidad}\Big\}$.

c) $\mathcal{M}_{\leq 1} \equiv \mathcal{M}_{\leq 1}(G) := \Big\{\mu : \mu \in \mathcal{M} \text{ y } \mu \text{ es una medida de sub-probabilidad}\Big\}$.

d) $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}(G) := \Big\{\mu \in \mathcal{M} : \mu \text{ es } Z^+ \text{ -valuada}\Big\}$.

e) $\mathcal{M}_T \equiv \mathcal{M}_T(G) := \Big\{\mu \in \mathcal{M} : \exists\, p \geq 0 \quad \text{tal que } \int (1+|x|^2)^{-p}\mu(dx) < \infty\Big\}.$

Si un resultado se establece para el caso particular $G = \mathbb{R}^d$ se indicará explícitamente por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$, etc. En caso contrario, se usará la notación anterior ($\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_F$, etc.), para la cual se asume la existencia de un espacio G que satisface las condiciones establecidas al inicio de esta sección.

Nota 1. *Más adelante se verá que las propiedades de separabilidad y completez del espacio G, son necesarias para garantizar existencia de procesos, por lo que para los fines de este trabajo bastará pedir éstas propiedades a G.*

1.1.1. Topología Vaga

Sea $\mathbf{M}(G)$ el espacio de funciones medibles real valuadas definidas en G. Para $f \in \mathbf{M}(G)$, integrable con respecto a $\mu \in \mathcal{M}$, se define

$$< \mu, f > \equiv \mu f := \int_G f(x)\mu(dx).$$

Es nuestro interés definir elementos aleatorios con valores en el espacio de medidas $\mathcal{M}$. Para ello se requiere definir un espacio medible $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}(\mathcal{M}))$, lo cual hace necesario dotar a $\mathcal{M}$ de una topología adecuada.

Sea $C_b(G)$ el espacio de funciones $f : G \to \mathbb{R}$ continuas y acotadas, y sea $C_K(G) \subset C_b(G)$ el subespacio de funciones de soporte compacto. En $\mathcal{M}$ se definen las dos topologías siguientes:

i. *Topología vaga* . Es la topología que hace continuos a los mapeos

$$\mu \longmapsto < \mu, f >, \qquad f \in C_K(G);$$

y será denotada por τ_v.

ii. *Topología Débil.* Es la topología que hace continuos a los mapeos

$$\mu \longmapsto < \mu, f >, \qquad f \in C_b(G);$$

y será denotada por τ_d.

Como se verá, la topología *vaga* desempeñará un papel importante en la teoría subsecuente, por lo que la mayor parte de los resultados considerarán al espacio $(\mathcal{M}, \tau_v)$. Defínase $\mathfrak{M} := \mathfrak{B}(\mathcal{M})$ como la σ-álgebra de Borel generada por la topología τ_v. De manera análoga se define la topología vaga en $\mathcal{N}$ y la σ-álgebra $\mathfrak{N} := \mathfrak{B}(\mathcal{N})$.

Entre las propiedades fundamentales de la topología vaga se tienen las siguientes:

1. Una sub-base de esta topología está dada por la clase de subconjuntos de $\mathcal{M}$ de la forma

$$\Big\{\mu \in \mathcal{M} : s < \mu f < t\Big\}, \qquad f \in C_K(G), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

2. Las vecindades básicas de $\mu \in \mathcal{M}$ bajo está topología son conjuntos de la forma

$$\Big\{\nu \in \mathcal{M} : s_i < \mu f_i - \nu f_i < t_i\Big\}, \quad f_i \in C_K(G), \quad s_i, t_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, m \quad m = 1, 2, \ldots.$$

3. Una base local de vecindades de $\mu \in \mathcal{M}$ se obtiene del inciso anterior haciendo $s_i = -\epsilon = -t_i$, con $\epsilon > 0$:

$$\Big\{\nu \in \mathcal{M} : |\mu f_i - \nu f_i| < \epsilon, i = 1, \ldots, m\Big\}, \quad f_1, \ldots, f_m \in C_K(G), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

4. Sean $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M}$ las $\sigma-$álgebras de Borel en $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$, respectivamente. Defínase

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{B}(G)} := \sigma\left(\left\{\mu \in \mathcal{M}(G) : \mu(A_1) \in B_1, \ldots, \mu(A_k) \in B_k\right\} : A_j \in \mathcal{B}(G),\, B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+),\, j = 1, ..., k,\, k \in \mathbb{N}.\right),$$

Entonces $\mathfrak{M} = \mathcal{S}_{\mathfrak{B}(G)}$ y $\mathfrak{N} = \mathcal{S}^*_{\mathfrak{B}(G)}$, donde

$$\mathcal{S}^*_{\mathcal{B}(G)} := \sigma\left(\left\{\mu \in \mathcal{N}(G) : \mu(A_1) \in B_1, \ldots, \mu(A_k) \in B_k\right\}\right).$$

Es decir, $\mathfrak{M}$ coincide con la σ-álgebra generada por los cilindros

$$\left\{\mu \in \mathcal{M}(G) : \mu(A_1) \in B_1, \ldots, \mu(A_k) \in B_k\right\}, \quad k \in \mathbb{N},\, j = 1, \ldots, k.$$

(Véase [34], Proposición 1.1).

5. El conjunto $H \subset \mathcal{M}$ es *vagamente acotado* si $\forall f \in C_K(G)$ se cumple que $\sup\{|\mu f| : \mu \in H\} < +\infty$.

6. El conjunto $H \subset \mathcal{M}$ es *vagamente relativamente compacto* si, y sólo si, H es vagamente acotado.

Nótese que si $\mu_n \overset{v}{\to} \mu$, entonces dadas $f \in C_K(G)$ y $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\mu_n \in \left\{\nu \in \mathcal{M} : \left|\mu f - \nu f\right| < \epsilon\right\} \quad \forall n \geq n_0,$$

de ahí que $\mu_n f \to \mu f$. Por lo consiguiente, la convergencia de sucesiones caracteriza a la topología vaga. Concretamente se tiene lo siguiente.

Teorema 1. *Si $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}$, entonces $\mu_n \overset{v}{\to} \mu$ sí, y sólo si $\mu_n f \to \mu f$, $\forall f \in C_K(G)$.*

El siguiente teorema establece dos propiedades topológicas de los espacios $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ que se usarán en este trabajo.

Teorema 2. *Sea $\mathcal{M}$ el espacio de medidas de Radon en $(G, \mathfrak{B}(G))$, dotado de la topología vaga.*

a) $\mathcal{N}$ es un subespacio vagamente cerrado de $\mathcal{M}$, (ver [34], Proposición 2.2).

b) $(\mathcal{N}, \tau_v)$ y $(\mathcal{M}, \tau_v)$ son espacios polacos.

1.2. Subespacios de Medidas de Radon

En esta sección se introducen resultados relevantes para el espacio de medidas finitas, medidas puntuales y medidas temperadas. Éstas últimas son de importancia para establecer resultados sobre procesos de ramificación que toman valores en medidas de Radon no necesariamente finitas.

1.2.1. Espacio de Medidas Finitas

El espacio de medidas finitas $\mathcal{M}_F$ se denota por

$$\mathcal{M}_F := \left\{\mu \in \mathcal{M} : \mu(G) < +\infty\right\}.$$

Para este subespacio es necesario considerar a $f \in C_b(G)$ para establecer definiciones y resultados equivalentes a las del espacio $\mathcal{M}$, en particular

i) $\mu_n \overset{\tau_d}{\to} \mu$ si, y sólo si, $\mu_n f \to \mu f$, para toda $f \in C_b(G)$.

ii) $(\mathcal{M}_F, \tau_d)$ es un espacio Polaco.

iii) Para $G = \mathbb{R}^d$, el espacio $(\mathcal{M}_F, \tau_d)$ es localmente compacto.

Si G es compacto entonces $\mathcal{M}_F(G)$ puede compactificarse, obteniendo el espacio topológico

$$\dot{\mathcal{M}}_F(G) = \mathcal{M}_F(G) \cup \{\tau_W\},$$

donde $\{\tau_W\}$ es un punto de compactificación y la topología τ se define por

$$\begin{aligned} &\mu_n \Rightarrow \mu \in \mathcal{M}_F(G) \text{ si, y sólo sí, } <\mu_n, f> \to <\mu, f>, \quad \forall f \in C(G), \\ &\mu_n \Rightarrow \tau_W \text{ si, y sólo sí, } <\mu_n, 1> \to \infty. \end{aligned}$$

Entonces $(\dot{\mathcal{M}}_F(G), \tau)$ es también un espacio métrizable compacto.

Nota 2. *Al igual que $\mathcal{M}$, el subespacio $\mathcal{M}_F$ no es un espacio vectorial, sólo es un* ***cono****, es decir es un subespacio de $\mathcal{M}$ cerrado bajo combinaciones lineales positivas. Sin embargo, suele identificarse al espacio $C_b(G)$ como su dual.*

1.2.2. Espacio de Medidas Temperadas

Este subespacio fue introducido por Iscoe (1986) [32] para $G = \mathbb{R}^d$, con el propósito de estudiar resultados sobre procesos con valores en espacios de medidas de Radon no finitas, como por ejemplo la medida de Lebesgue. Por lo tanto, las siguientes definiciones y resultados se restringen al caso en el que $G = \mathbb{R}^d$. Así, dado el espacio medible $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ y $p \geq 0$, se define al espacio de ***medidas*** p***–temperadas*** como

$$\mathcal{M}_p \equiv \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d) := \left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) : \langle \mu, \varphi_p \rangle < +\infty \right\},$$

donde

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^p}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

y $|\cdot|$ denota a la norma euclideana. Defínase el espacio medible $(\mathcal{M}_p, \mathfrak{M}_p)$, donde $\mathfrak{M}_p := \mathfrak{B}(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$ es la σ-álgebra de Borel generada por la topología *p-vaga*, es decir, la topología generada por los mapeos

$$\mu \longmapsto <\mu, f>, \quad f \in C_{K,p}(\mathbb{R}^d), \quad \mu \in \mathcal{M}_p,$$

donde $C_{K,p}(\mathbb{R}^d) = C_K(\mathbb{R}^d) \bigcup \{\varphi_p\}$. Así, el espacio de ***medidas temperadas*** se define como

$$\mathcal{M}_T(\mathbb{R}^d) := \left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) : \exists p > 0 \text{ con } \mu \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d) \right\} = \bigcup_{p \geq 0} \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d).$$

Denotando por $\tau_{p.v}$ a la topología $p - vaga$ en $\mathcal{M}_p$, se tienen los siguientes resultados

i) $(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d), \tau_{p.v})$ es métrico, separable y completo.

ii) Para $\{\mu_n\}, \mu \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$, se tiene que $\mu_n \overset{p.v}{\to} \mu$ si, y sólo si, $\mu_n f \to \mu f, \quad \forall f \in C_{K,p}(\mathbb{R}^d)$.

Observaciones:

1. Si $p = 0$, entonces $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d) = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$, por lo tanto $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{M}_T(\mathbb{R}^d)$.

2. El espacio $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$, $p > 0$, NO es localmente compacto [32].

3. Para $p > \frac{d}{2}$, se puede probar que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ está en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$.

4. Se sabe que $\mathcal{M}_T(\mathbb{R}^d) = \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \bigcap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, donde $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ es el espacio de las distribuciones de Schwartz.

Como se verá más adelante, algunos resultados fundamentales sobre existencia de procesos de Markov con valores en un espacio topológico M, requieren que éste sea localmente compacto. Debido a la observación 2), se hace necesaria la siguiente modificación del espacio $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$, ver [32].

Sea $\dot{\mathbb{R}}^d = \mathbb{R}^d \cup \{\tau_p\}$ donde τ_p es un punto aislado. Entonces φ_p (definida en $\mathbb{R}^d$) se extiende a $\dot{\mathbb{R}}^d$ como sigue

$$\dot{\varphi}_p(x) = \varphi_p(x)1_{\mathbb{R}^d}(x) + 1_{\{\tau_p\}}(x), \quad x \in \dot{\mathbb{R}}^d.$$

Entonces $(\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d), \tau_{\dot{p}.v})$ es un espacio topológico, donde

$$\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d) = \left\{\mu \in \mathcal{M}(\dot{\mathbb{R}}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_p d\mu + \mu(\{\tau_p\}) < +\infty\right\},$$

y $\tau_{\dot{p}.v}$ es la menor topología que hace continuos a los mapeos

$$\mu \longmapsto <\mu, f>, \qquad f \in \mathcal{K}_p(\dot{\mathbb{R}}^d) := C_0^\infty(\dot{\mathbb{R}}^d) \cup \{\dot{\varphi}_p\},$$

donde cada $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ se extiende a $\dot{\mathbb{R}}^d$ poniendo $f(\tau_p) = 0$.

Así, el espacio medible en consideración será $(\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d), \mathfrak{M}_{\dot{p}})$, donde $\mathfrak{M}_{\dot{p}}$ es la σ-álgebra de Borel generada por la topología $\tau_{\dot{p}.v}$.

Teorema 3. *$\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$ es un espacio polaco localmente compacto. Los subconjuntos $K \subset \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$ cerrados para los cuales existe $k > 0$ tal que $K \subset \{\mu \in \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d) :< \mu, \dot{\varphi}_p >\leq k\}$ son compactos en la topología $p-$vaga.*

Demostración. Ver [32], pp. 89-91. ∎

El teorema anterior establece la compacidad local del espacio de medidas p-temperadas sobre $\dot{\mathbb{R}}^d$, propiedad que es requerida en varios teoremas de existencia.

1.2.3. Espacio de Medidas Puntuales

Las medidas puntuales (también llamadas *medidas de contar* o *medidas puramente atómicas*) son de interés en el contexto de procesos de ramificación espacio-temporales debido a que, en éstos, la localización de las partículas se identifica con los átomos de este tipo de medidas. Por ello, la presente sección proporciona resultados relevantes respecto a la descripción de estas medidas.

Proposición 1. *Sea $K \subset G$ compacto y $\mu \in \mathcal{N}(G)$. Entonces $\mu(K) = 0$ o bien, $\exists k \in \mathbb{N}$, y $n_j \in \mathbb{N}$, $x_j \in K$, $j \in \{1, \ldots, k\}$ tales que*

$$\mu(\cdot \bigcap K) = \sum_{j=1}^{k} n_j \delta_{x_j}(\cdot) \tag{1.2}$$

Recíprocamente, si $\psi : G \to \mathbb{Z}^+$ es tal que $\#\{x \in K | \psi(x) \neq 0\} < +\infty$, $\forall K \subset G$ compacto , entonces

$$\mu(\cdot) := \sup_{\substack{K \subset G \\ compacto}} \sum_{x \in K} \psi(x)\delta_x(\cdot) \in \mathcal{N}(G).$$

Demostración. Sea $\mu \in \mathcal{N}(G)$ y $K \subset G$ compacto. Si $x \in K$, entonces $\{x\}$ es cerrado. Por regularidad de μ, dada $\varepsilon > 0$, $\exists V_x \ni x$ abierto tal que $\mu(V_x \backslash \{x\}) < \varepsilon$. Además,

$$\mu(V_x) = \mu(V_x \backslash \{x\}) + \mu(\{x\}).$$

Tomando $\varepsilon < 1$, al ser μ una medida $\mathbb{Z}^+$-valuada, se sigue que $\mu(V_x \backslash \{x\}) = 0$, así

$$\mu(V_x) = \mu(\{x\}).$$

Por otra parte, por hipótesis $\mu \in \mathcal{N}$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$, tal que $\mu(K) = n$. Sea

$$E := \{x \in K : \mu(\{x\}) \geq 1\}.$$

Entonces existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ y puntos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tales que $E = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Ahora, sea $F \subset K$ cerrado. Se sigue que

$$F \subset \bigcup_{x \in F} V_x = \left(\bigcup_{x \in E \bigcap F} V_x \right) \bigcup \left(\bigcup_{x \in E^c \bigcap F} V_x \right).$$

Luego, como F es compacto, existe S subconjunto finito tal que $S \bigcap E = \phi$ y

$$F \subset \left(\bigcup_{x \in E \bigcap F} V_x \right) \bigcup \left(\bigcup_{x \in S} V_x \right),$$

de donde se obtiene que

$$\mu(F) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(\{x_i\}) \delta_{x_i}(F) + \sum_{x \in S} \mu(V_x) = \sum_{i=1}^{k} \mu(\{x_i\}) \delta_{x_i}(F).$$

Por otro lado,

$$\mu(F) \geq \mu(\{x \in F : \mu(\{x\} \geq 1)\}) = \sum_{i=1}^{k} \mu(\{x_i\}) \delta_{x_i}(F).$$

Así,

$$\mu(F) = \sum_{i=0}^{k} \mu(\{x_i\}) \delta_{x_i}(F), \quad \forall F \subset K \text{ cerrado}.$$

Por lo anterior, se tiene que la igualdad se cumple para todo $B \in \mathfrak{B}(K)$.

Para el recíproco, sea $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ como en (1.1). Entonces

$$\mu_{K_j}(\cdot) = \sum_{x \in K_j} \psi(x) \delta_x(\cdot) \in \mathcal{N}(G) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Debido a que $K_j \subset K_{j+1}$, se sigue la desigualdad $\mu_{K_j}(\cdot) \leq \mu_{K_{j+1}}(\cdot)$. Sea $f \in C_K^+(G)$ y $F := \text{Sop} f$, donde $\text{Sop} f \equiv \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$. Entonces

$$< \mu_{K_j}, f >= \int_F f d\mu_{K_j} = \sum_{x \in K_j} \psi(x) 1_F(x) f(x) = \sum_{x \in K_j \bigcap F} \psi(x) f(x).$$

Puesto que $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, se tiene que

$$\lim_{j \to \infty} < \mu_{K_j}, f >= \sup_{\substack{K \subset G \\ compacto}} \sum_{x \in K \bigcap F} \psi(x) f(x) = \sup_{\substack{K \subset G \\ compacto}} \sum_{x \in K} \psi(x) 1_F(x) f(x) =< \mu, f > .$$

Por lo tanto,

$$\mu_{K_j}(\cdot) \to \mu(\cdot) = \sup_{\substack{K \subset G \\ compacto}} \sum_{x \in K} \psi(x) \delta_x(\cdot). \tag{1.3}$$

Finalmente, como $\mathcal{N}$ es vagamente cerrado, resulta que $\mu \in \mathcal{N}(G)$.

■

El teorema anterior garantiza que si $K \subset G$ es un compacto y μ una medida puntual en G, entonces μ asigna el valor cero a dicho compacto o bien, μ se puede caracterizar como la combinación lineal de medidas de Dirac en un subconjunto finito de dicho compacto.

Dada $\mu \in \mathcal{N}(G)$, considérese $\varphi : G \to \{0,1\}$ definida como

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mu(\{x\}) = 0, \\ 1 & \text{si} \quad \mu(\{x\}) \neq 0. \end{cases}$$

Entonces

$$\hat{\mu}(\cdot) = \sup_{\substack{K \subset G \\ \text{compacto}}} \sum_{x \in K} \varphi(x)\delta_x(\cdot) \tag{1.4}$$

es tal que

$$\hat{\mu}(\{x\}) = \mu(\{x\}) \wedge 1, \quad \hat{\mu} \in \mathcal{N}.$$

Así, la medida $\hat{\mu}$ tiene los mismos átomos que μ pero a todos ellos les asigna peso 1. Es decir, si μ es tal que para $K \subset G$ compacto,

$$\mu(\cdot \cap K) = \sum_{i=1}^{k} n_i \delta_{x_i}(\cdot), \qquad n_i \in \mathbb{N},\ x_i \in G,$$

entonces $\hat{\mu}$ es una ***medida simple*** es decir, una medida de la forma

$$\hat{\mu}(\cdot \cap K) = \sum_{i=1}^{k} \delta_{x_i}(\cdot).$$

En particular, si en μ los pesos n_i son iguales a 1, $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces μ y $\hat{\mu}$ coinciden.

1.3. Medidas Aleatorias

En esta sección se introduce el concepto de *medida aleatoria*, y otras nociones relacionadas, las cuales pueden verse como análogas al caso de variables aleatorias.

Definición 4. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y $(G, \mathfrak{B}(G))$ un espacio medible como se estableció al principio del capítulo. Una* ***medida aleatoria*** *en G es una función medible,*

$$\xi : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathcal{M}, \mathfrak{M}).$$

De la definición se tiene que dada la medida aleatoria ξ, para cada $\omega \in \Omega$, se obtiene una medida localmente finita en G. Tal medida será denotada por $\xi(\omega, \cdot)$ y su valor en $A \in \mathfrak{B}(G)$, por $\xi(\omega, A)$ (si no se presta a confusión se utilizará la notación $\xi(\cdot)$ y $\xi(A)$, respectivamente). Además puede probarse que para cada $A \in \mathfrak{B}(G)$ fijo, $\xi(\cdot, A)$ es una variable aleatoria.

De manera análoga a las variables aleatorias, una medida aleatoria ξ induce una medida de probabilidad sobre el espacio $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$.

Definición 5. *Si ξ es una medida aleatoria, $P(\cdot) = \mathbb{P}\xi^{-1}(\cdot)$ es la* ***distribución o ley*** *de ξ sobre $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$, y es tal que*

$$(\mathbb{P}\xi^{-1})(M) = \mathbb{P}(\xi^{-1}M) = \mathbb{P}(\xi \in M), \qquad \forall M \in \mathfrak{M}.$$

Observaciones:

1. La medida de probabilidad $\mathbb{P}$ es una medida definida sobre un espacio abstracto Ω, mientras que P se encuentra definida sobre un espacio topológico, $\mathcal{M}$.

2. Toda medida de probabilidad sobre un espacio topológico, E, es distribución de una variable aleatoria en algún espacio de probabilidad, pues basta considerar $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) = (E,\mathfrak{B}(E),P)$ y definir $X(\omega) = \omega$, $\forall\omega \in E = \Omega$.

3. Dado que $P = \mathbb{P}\xi^{-1}$ es una medida de probabilidad sobre $(\mathcal{M},\mathfrak{M})$, probar la existencia de medidas aleatorias no triviales es equivalente a definir medidas de probabilidad en $(\mathcal{M},\mathfrak{M})$.

Definición 6. *La **intensidad** de la medida aleatoria ξ es la medida $\mathbb{E}\xi(\cdot)$, dada por*

$$(\mathbb{E}\xi)(M) = \mathbb{E}[\xi(M)] = \int_\Omega \xi(\omega,M)d\mathbb{P}, \quad \forall M \in \mathfrak{B}(G).$$

Observación: Puede ocurrir que la medida $\mathbb{E}\xi \notin \mathcal{M}$ aún cuando $\xi \in \mathcal{M}$ c.s.

Definición 7. *Sea ξ una medida aleatoria y $f \in \mathbf{M}^+(G)$. El **Funcional de Laplace** (FL) de ξ, se define como*

$$L_\xi(f) := \mathbb{E}e^{-<\xi,f>}, \quad \forall f \in \mathbf{M}^+(G).$$

Definición 8. *Sea ξ una medida aleatoria en G. El funcional*

$$G_\xi(f) = \mathbb{E}\left[e^{<\xi,\log f>}\right],$$

*definido $\forall f : G \to [0,1]$ tal que $1-f \in C_K(G)$, es el **Funcional Generador de Probabilidades** (FGP) de ξ.*

Observaciones:

1. Si $\varphi \in C_K^+(G)$ entonces $1 - e^{-\varphi} \in C_K(G)$, $0 \le 1 - e^{-\varphi} \le 1$ y se tiene la siguiente relación entre el funcional de Laplace y el funcional generador de probabilidades de cualquier medida aleatoria ξ:

$$\begin{aligned} G_\xi(e^\varphi) &= L_\xi(\varphi), \\ G_\xi(f) &= L_\xi(-\log f). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Los conceptos de función característica y transformada de Laplace de una medida aleatoria corresponden a los respectivos funcionales de su distribución o ley, los cuales se definen a continuación.

Definición 9. *Sea P una medida de probabilidad en $(\mathcal{M},\mathfrak{M})$, entonces*

$$\chi(P) : f \longmapsto \int_{\mathcal{M}(G)} e^{i<\mu,f>}P(d\mu), \quad f \in C_K(G),$$

*es el **funcional característico** de P, mientras que*

$$\mathcal{L}(P) : f \mapsto \int_{\mathcal{M}(G)} e^{-<\mu,f>}P(d\mu), \quad f \in C_K(G),$$

*es el **funcional de Laplace** de P.*

Teorema 4. *Las medidas de probabilidad en $(\mathcal{M},\mathfrak{M})$ quedan determinadas unívocamente por su funcional característico o por su funcional de Laplace.*

Demostración. Sean P y Q medidas de probabilidad sobre $\mathcal{M}$. Supóngase que $\chi(P) = \chi(Q)$. Si $f_1,\dots,f_n \in C_K(G)$ y $t_1,\dots,t_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\chi(Q)\left(\sum_{j=1}^{n} t_j f_j\right) &= \chi(P)\left(\sum_{j=1}^{n} t_j f_j\right)\\
&= \int_{\mathcal{M}(G)} \exp\left(i\sum_{j=1}^{n} t_j \mu(f_j)\right) P(d\mu)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i\sum_{j=1}^{n} t_j u_j\right) P_{f_1,\ldots,f_n}(du_1,\ldots,du_n)
\end{aligned}
$$

donde $P_{f_1,\ldots,f_n}(U_1,\ldots,U_n) = P[\mu : \mu(f_1) \in U_1,\ldots,\mu(f_n) \in U_n]$, $U_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $i = 1,\ldots,n$. Así, por el teorema de unicidad en $\mathbb{R}^n$ se sigue que

$$P_{f_1,\ldots,f_n} = Q_{f_1,\ldots,f_n}.$$

Así, P y $\mathbb{Q}$ coinciden en los cilíndros

$$\{\mu : (\mu(f_1),\mu(f_2),\ldots,\mu(f_n)) \in E\},\quad E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Usando el lema de clases monótonas se sigue que $P = Q$ en $\mathfrak{M}$. El caso de las transformadas de Laplace se trabaja de manera similar. ■

Nota 3. *Puede demostrarse que las medidas de probabilidad sobre* $(\mathcal{M}(G),\mathfrak{M})$ *son regulares y tensas, (ver [34], Proposición 1.4).*

1.3.1. Campos Aleatorios

Definición 10. *Sea* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *espacio de probabilidad y* $(G,\mathfrak{B}(G))$ *un espacio medible. Un* ***campo aleatorio*** *(o proceso puntual) es una función medible*

$$\xi : (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \to (\mathcal{N},\mathfrak{N}).$$

Por lo anterior, para cada $\omega \in \Omega$, se obtiene la medida puntual $\xi(\omega,\cdot)$. Mientras que para cada $A \in \mathcal{B}$, al ser A acotado, $\xi(\cdot,A)$ es una variable aleatoria finita que indica el número de átomos de $\xi(\cdot)$ que están localizados en A. De aquí que, si G es acotado o bien, si $\xi(\cdot,G)$ es finito c.s., entonces ξ es un campo aleatorio finito.

Nota 4. *Un campo aleatorio también puede verse como una medida aleatoria con rango restringido a* $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. *Por tal razón, se tienen definiciones análogas para la distribución de un campo aleatorio, el funcional de Laplace, etc., las cuales simplemente se restringen al espacio* $\mathcal{N}$.

Definición 11. *Sea* ξ *un campo aleatorio. Se dice que* ξ *tiene un* ***punto o átomo*** *en* $x \in G$ *si*

$$\mathbb{P}\big[\{\omega \in \Omega : \xi(\omega,\{x\}) > 0\}\big] = \mathbb{P}\big[\xi(\{x\}) > 0\big] > 0.$$

Y se dirá que $x \in G$ *es un* ***punto múltiple*** *si*

$$\mathbb{P}\big[\{\omega \in \Omega : \xi(\omega,\{x\}) \geq 2\}\big] = \mathbb{P}\big[\xi(\{x\}) \geq 2\big] > 0.$$

Definición 12. *El campo aleatorio* ξ *es* ***simple****, o bien, no tiene puntos múltiples, si*

$$\mathbb{P}\big[\{\omega \in \Omega : \xi(\omega,\{x\}) \geq 2\}\big] = \mathbb{P}\big[\xi(\{x\}) \geq 2\big] = 0 \quad \forall x \in G.$$

Tomando el mapeo $\psi : \mu \to \hat{\mu}$, donde $\hat{\mu}$ es como en (1.4), se establece el siguiente

Corolario 1. *ξ no tiene puntos múltiples c.s. si, y sólo si,*

$$\mathbb{P}\Big[\big\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = \hat{\xi}(\omega)\big\}\Big] = 1.$$

Observaciones:

1. El mapeo $\psi : \mu \longmapsto \hat{\mu}$ es medible.

2. Si ξ es un campo aleatorio simple y $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}(G)$ es un álgebra que contiene una base numerable de G, entonces la distribucion de ξ queda determinada por los números

$$\Big\{\mathbb{P}\big[\xi(A) = 0\big] = \big(\mathbb{P}\xi^{-1}\big)\big[\eta \in \mathcal{N}(G) : \eta(A) = 0\big], \quad A \in \mathcal{A}\Big\}$$

es decir, si $\mathbb{Q}$ es una medida de probabilidad en $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$, tal que

$$\mathbb{Q}\big\{\mu \in \mathcal{N} : \mu(A) = 0\big\} = \mathbb{P}\big[\xi(A) = 0\big], \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

entonces $\mathbb{Q}$ es la distribución de ξ (ver [34], Proposición 2.3).

Por lo anterior, puede notarse que ξ y $\hat{\xi}$ tienen los mismos puntos de salto, sin embargo, los pesos son diferentes. Es de interés saber cuando un campo aleatorio es simple, ya que en ese caso, ξ y $\hat{\xi}$ coinciden completamente, para ello se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2. *Sea ξ un campo aleatorio. Si existe una medida difusa $\lambda \in \mathcal{M}$, tal que*

$$\mathbb{P}\big[\xi(A) \geq 2\big] = \circ\big(\lambda(A)\big), \textit{ cuando } \lambda(A) \downarrow 0, \quad A \in \mathcal{B}(G), \tag{1.6}$$

entonces ξ es un campo aleatorio simple, es decir, no tiene puntos múltiples.

Demostración. Sea $K \subset G$ compacto y $\epsilon > 0$. Por regularidad de λ, $\forall x \in K$ y $\delta > 0$ existe un abierto $V_x \ni x$, tal que $\lambda(V_x) < \delta$. Luego, por hipótesis, $\forall x \in K$,

$$\mathbb{P}\big[\xi(V_x) \geq 2\big] \leq \epsilon\lambda(V_x).$$

Por otra parte, por compacidad de K, existen $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ abiertos, tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Sea $\{B_i\}_{i=1}^{n}$, una partición construida a partir de $\{V_{x_i}\}_{i=1}^{n}$, se tiene que $K = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$, con $B_i \bigcap B_j = \phi$, si $i \neq j$ y

$$\mathbb{P}\big[\xi(B_j) \geq 2\big] \leq \epsilon\lambda(B_i).$$

Entonces

$$\mathbb{P}[\exists x \in K : \xi(\{x\}) \geq 2] \leq \sum_{i=1} n\mathbb{P}[\xi(B_i) \geq 2] \leq \epsilon \sum_{i=1}^{n} \lambda(B_i) = \epsilon\lambda(K),$$

Haciendo $\epsilon \downarrow 0$, resulta que ξ es simple en K. Por ser G $\sigma-$compacto, se sigue que ξ no posee puntos múltiples en G. ∎

Observación:

- Puede probarse que la proposición anterior se cumple si (1.6) se restringe para $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}(G)$, donde $\mathcal{A}$ es un álgebra que contiene una base numerable de G (ver [34], Proposición 2.4).

Definición 13. *Sea ξ un campo aleatorio. Se dice* ***infinitamente divisible*** *(ID) si $\forall r \in \mathbb{N}$, existe una colección $\{\xi_{r,k}\}_{k=1}^{r}$ de campos aleatorios, independientes e idénticamente distribuidos tales que*

$$\xi \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{r} \xi_{k,r}.$$

El siguiente resultado establece las condiciones para determinar cuando un campo aleatorio es ID.

Proposición 3. *Un campo aleatorio ξ es ID si, y sólo si, su FGP, G_ξ cumple*

$$G_\xi(f) = \exp\left[\int_{\mathcal{N}} \left(e^{<\mu, \log f>} - 1\right)\Theta(d\mu)\right]$$

donde

- $\Theta(\cdot)$ *es medida no-negativa en* $\mathcal{N}$
- $\Theta(\{\phi\}) = 0,\ \Theta(\{\mu : \mu(A) > 0\}) < +\infty, \forall A \in \mathfrak{B}(G).$

Θ *se llama Medida de Kerstan-Lee-Matthes (KLM) de* ξ

La proposición anterior, es el equivalente de la fórmula de Lévy-Khintchine para medidas de probabilidad ID en $\mathbb{R}$.

Ejemplos de Campos Aleatorios

A continuación se dan algunos ejemplos importantes de medidas aleatorias, en particular para el caso de campos aleatorios. Para estos ejemplos, se muestra el cálculo de su intensidad y su transformada de Laplace.

1. Sea $(G, \mathfrak{B}(G))$ espacio medible. La medida de Dirac sobre G, se define como

$$\forall s \in G, \quad \delta_s(A) = \begin{cases} 1 & s \in A, \\ & \\ 0 & s \notin A \end{cases} \quad \forall A \in \mathfrak{B}(G). \tag{1.7}$$

De la definición anterior se sigue que $\delta_s \in \mathcal{N}$, $\forall s \in G$. Es decir, δ_s es una medida de Radon $\mathbb{Z}^+$-valuada. Más aún, para cada $s \in G$ la medida de Dirac δ_s es una medida de probabilidad con un átomo en s.

Considérese el mapeo $\Delta : G \to \mathcal{N}$ dado por

$$\Delta : s \longmapsto \delta_s.$$

No es difícil probar que Δ es $\mathfrak{N}$-medible, y por tanto, si $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (G, \mathcal{B}(G))$ es v.a. G–valuada, entonces $\delta_X = \Delta \circ X$ es un campo aleatorio.

Usando la notación $\mu_X(\cdot) = \mathbb{P}X^{-1}(\cdot)$, la intensidad $\mathbb{E}\delta_X$ y el funcional de Laplace de δ_X se obtienen como sigue:

a) *Intensidad.* Sea $A \in \mathfrak{B}(G)$. Entonces

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}\delta_X)(A) = \mathbb{E}\big[\Delta \circ X(A)\big] &= \int_G \delta_s(A)\mu_X(ds) \\ &= \int_G 1_A(s)\mu_X(ds) = \mu_X(A).\end{aligned}$$

b) *Funcional de Laplace.* Sea $f \in M^+(G)$. Entonces

$$L_{\delta_X}(f) = \mathbb{E}[e^{-<\delta_X, f>}] = \int_G e^{-<\delta_s, f>}\mu_X(ds) =< \mu_X, e^{-f} > .$$

2. Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s G–valuadas i.i.d con distribución μ_X como en el ejemplo anterior, $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$\xi_n \equiv \delta_{X_1} + \cdots + \delta_{X_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces ξ_n es un campo aleatorio cuya intensidad y funcional de Laplace están dados por

a) *Intensidad.* Sea $A \in \mathfrak{B}(G)$. Entonces

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}\xi_n)(A) &= \mathbb{E}\big[\delta_{X_1}(A) + \cdots + \delta_{X_n}(A)\big] \\ &= n(\mathbb{E}\delta_{X_1})(A) = n\mu_X(A).\end{aligned}$$

b) *Funcional de Laplace.* Sea $f \in M^+(G)$. Entonces

$$\begin{aligned}L_{\xi_n}(f) &= \mathbb{E}\left[e^{-\langle \xi_n, f\rangle}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-<\sum_{i=1}^n \delta_{X_i}, f>}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{-\langle \delta_{X_i}, f\rangle}\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[e^{-\langle \delta_{X_i}, f\rangle}\right] \\ &= \left(< \mu_X, e^{-f} >\right)^n.\end{aligned}$$

3. Generalizando el ejemplo anterior, sean $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ v.a's i.i.d. con distribución μ_X. Si $\nu(\omega) \in \mathbb{Z}^+$, es una variable aleatoria independiente de $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$\xi_\nu = \delta_{X_1} + \cdots + \delta_{X_\nu}$$

es campo aleatorio.

a) *Intensidad.* Por la independencia de ν y $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$, para $A \in \mathfrak{B}(G)$,

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}\xi_\nu)(A) &= \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}\left[\xi_n(A)\right]\mathbb{P}\left[\nu = n\right] = \sum_{n=1}^\infty n\mu_X(A)\mathbb{P}[\nu = n] \\ &= \mu_X(A)\sum_{n=1}^\infty n\mathbb{P}[\nu = n] = \mu_X(A)\mathbb{E}[\nu].\end{aligned}$$

b) *Funcional de Laplace.* Sea $f \in M^+(G)$,

$$\begin{aligned}L_{\xi_\nu} &= \mathbb{E}e^{-<\xi_\nu, f>} = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}\left[e^{-\langle \xi_n, f\rangle}\right]\mathbb{P}[\nu = n] \\ &= \sum_{n=1}^\infty \left(\left\langle \mu_X, e^{-f}\right\rangle\right)^n \mathbb{P}[\nu = n] = \psi_\nu(< \mu_X, e^{-f} >),\end{aligned}$$

donde ψ_ν es la función generadora de ν.

4. (**Campo Aleatorio o Medida Aleatoria de Poisson**). Como caso particular del ejemplo anterior, tómese ν con distribución de Poisson de parámetro $a > 0$. Entonces

$$\xi := \sum_{i=1}^\nu \delta_{X_i}$$

es llamado campo aleatorio (o medida aleatoria) de Poisson con medida de intensidad $\lambda(\cdot) := a\mu_X(\cdot)$, o bien con tasa de intensidad a.

a) *Intensidad.* Usando que $\mathbb{E}\nu = a$, para $A \in \mathfrak{B}(G)$,

$$\mathbb{E}\xi(A) = (\mathbb{E}\nu)\mu_X(A) = a\mu_X(A) =: \lambda(A).$$

b) *Funcional de Laplace.* Usando la función generadora de ν,

$$\psi_\nu(s) = e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n s^n}{n!} = e^{-a(1-s)}, \quad s \in [0,1],$$

para $f \in M^+(G)$,

$$\begin{aligned} L_\xi(f) &= \mathbb{E}e^{-<\xi,f>} = \psi\left(\langle \mu_X, e^{-f}\rangle\right) \\ &= e^{-a(1-<\mu_X,e^{-f}>)} = e^{-a(<\mu_X,1-e^{-f}>)} = e^{-<\lambda,1-e^{-f}>}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Algunos propiedades del campo aleatorio de Poisson

Usando la Proposición 2, se deduce que si ξ es campo de Poisson con medida de intensidad $\lambda(\cdot)$, entonces $\forall B \in \mathfrak{B}(G)$ se cumple que $\mathbb{P}[\xi(B) = 0] = e^{-\lambda(B)}$. De hecho la variable aleatoria $\xi(B)$ tiene distribución Poisson con parámetro $\lambda(B)$. En efecto,

$$L_{\xi(B)}(t) = \mathbb{E}e^{-t\xi(B)} = \mathbb{E}e^{-\xi(t1_B)} = e^{-<\lambda,1-e^{-t1_B}>} = e^{-(1-e^{-t})\lambda(B)}.$$

Por lo que

$$L_{\xi(B)}(t) \to e^{-\lambda(B)}, \quad t \to \infty.$$

Más aún, nótese que si ξ es un campo de Poisson con medida de intensidad λ, entonces para cualesquiera $B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{B}(G)$ relativamente compactos, disjuntos por parejas y $\forall t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}^+$, se tiene que la transformada de Laplace de $\big(\xi(B_1), \xi(B_2), \ldots, \xi(B_k)\big)$ es

$$\begin{aligned} L(t_1,\ldots,t_k) &= \mathbb{E}[e^{-\sum_{i=0}^k t_i\xi(B_i)}] = L_\xi(\sum_{i=0}^k t_i 1_{B_i}) \\ &= \exp\left(-<\lambda, 1 - e^{-\sum_{i=0}^k t_i 1_{B_i}}>\right) \\ &= \exp\left(-<\lambda, \sum_{i=0}^k 1_{B_i}(1-e^{-t_i})>\right) \\ &= \prod_i \exp\left(-<\lambda, 1_{B_i}(1-e^{-t_i})>\right) \\ &= \prod_{i=1}^k L_\xi(t_i 1_{B_i}) \\ &= \prod_{i=1}^k L_{\xi(B_i)}(t_i) \end{aligned}$$

Lo anterior permite establecer que cualquier campo aleatorio de Poisson tiene incrementos independientes, en el sentido de que para $\{B_i\}_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, disjuntos y medibles, las variables aleatorias $\xi(B_1), \ldots, \xi(B_n)$ son independientes.

Si ξ es un campo de Poisson con medida de intensidad λ, entonces usando que $L_\xi(\varphi) = e^{-<\lambda,(1-e^{-\varphi})>}$, se sigue que su FGP es

$$G_\xi(f) = \exp\left\{\int_{\mathbb{R}^d}(f(x)-1)\,\lambda(dx)\right\}. \tag{1.9}$$

Proposición 4. *Sea ξ campo de Poisson con medida de intensidad λ, con λ medida de Radon difusa. Entonces ξ no tiene átomos ni puntos múltiples.*

Demostración. Por ser ξ un campo de Poisson con medida de intensidad λ, con λ medida difusa, se tiene que $\mathbb{P}[\xi\{x\} = 0] = e^{-\lambda\{x\}} = 1$. Por otra parte, $\forall A \in G$ se tiene que

$$\mathbb{P}\big[\xi(A) \geq 2\big] = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda(A)}\frac{(\lambda(A))^n}{n!} = \circ(\lambda(A)),$$

así, utilizando la Proposición 2 se sigue que ξ no tiene puntos múltiples. ∎

Observación: Si λ no es difusa, es decir si $\exists x \in G$ tal que $\lambda(\{x\}) > 0$, entonces no solo λ tiene átomos en x, sino que x será múltiple. De hecho,

$$\mathbb{P}\big[\xi(\{x\}) \leq 1\big] = e^{-\lambda\{x\}}(1 + \lambda(\{x\})) < 1 \qquad \text{si } \lambda(\{x\}) > 0.$$

Proposición 5 (Teorema de Rènyi)**.** *Sea ξ campo aleatorio tal que*

$$\mathbb{P}[\xi(A) = 0] = e^{-\lambda(A)} \tag{1.10}$$

$$\mathbb{P}[\xi(A) \geq 2] = \circ(\lambda(A)), \quad \lambda(A) \downarrow 0 \tag{1.11}$$

donde λ es difusa y $A \in \mathcal{A}$, siendo $\mathcal{A}$ un álgebra que contiene una base para G. Entonces ξ es de Poisson con intensidad λ.

Demostración. Ver [34], Proposición 4.2. ∎

Teorema 5. *Si $\pi_\lambda(\cdot)$ es la distribución de un campo aleatorio de Poisson con medida de intensidad difusa $\lambda(\cdot)$, tal que $\lambda(G) < \infty$, entonces $\forall B \in \mathfrak{N}$ se tiene que*

$$\pi_\lambda(B) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(G)} \int_{G^n} 1_B(\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n}) \frac{\lambda(dx_1)\cdots\lambda(dx_n)}{n!}. \tag{1.12}$$

Demostración. Usando el Teorema de Rènyi basta probar que se satisfacen las identidades (1.10) y (1.11). Sea ξ un campo aleatorio con distribución Q dada por el lado derecho de (1.12), es decir

$$Q(B) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(G)} \int_{G^n} 1_B(\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n}) \frac{\lambda(dx_1)\cdots\lambda(dx_n)}{n!}, \quad \forall B \in \mathfrak{N}.$$

Sea $A \in \mathcal{B}(G)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\xi(A) = 0] &= \mathbb{P}\xi^{-1}\big\{\mu \in \mathcal{N} : \mu(A) = 0\big\} = Q\left(\big\{\mu \in \mathcal{N} : \mu(A) = 0\big\}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(G)} \int_{G^n} 1_{\{\mu:\mu(A)=0\}}(\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n}) \frac{\lambda(dx_1)\cdots\lambda(dx_n)}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(G)} \int_{(A^c)^n} \frac{\lambda(dx_1)\cdots\lambda(dx_n)}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(G)} \frac{(\lambda(G) - \lambda(A))^n}{n} = e^{-\lambda(A)}.
\end{aligned}$$

Análogamente se verifica que $\mathbb{P}[\xi(A) \geq 2] = \circ(\lambda(A))$. El resultado se sigue del teorema de Renyi. ∎

Otra propiedad importante es que el campo aleatorio de Poisson es un ejemplo de campo infinitamente divisible. Si ξ es un campo de Poisson de intensidad λ, ξ es ID y su medida KLM es

$$\mathcal{M}(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} \delta_{\delta_x}(\cdot)\lambda(dx).$$

En efecto, nótese que $\forall F : \mathcal{N}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ medible,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{N}} F(\mu)\mathcal{M}(d\mu) &= \int_{\mathcal{N}} F(\mu) \int_{\mathbb{R}^d} \delta_{\delta_x}(d\mu)\lambda(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \lambda(dx) \int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} F(\mu)\delta_{\delta_x}(d\mu) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \lambda(dx) F(\delta_x).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Si $f \in C_K^+(G)$, usando (1.9) se tiene que

$$\begin{aligned} G_\xi(f) &= \exp \int_{\mathbb{R}^d} \big(f(y) - 1\big)\lambda(dx) = \exp \int_{\mathbb{R}^d} \big(\exp\log f(y) - 1\big)\lambda(dx) \\ &= \exp \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\exp \int_{\mathbb{R}^d} \log f(y)\delta_x(dy) - 1\Big]\lambda(dx) = \exp \int_{\mathbb{R}^d} F(\delta_x)\lambda(dx), \end{aligned} \tag{1.14}$$

donde $F(\delta_x) := \exp \int_{\mathbb{R}^d} \log f(y)\delta_x(dy) - 1$. Entonces usando (1.13) en (1.14), se tiene que

$$G_\xi(f) = \exp\left\{ \int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} \left[\exp \int_{\mathbb{R}^d} \log f(y)\mu(dy) - 1\right] \mathcal{M}(d\mu)\right\}.$$

Por lo tanto de la Proposición 3 se sigue que ξ es ID con medida KLM dada por $\mathcal{M}$.

Se concluirá esta sección con la definición usual de un campo aleatorio de Poisson homogéneo en $\mathbb{R}^d$, la cual corresponde a un campo aleatorio de Poisson ξ en $G = \mathbb{R}^d$, cuya medida de intensidad $\mathbb{E}\xi$ es la medida de Lebesgue.

Definición 14. *Sea $\lambda(\cdot)$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$. Una función medible $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ es un* ***campo aleatorio de Poisson homogéneo*** *con tasa $a > 0$, si*

a) $\forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, la v.a. $\xi(A)$ tiene una distribución de Poisson con parámetro de intensidad $a\lambda(A)$, es decir,

$$\mathbb{P}[\xi(A) = n] = \frac{\big(a\lambda(A)\big)^n e^{-a\lambda(A)}}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

b) $\forall A, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ tales que $\lambda(A), \lambda(B) < \infty$ y $A \cap B = \phi$, las variables aleatorias $\xi(A)$ y $\xi(B)$ son de Poisson independientes, con parámetros $a\lambda(A)$ y $a\lambda(B)$, respectivamente.

1.4. Procesos estocásticos $\mathcal{M}$-valuados

Definición 15. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Un* ***proceso estocástico con valores en $\mathcal{M}$*** *es una familia $X = \{X_\alpha,\ \alpha \in I\}$ de medidas aleatorias indizadas por el conjunto I. Es decir, para cada $\alpha \in I$,*

$$X_\alpha : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathcal{M}, \mathfrak{M}),$$

es una medida aleatoria.

Definición 16. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad. Un* ***proceso de Markov con valores medidas*** *es un proceso de Markov $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ con espacio de estados $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$.*

Definición 17. *Sea X un proceso estocástico definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, con valores en $\mathcal{M}$. Las* ***distribuciones de dimensión finita*** *(DDF) de X están dadas por la familia de medidas de probabilidad*

$$\{\mu_{t_1,\ldots,t_n} : n \geq 1,\ 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n\},$$

donde para cada $n \geq 1$ y $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, la medida $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ es una medida de probabilidad sobre $\mathfrak{M}^n := \mathfrak{M} \times \cdots \times \mathfrak{M}$ inducida por el mapeo $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \to \mathfrak{M}^n$, es decir

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(\Gamma) = \mathbb{P}[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in \Gamma], \quad \Gamma \in \mathfrak{M}^n.$$

Dentro de los procesos estocásticos con valores medidas, son de interés para esta tesis los procesos de ramificación con valores en $\mathcal{M}$.

Definición 18. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad. Un* ***proceso de ramificación con valores medidas*** *es un proceso de Markov* $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ *con espacio de estados* $\mathcal{M}$ *y probabilidades de transición* $\{P_t\}_{t\geq 0}$ *que satisfacen la* ***propiedad de ramificación***

$$P_t(\,\cdot\,|\mu_1 + \mu_2) = P_t(\,\cdot\,,\mu_1) * P_t(\,\cdot\,,\mu_2), \quad t \geq 0,\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M},$$

donde $*$ *denota la convolución de medidas.*

Los procesos de ramificación con valores medidas fueron introducidos por Watanabe (1968) y por Dawson(1979), quienes mostraron que dichos procesos surgen como *límites de alta densidad* de sistemas de partículas ramificadas, es decir, de procesos estocásticos con valores en el espacio de medidas de contar, $\mathcal{N}$, y que están caracterizados por cierta dinámica. Dentro de los procesos de ramificación con valores en $\mathcal{M}$, una clase especial la constituyen los llamados *superprocesos*. En el caso particular del *superproceso de Dawson-Watanbe*, como es señalado en [42], los principales estudios en este campo corresponden a Dawson (1992, 1993), Dynkin (1994, 2002), Etheridge (2000), Le Gall (1999), Perkins (1995, 2002), entro otros.

En el siguiente capítulo se exponen los resultados necesarios sobre sistemas de partículas, y en el capítulo 6, se mostrará la construcción del *superproceso de Dawson-Watanabe* (DW) como límite de alta densidad de un cierto tipo de partículas ramificadas, el *movimiento* α*-estable ramificado.*

1.5. Resumen

El capítulo precedente tuvo como objetivo proveer de la herramienta técnica y teórica necesaria para dar un seguimiento adecuado a las capítulos subsecuentes. Así, se ha definido el espacio de medidas de Radon $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$ sobre G un espacio topológico Hausdorff, con base numerable y localmente compacto y a partir de este se introdujo el concepto de medida aleatoria, entendida como una función medible con valores en $\mathcal{M}$. Se ha finalizado con el concepto de procesos estocásticos con valores en dicho espacio y se ha dado la definición de procesos de ramificación con valores medidas, dentro de los cuales se encuentran el superproceso de DW. La relevancia de estos resultados radica en que el MBR, proceso base para la construcción del movimiento Super Browniano, es un procesos estocástico de este tipo.

A modo de resumen, y con el objetivo de que el lector tenga presente los resultados relevantes de este apartado, se enlistan aquellos considerados de interés para lo subsecuente:

1. Los espacios de medidas de Radon y en particular, el espacio de medidas de contar dotados con la topología vaga, $(\mathcal{M}, \tau_v)$ y $(\mathcal{N}, \tau_v)$ respectivamente, son espacios polacos.

2. El espacio de medidas finitas con la topología débil $(\mathcal{M}_F, \tau_d)$, es un espacio polaco y es localmente compacto.

3. El espacio $(\mathcal{M}_p, \tau_{p.v})$ es polaco

4. Las medidas de probabilidad en $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$, quedan determinadas unívocamente por su funcional de Laplace o por su funcional característico.

5. El espacio de medidas $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$ no es localmente compacto, pero $\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$ y $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ sí lo son.

6. Toda medida puntual tiene una representación, sobre un compacto, como una combinación lineal de deltas de Dirac sobre un subconjunto finito de dicho compacto.

7. A modo de síntesis, puede ser de utilidad notar las siguientes equivalencias y relaciones entre variables aleatorias y medidas aleatorias

	Variable Aleatoria	Medida Aleatoria
Definidas sobre	$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
Valores en	$(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$	$(\mathcal{M}, \mathfrak{M}), \quad \mathfrak{M} := \mathfrak{B}(\mathcal{M})$
Mapeo medible	$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$	$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathcal{M}, \mathfrak{M})$
Valor Esperado	$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ Media (Cte)	$(\mathbb{E}X)(\cdot) = \int_\Omega X(\omega, \cdot)\mathbb{P}(d\omega)$ Medida de Intensidad sobre $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$
Distribución o Ley	$PX^{-1}(\cdot)$ sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ $PX^{-1}(A) = \mathbb{P}(X \in A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$	$PX^{-1}(\cdot)$ sobre $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$ $PX^{-1}(M) = \mathbb{P}(X \in M)$, $M \in \mathfrak{M}$
Funcional de Laplace	$\theta \longmapsto \int_\Omega e^{-\omega\theta}\mathbb{P}(d\omega)$	$f \longmapsto \int_\mathcal{M} e^{-<\mu,f>}\mathbb{P}(d\mu)$

Notas adicionales

El espacio de medidas de Radon fue construido sobre un espacio G con las características mencionadas anteriormente, sin embargo, es posible definirlo sobre espacios topológicos más generales. En [47] pueden verse las implicaciones e importancia de las hipótesis de G.

Si se restringe el espacio de medidas de Radon a medidas de probabilidad, el espacio resultante es de interés para el estudio de otro de los superprocesos más importantes, el superproceso de Fleming-Viot, [24], [25].

En [34] se encuentran resultados sobre existencia de medidas aleatorias para el caso en el que G es compacto y para el caso general, G Hausdorff, localmente compacto y con base numerable. Ambos resultados se basan en una extensión del Teorema de Consistencia de Kolmogorov.

Capítulo 2

Sistemas de Partículas Ramificadas

El superproceso de Dawson-Watanabe surge como límite reescalado de sistemas de partículas ramificadas, y debido a que uno de los objetivos de esta tesis es explicar con detalle dicha convergencia, en el presente capítulo se exponen los resultados más relevantes sobre tales sistemas. Las referencias básicas para este capítulo son los artículos [44] y [45].

2.1. Sistemas de Partículas Markovianos Ramificados

Los *sistemas de partículas* o *procesos de población* surgen como modelos matemáticos para el estudio de *poblaciones* sujetas a una determinada evolución temporal y espacial. Sea G un conjunto arbitrario, no vacío. Una población en G puede representarse por un vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, o bien una medida de contar $\eta = l_1\delta_{x_1} + \cdots + l_n\delta_{x_n}$, donde $\{x_i\} \subset G$. Intuitivamente dicho vector o medida de contar representa una colección de individuos (o partículas), ubicadas en los puntos $x_1, \ldots, x_n$. Se llamará al conjunto G el *espacio de estados individual* de la población, el cual puede ser un espacio general abstracto, ver [45]. Para los propósitos de este trabajo, se hace la restricción al caso $G = \mathbb{R}^d$, el espacio euclideano d-dimensional.

Definición 19. *Un* ***Sistema de Partículas Markoviano*** *(SPM) en $\mathbb{R}^d$ es un proceso de Markov, $\{N_t\}_{t\geq 0}$, con espacio de estados $(\mathcal{N}(\mathbb{R}^d), \mathfrak{N}(\mathbb{R}^d))$ y con probabilidades de transición homogéneas $P_t(\cdot|\mu)$, $t \geq 0$, donde $\forall t \geq 0$ y $\forall \mu \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$ se satisfacen*

i. $P_t(\,\cdot\,|\mu)$ *es una probabilidad en* $(\mathcal{N}(\mathbb{R}^d), \mathfrak{N}(\mathbb{R}^d))$,

ii. $\forall A \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^d)$, $P_t(A|\cdot)$ *es* $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^d)$*−medible.*

iii. $P_t(A|\mu) = \int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} P_{t-s}(A|\nu)P_s(d\nu|\mu)$, $0 \leq s \leq t$, $A \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$,

iv.

$$P_0(A|\mu) = \begin{cases} 1, & \mu \in A, \\ 0, & \mu \notin A. \end{cases}$$

Dentro de los sistemas de partículas, son de interés en esta tesis los sistemas de partículas ramificadas, los cuales pueden verse como la contraparte discreta del superproceso de Dawson-Watanabe.

Definición 20. *Sea $\{N_t\}$ un sistema de partículas Markoviano. Se dice que $\{N_t\}$ es* ***multiplicativo*** *(SPMM) o* ***ramificado*** *si $\forall \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$ y $t \geq 0$, sus probabilidades de transición satisfacen*

$$P_t(\cdot|\nu_1 + \nu_2) = P_t(\cdot|\nu_1) * P_t(\cdot|\nu_2). \tag{2.1}$$

Observaciones:

1. La propiedad multiplicativa puede entenderse como el análogo a la hipótesis de independencia en la ramificación de los Procesos de Galtón-Watson. Indica que el proceso con valor inicial $\nu_1+\nu_2$ es igual a la suma de dos copias independientes del proceso con valores iniciales ν_1 y ν_2 respectivamente.

2. Si $\{N_t\}$ es un SPMM y si $\mu = \sum_{j=1}^m l_i\delta_{x_i}$, entonces de la propiedad multiplicativa se sigue que
$$P_t(\cdot|\mu) = (P_t(\cdot|x_1))^{l_1} * \cdots * (P_t(\cdot|x_m))^{l_m},$$
donde, aquí y en adelante se usará la notación $P(\cdot|\delta_x) \equiv P(\cdot|x)$.

3. Si $\mu \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$, usando la Proposición 1 y la observación anterior, se sigue que para determinar las probabilidades de transición de un SPMM, basta conocer dichas probabilidades de transición para configuraciones iniciales de la forma δ_x, $x \in \mathbb{R}^d$.

El tipo de sistemas de partículas ramificados que se considerarán pueden describirse heurísticamente como sigue:

Un ***sistema de partículas ramificado*** $N = \{N_t, t \geq 0\}$ en $\mathbb{R}^d$ es un sistema de partículas multiplicativo en el cual las partículas están sujetas a movimiento y ramificación aleatorios en $\mathbb{R}^d$, con los siguientes elementos:

a) *Movimiento espacial.* Cada partícula, independientemente del resto, sigue un movimiento en $\mathbb{R}^d$ de acuerdo a un proceso de Markov con generador infinitesimal $\mathcal{A}$.

b) *Tasa de ramificación.* La probabilidad de que una partícula localizada en $x \in \mathbb{R}^d$ en el tiempo t se ramifique en el intervalo $[t, t+\delta t)$ es $V\delta t + \circ(\delta t)$. El parámetro V se denomina *tasa de ramificación.* Es decir, las partículas viven tiempos exponenciales con parámetro V.

c) *Mecanismo de ramificación.* Cuando una partícula se ramifica, ésta es reemplazada en el mismo lugar por un número aleatorio de descendencia, gobernado por una ley de ramificación. Así, si p_k es la probabilidad de que la partícula de lugar a k hijos, entonces
$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ s \in [0,1].$$

En general, se supondrá que la ley de ramificación tiene media y segundo momento factorial finitos, es decir $F'(1) < \infty$ y $F''(1) < \infty$.

Definición 21. *Sea $\mu \in \mathcal{N}$ y $N = \{N_t\}$ un SPMM con estado inicial $N_0 = \mu$. Entonces para toda $\varphi : G \to [0,1]$ tal que $1-\varphi \in C_K(G)$*
$$G_t(\varphi|\mu) := \int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} \exp\{< N, \log\varphi >\} P_t(dN|\mu), \qquad t \geq 0,$$
es el ***funcional generador de probabilidades de transición*** *(FGPT) de N, con estado inicial $N_0 = \mu$.*

Como antes, debido a la propiedad multiplicativa, para determinar el FGPT $G_t(\varphi|\mu)$ basta conocer $G_t(\varphi|x) \equiv G_t(\varphi|\delta_x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. De hecho, $\{N_t\}$ es SPMM si, y sólo si, para cualesquiera $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$ y $t \geq 0$, se cumple
$$G_t(\varphi|\eta_1+\eta_2) = G_t(\varphi|\eta_1)G_t(\varphi|\eta_2).$$
En particular, si $\eta = \sum_{i=1}^m l_i\delta_{x_i}$, entonces
$$G_t(\varphi|\eta) = \big(G_t(\varphi|x_1)\big)^{l_1}\cdots\big(G_t(\varphi|x_m)\big)^{l_m}, \quad t \geq 0. \tag{2.2}$$

Proposición 6. *El FGPT de un SPMM cumple la propiedad de semigrupo, es decir,*

$$\begin{aligned} G_{t+s}(\varphi|x) &= G_s(G_t(\varphi|\cdot)|x) = G_t(G_s(\varphi|\cdot)|x) \\ G_0(\varphi|x) &= \varphi(x) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Demostración. Usando *iii.* de la Definición 19 se obtiene

$$\begin{aligned} G_{t+s}(\varphi|x) &= \int_{\mathcal{N}} e^{<N,\log\varphi>} P_{t+s}(dN|x) \\ &= \int_{\mathcal{N}}\int_{\mathcal{N}} e^{<N,\log\varphi>} P_t(dN|N') P_s(dN'|x). \end{aligned}$$

Por lo observado anteriormente, si N es un SPMM, basta conocer las probabilidades de transición en los átomos, y además se puede suponer que N_0 es simple c.s. Así, por la propiedad multiplicativa se tiene que $G_t(\varphi|N') = \prod_{i\in I} G_t(\varphi|x_i)$, donde $N' = \sum_{i\in I}\delta_{x_i}$, por lo que

$$\begin{aligned} G_t(\varphi|N') &= e^{\sum_{i\in I}\log G_t(\varphi|x_i)} \\ &= e^{<N_t',\log G_t(\varphi|\cdot)>} \\ &= \int_{\mathcal{N}} e^{<N',\log G_t(\varphi|\cdot)>} P_s(dN'|x) \\ &= G_s(G_t(\varphi|\cdot)|x). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} G_0(\varphi|x) &= \int e^{<N,\log\varphi>} P_0(dN|x) \\ &= \int e^{<N,\log\varphi>} \delta_x(dN) \\ &= e^{<\delta_x,\log\varphi>} = \varphi(x). \end{aligned}$$

■

2.2. Ecuación de Moyal

Para probar que existen funciones de transición en $\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$ que cumplan las condiciones de la Definición 19 se utilizará el enfoque de Moyal [44], [45]. Otro enfoque, alternativo al de Moyal, es el de Ikeda, Nagasawa y Watanabe [31] el cual trata el caso de sistemas de partículas markovianos en espacios compactos.

Sea $N = \{N_t\}$ un SPMM sobre $\mathbb{R}^d$. Para llevar a cabo el método de Moyal, en esta sección se harán los siguientes supuestos:

1. $\mathbb{P}[N_t(\mathbb{R}^d) < +\infty] = 1\ \forall t \geq 0$, es decir el número de partículas del sistema en cualquier momento es finito c.s.

2. $N_t(\omega)$ es simple con probabilidad 1, $\forall t \geq 0$, es decir, para cada punto $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}[N_t(\{x\}) > 2] = 0$, o equivalentemente, cada punto en $x \in \mathbb{R}^d$ puede ser ocupado por a lo más una sola partícula.

3. $N = \{N_t\}$ es un proceso de Markov fuerte.

Con base en las hipótesis 1 y 2 de arriba, identificaremos cada medida finita simple, $\mu = \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n}$, con el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de sus átomos, donde $x_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \ldots, n$. Más precisamente, sea $\mathbb{R}^d$ el espacio de estados individual de la población. Cada estado de la población es un conjunto x^n de la forma

$$x^n := \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad x_i \in \mathbb{R}^d,$$

y representa una población compuesta por n partículas, con posiciones respectivas $x_i, i \in \{1,\ldots,n\}$. Obsérvese que $x^n \in (\mathbb{R}^d)^{(n)}$, donde $\left(\mathbb{R}^d\right)^{(n)} := \left(\mathbb{R}^d\right)^n / \sim$ es el producto cartesiano de $\mathbb{R}^d$ consigo mismo n veces, módulo permutación de coordenadas, i.e. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)})$ para cualquier permutación π de $\{1,\ldots,n\}$. Se define $(\mathbb{R}^d)^{(0)} := \{\phi\}$. Así se tiene que el espacio de estados de la población se define como el conjunto

$$\Omega_F := \left\{x^n : x^n \in \left(\mathbb{R}^d\right)^{(n)}, \, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{R}^d\right)^{(n)}.$$

Sea $N^* : \Omega_F \to \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$ el mapeo dado por

$$\omega = \{x_1, \ldots, x_n\} \longmapsto N^*(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i},$$

es decir

$$N^*(\omega, A) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}(A), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d). \tag{2.4}$$

Se sabe que (2.4) define una relación biunívoca entre Ω_F y el subespacio $\mathcal{N}_F^S(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$ de las medidas simples finitas; ver [45] (demostración del Teorema 3.1). En virtud de lo anterior, en los siguientes desarrollos se identificará al elemento $x^n = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \Omega_F$ con la medida $\sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{N}_F^S(\mathbb{R}^d)$. Considérese el espacio medible $(\Omega_F, \mathfrak{B})$, donde $\mathfrak{B} = (N^*)^{-1}\left(\left(\mathcal{N}_F^S(\mathbb{R}^d)\right) \cap \mathfrak{N}(\mathbb{R}^d)\right)$.

Sea $(\Omega_F, \mathfrak{B})$ el espacio medible definido arriba y N un SPMM con probabilidades de transición $P_t(A|x^k)$; $x^k \in \Omega_F$, $A \in \mathfrak{B}$, las cuales satisfacen [43] la ecuación integral

$$P_t(A|x^k) = P_t^0(A|x^k) + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \int_{(\mathbb{R}^d)^{(j)}} P_{t-s}(A|y^i) Q^{(j)}(dy^j, ds|x^k) \tag{2.5}$$

donde

- $P_t^0(A|x^k)$ es una sub-probabilidad de transición, es decir $P(\Omega_F|x^k) \leq 1$, y representa la probabilidad de transición (sin saltos en el tamaño de la población) de x^k a algún estado del conjunto A en un tiempo $t > 0$.
- $Q = \sum_{j=0}^{\infty} Q^{(j)}$ es la distribución conjunta del tiempo del primer salto, s, y del estado al cual se realiza el salto, y^j.

Es importante notar que el segundo término de (2.5) involucra las probabilidades de transición con saltos en el tamaño de la población, mientras que el primero corresponde a cambios en el estado del SPMM sin variación en el tamaño de la población.

La ecuación integral para las probabilidades de transición (2.5), puede expresarse en términos del FGPT. Para ello, basta multiplicarla por $e^{\sum_j \log \psi(x_j)}$, e integrar adecuadamente para obtener la expresión

$$G_t(\psi|x^k) = G_t^0(\psi|x^k) + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \int_{(\mathbb{R}^d)^{(j)}} G_{t-s}(\psi|y^j) Q^{(j)}(dy^j, ds|x^k). \tag{2.6}$$

La ecuación (2.6) se conoce como la ***Ecuación de Moyal***.

Ahora bien, usando la igualdad (2.2), se sigue que basta considerar la ecuación de Moyal para poblaciones iniciales del tipo δ_x. Así, si en (2.6) se toma el caso especial $k = 1$, es decir, $x^k = x \in \mathbb{R}^d$, entonces se obtiene la ***Ecuación de Skorohod***, dada por

$$G_t(\varphi|x) = G_t^0(\varphi|x) + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \int_{(\mathbb{R}^d)^{(j)}} \prod_{i=1}^{j} G_{t-s}(\varphi|y^i) Q^{(j)}(dy^j, ds|x) \tag{2.7}$$

donde $y^j = (y_1, \ldots, y_j)$.

En el siguiente teorema se dan condiciones para la existencia de solución de la ecuación (2.6).

Teorema 6 (Moyal). *Sea $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ y supóngase que P_t^0 y Q_t satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$G_t^0(\varphi|x)$ es el funcional generador de probabilidades de una sub probabilidad de transición $P_t^0(A|x)$, $A \subset \Omega_F$ y satisface la propiedad de semigrupo, esto es*
$$0 \leq P_t^0(\Lambda_F|x) \leq 1, \text{ y}$$
$$G_{t+s}^0(\varphi|x) = G_t^0(G_s^0(\varphi|\cdot)|x), \qquad s,t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$
2. *$Q_t(A|x) := \sum_{j=0}^{\infty} Q_t^j(A^{(j)}|x)$ donde $A^{(j)} = A \bigcap (\mathbb{R}^d)^{(j)}$, $Q_t(A|\cdot)$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$−medible $\forall A \in \mathfrak{B}$ y $Q_t(\cdot|x)$ es una subprobabilidad en $\mathfrak{B}$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$.*
3. *i. $P_t^0(\Omega_F|x) + Q_t(\Omega_F|x) = 1$, $\forall t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.*

   ii. $\forall s,t \geq 0$ satisface
$$Q_{t+s}(A|x) = Q_t(A|x) + \int_{\mathbb{R}^d} Q_s(A|y) P_t^0(dy|x)$$

Entonces

a) La relación recursiva
$$G_t^{(0)} = G_t^0,$$
$$G_t^{n+1}(\varphi|x) = G_t^0(\varphi|x) + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \int_{(\mathbb{R}^d)^{(j)}} \prod_{i=1}^{j} G_{t-u}^{(n)}(\varphi|y_i) Q^j(dy^j, du|x)$$
determina una sucesión no decreciente $\{G^{(n)}\}_n$ de funcionales que converge a una función $G_t^{\infty} \leq 1$, donde G_t^{∞} es la menor solución no negativa de (2.7) y satisface la propiedad de semigrupo
$$G_{t+s}(\varphi|x) = G_s(G_t(\varphi|\cdot)|x),$$
$$G_0(\varphi|x) = \varphi(x)$$

b) G_t^{∞} es el FGP de una sub-probabilidad de transicion, P_t^{∞} (es decir, $P_t^{\infty}(\Omega_F|x) \leq 1$).

Demostración. Ver [45], Teorema 3.1. ∎

2.3. Sobre soluciones *mild* de EDP no-lineales

Sea $(B, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $\{T_t, t \geq 0\}$ un semigrupo de operadores lineales en B con generador infinitesimal A y $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Borel medible y acotada. La solución *mild* de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = A\omega + F(t, \omega(t)), \qquad \omega(0) = \varphi, \ \varphi \in B,$$

si existe, es la solución de la ecuación integral

$$\omega(t,x) = T_t\varphi(x) + \int_0^t T_s F(t-s, \omega(t-s,\cdot))(x) ds. \tag{2.8}$$

Proposición 7. *Si $H_t(x,f) := H_t(x)$ es la solución de la ecuación diferencial parcial no lineal*

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} = (A - VI)\, H_t + VF(H_t), \qquad H_0 = f \in D(A), \tag{2.9}$$

donde $D(A)$ es el dominio de A. Entonces H_t satisface la forma integral

$$H(t) = e^{-Vt} T_t f + V \int_0^t e^{-V(t-s)} T_{t-s} F(H(s)) ds. \tag{2.10}$$

Demostración. Sea $g(s) := v_{t-s} H(s)$, $0 \le s \le T$, $T > 0$ y donde $v_t(x) = e^{-Vt} T_t f(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{ds} &= -\,(A - VI)\, v_{t-s} H(s) + v_{t-s} \frac{\partial H}{\partial s}(s) \\
&= -\,(A - VI)\, v_{t-s} H(s) + v_{t-s}\,(A - VI)\, H(s) + V v_{t-s} F(H(s)) \\
&= -v_{t-s}\,(A - VI)\, H(s) + v_{t-s}\,(A - VI)\, H(s) + V v_{t-s} F(H(s)) \\
&= V v_{t-s} F(H(s))
\end{aligned}$$

Integrando la última igualdad resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{dg}{ds} ds &= g(t) - g(0) \\
&= V \int_0^t v_{t-s} F(H(s)) ds \\
&= H(t) - v_t H(0).
\end{aligned}$$

De donde se sigue la forma integral

$$H(t) = e^{-Vt} T_t f + V \int_0^t e^{-V(t-s)} T_{t-s} F(H(s)) ds$$

■

Observaciones:

- La ecuación (2.10) sólo requiere condiciones de medibilidad para f e integrabilidad para la solución H. De ahí que, al no requerir que la solución sea suave, de existir, ésta es una solución más general que la solución a (2.9). Así, toda solución de (2.9) es solución de (2.10).
- Si (2.10) posee solución única en un intervalo $[0, T_{\max})$ tal solución se llama solución *mild* de (2.9). Si $T_{\max} = \infty$ la solución es una *solución global*, de lo contrario se denomina solución no global o bien, que explota en tiempo finito.
- Se tiene que (2.10) es la ecuación de Skorohod correspondiente a un SPMM en el que los individuos viven tiempos exponenciales de parámetro $V > 0$ y se mueven según una dinámica markoviana con semigrupo $\{T_t,\, t \ge 0\}$.

2.4. Procesos de Markov

Siendo de interés garantizar la existencia de sistemas de partículas Markovianos como los descritos en las secciones anteriores, se concluirá el capítulo enunciando algunos resultados sobre procesos de Markov con espacio de estados M, un espacio métrico general. Se observará que los espacios $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{M}_F$ satisfacen las hipótesis de los teoremas de está sección, de modo que la existencia de SPMM, es decir, de procesos estocásticos en dichos espacios, quedará fundamentada.

El siguiente teorema establece condiciones bajo las cuales, dada una función de transición, P, es posible garantizar la existencia de un proceso de Markov que tenga a P como su función de transición.

Teorema 7. *. Sea M localmente compacto, con base contable y $P_t(x,A)$ una función de transición de Markov en $(M,\mathfrak{B}(M))$, y $\{T_t\}$ el semigrupo de operadores lineales correspondiente. Sea C_0^∞ el espacio de funciones continuas que se desvanecen en $+\infty$. Si $\mathcal{T}_t C_0^\infty \subset C_0^\infty$ y $\mathcal{T}_t f \longmapsto f$ uniformemente en M cuando $t \to 0$ $\forall f \in C_0^\infty$, entonces existe un proceso de Markov $\{X\}_{t\geq 0}$, M-valuado, el cual es fuerte de Markov, càdlàg y tiene a P como función de transición*

$$P(X_t \in \Gamma | X_s) = P_{t-s}(X_s \in \Gamma), \quad c.s.$$

En términos de semigrupos, se tiene el siguiente resultado (ver [32]).

Teorema 8. *Sea M localmente compacto. Si $T_t : C_b(M) \to C_b(M)$ es un semigrupo de Feller tal que $T_t(C_0^\infty(M)) \subset C_0^\infty(M)$ y es fuertemente continuo en t sobre $C_0^\infty(M)$, entonces existe un proceso de Markov M-valuado X, con trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, M)$, tal que $\mathbb{E}_m[f(X_t)] = T_t f(m)$, $\forall f \in C(M)$, $m \in M$, donde $D(\mathbb{R}^+, M)$ es el espacio de funciones càdlàg de $\mathbb{R}^+$ en M.*

Observaciones:

1. Notar que una de las hipótesis en los dos teoremas de existencia es que M sea localmente compacto. Más adelante se verá que estos teoremas pueden aplicarse directamente cuando se consideran sistemas de partículas ramificadas con valores en $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ o $\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$, los cuales son localmente compactos.

2. Cuando M es localmente compacto, se sabe que
   - $C_K(M) \subset C_0^\infty(M) \subset C(M)$. Además $C_0^\infty(M)$ y $C(M)$ son espacios de Banach con la norma del supremo.
   - $C_K(M)$ es denso en $C_0^\infty(M)$.

3. Es importante observar que hipótesis del estilo de $\mathcal{T}_t C_0^\infty \subset C_0^\infty$, no necesariamente se cumplen para cualquier semigrupo y cualquier espacio de funciones. Por ejemplo, para $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, donde $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ son las funciones infinitamente diferenciables y rapidamente decrecientes y $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ es el espacio de las distribuciones de Schwartz, se sabe que Δ mapea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en sí mismo, es decir
   $$\Delta\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$
   y sin embargo, si $0 < \alpha < 2$ y $\Delta_\alpha = -(-\Delta)^{\alpha/2}$, se tiene que
   $$\Delta_\alpha(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \not\subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Lo observado en 3), motiva introducir los siguientes espacios de funciones, para los cuales se satisface dicha hipótesis si se considera al semigrupo de procesos α-estables simétricos con generador Δ_α.

Sea $\varphi_p(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{-p}$, $x \in \mathbb{R}^d$, y sean

$$C_p(\mathbb{R}^d) = \{\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ \text{continua y } \|\varphi\|_p = \sup_x \left|\frac{\varphi(x)}{\varphi_p(x)}\right| < +\infty\},$$

$$C_p(\dot{\mathbb{R}}^d) = \{\varphi : \dot{\mathbb{R}}^d \to \mathbb{R},\ \text{continua y } \lim_{|x|\to\infty} = \left|\frac{\varphi(x)}{\varphi_p(x)}\right| = c \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \varphi(\tau_p) = c\}.$$

Teorema 9. *(Dawson-Gorostiza, 1990) Sea $\{T_t\}_t$ el semigrupo de operadores en $L^2(\mathbb{R}^d)$ con generador infinitesimal Δ_α*

a) $\forall t \geq 0$ y $p > d/2$ (y adicionalmente $p < \frac{(d+\alpha)}{2}$, si $\alpha < 2$)

$$T_t(C_p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p) \hookrightarrow (C_p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p),$$

es lineal y acotado

b) $\forall \varphi \in C_p(\mathbb{R}^d)$ tal que el límite

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi_p(x)}$$

existe, la función $t \longmapsto T_t\varphi$ es una curva continua en

$$C_{p,0}(\mathbb{R}^d) = \left\{\varphi \in C(\mathbb{R}^d) : \frac{\varphi}{\varphi_p} \in C_0(\mathbb{R}^d)\right\}.$$

Demostración. Ver [10]. ■

2.4.1. Caracterización Martingala

En este apartado se introducen las definiciones y resultados básicos referentes al problema de la martingala para caracterizar procesos de Markov. Para mayores detalles ver [18].

A menos que se establezca la contrario, (M, r) denotará un espacio métrico general.

Definición 22. *Sea $X = \{X_t, t \geq 0\}$ proceso de Markov homogéneo definido en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con valores en M, con función de transición $P(t, \mu, \Gamma)$. Sea*

$$T(t)f(\mu) = \int_M f(\nu)P(t, \mu, d\nu), \quad f \in B_b(M).$$

Defínase

$$\hat{A} := \{(f, g) \in B_b(M) \times B_b(M) : T(t)f - f = \int_0^t T(s)g ds, \ \forall t \geq 0\}.$$

$\hat{A}$ se llama el ***generador completo*** *(full generator) de X.*

Observación:

- Nótese que $A \subset \hat{A}$ donde

$$A = \{(f, g) \in B_b(M) \times B_b(M) : \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t f - f}{t} = g \equiv Af\}$$

  es el generador infinitesimal de X.

Proposición 8. *Sea X un proceso de Markov progresivamente medible con valores en M y función de transición $P(t, x, \Gamma)$, y sean $\{T_t\}_{t\geq 0}$ y $\hat{A}$ los correspondientes semigrupo y generador completo de X. Si $(f, g) \in \hat{A}$, entonces*

$$H_t := f(X_t) - \int_0^t g(X_s)ds,$$

es una $\mathcal{F}_t^X$-martingala, donde $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Corolario 2. *Si X es un proceso de Markov respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$ con semigrupo $\{T_t\}$ y generador completo $\hat{A}$, entonces*

$$H_t = f(X_t) - \int_0^t g(X_s)ds$$

es $\mathcal{F}_t$-martingala $\forall (f,g) \in \hat{A}$. En particular, $\forall f \in B_b(M)$ tal que

$$Af = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t f - f}{t}$$

existe, se cumple que $\left\{f(X_t) - \int_0^t Af(X_s)ds\right\}_{t\geq 0}$ es $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala.

Demostración. Sea $(f,g) \in \hat{A}$. Entonces

$$\begin{aligned}
&E\left[f(X_{t+s}) - \int_0^{t+s} g(X_u)du|\mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t\right] - E\left[\int_0^t g(X_u)du|\mathcal{F}_t\right] - E\left[\int_t^{t+s} g(X_u)du|\mathcal{F}_t\right] \\
&= T_s f(X_t) - \int_0^s T_u g(X_t)du - \int_0^t g(X_u)du \\
&= T_s f(X_t) - f(X_t) - \int_0^s T_u g(X_t)du + f(X_t) - \int_0^t g(X_u)du \\
&= f(X_t) - \int_0^t g(X_u)du.
\end{aligned}$$

■

Stroock y Varadhan (ver [50], [51] y [52]) usan la propiedad de martingala establecida en la proposición anterior para caracterizar procesos de Markov asociados a un generador A.

Definición 23. *Sea $A \subset B_b(M) \times B_b(M)$. Se dice que X es una solución al problema de la martingala para A, si X es un proceso estocástico medible M-valuado definido sobre algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tal que para cada $(f,g) \in A$,*

$$H_t := f(X_t) - \int_0^t g(X_s)ds, \tag{2.11}$$

es una $\mathcal{F}_t^{X,*}$ martingala, donde

$$\mathcal{F}_t^{X,*} := \mathcal{F}_t^X \vee \sigma\left(\int_0^s h(X_u)du : s \leq t, h \in B_b(M)\right).$$

Si $\mathcal{G}_t \supset \mathcal{F}_t^{X,*}$ y (2.11) es martingala respecto a $\{\mathcal{G}_t\}$ para cada $(f,g) \in A$, entonces se dice que X es una solución al problema de la martingala para A con respecto a $\{\mathcal{G}_t\}$.
Si se específica una distribución inicial μ, medida de probabilidad en M, entonces se dice que X es solución al problema de la martingala para (A,μ) si también se cumple que $PX_0^{-1} = \mu$.

Definición 24. *Sea X un proceso con trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, M)$. Se dirá que P, una medida de probabilidad sobre $D(\mathbb{R}^+, M))$, es una* ***solución al problema de la martingala*** *para A (o para (A,μ)), si el proceso coordenado sobre $(D(\mathbb{R}^+, M), \mathcal{F}, P)$ definido por*

$$X(t,\omega) = \omega(t), \quad \omega \in D(\mathbb{R}^+, M), \quad t \geq 0,$$

es una solución del problema de la martingala para A (o para (A,μ)) según la definición anterior.

Observación. Para el caso en el que X es progresivo, se tiene que $\mathcal{F}_t^{X,*} = \mathcal{F}_t^X$, y si X es continuo por la derecha y adaptado, usando la Proposición 1.13 de [39], se sigue que X es progresivamente medible, por lo tanto se tiene la misma igualdad.

Proposición 9. *Un proceso medible X es una solución al problema de la martingala para A si, y sólo si,*

$$\mathbb{E}\left[\left(f(X_{t_{n+1}}) - f(X_{t_n}) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(X_s)ds\right)\prod_{k=1}^{n} h_k(X_{t_k})\right] = 0 \tag{2.12}$$

para todo $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$, $(f,g) \in A$ y $h_1, \ldots, h_n \in B_b(M)$.

De lo anterior, se sigue que un proceso medible que es solución a un problema de martingala hace referencia a sus distribuciones finito-dimensionales. En particular, cualquier modificación medible de una solución del problema de la martingala para A es también una solución.

Proposición 10. *Si X es de Markov homogéneo de generador $\mathcal{A}$ y trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, M)$, entonces $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_t^X$, $t \geq 0$ y*

$$f(X_t) - \int_0^t \mathcal{A}f(X_s)ds, \quad t \geq 0,$$

es $\{\mathcal{F}_t^X\}$-martingala $\forall f \in Dom(\mathcal{A}) \cap B_b(M)$, es decir X es solución del problema de la martingala para

$$A = \{(f, \mathcal{A}f) : f \in Dom(\mathcal{A}) \cap B_b(M)\}.$$

2.5. Resumen

El apartado anterior estableció los conceptos y resultados necesarios para los sistemas de partículas ramificadas, dentro de los más importantes se tienen los siguientes:

1. En un modelo de población, cada estado de la población $\{x_i, i \in I\}$, $I \subset \mathbb{N}$, puede identificarse con los átomos de una medida simple en $\mathcal{N}$. De modo que un SPM corresponde a un proceso de Markov con valores en el espacio de medidas puntuales, $\mathcal{N}$.

2. Para el caso de SPMM, las probabilidades de transición homogéneas satisfacen la *ecuación integral* (2.5) (como la denomina Moyal en [45]).

3. En términos del FGPT, la ecuación (2.5) se transforma en la ecuación de Moyal, y utilizando la propiedad multiplicativa (2.2), es suficiente considerar la ecuación de Skorohod (2.7).

4. Así, determinar la existencia de un proceso con función de transición P, implica determinar la existencia de una solución a la ecuación (2.5). Sin embargo, por lo anterior, esto es equivalente a determinar la existencia de una solución para la ecuación de Skorohod. Las condiciones para que dicha solución exista, se establecen en el Teorema 6.

5. Para una dinámica espacial determinada, es posible expresar la ecuación de Skorohod en términos de EDP no lineales (2.9), cuya solución queda expresada en términos del semigrupo asociado a la parte espacial del sistema, y de F, la función generadora de probabilidades de la dinámica de ramificación. En el capítulo siguiente, se prestará atención a un caso particular de SPMM, los denominados *procesos de difusión ramificados*, en los cuales la dinámica espacial corresponde a un movimiento α-estable simétrico.

6. La existencia de procesos de Markov con espacio de estados $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$, y trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_F)$, queda garantizada con el Teorema 8.

7. Para el caso de procesos de Markov con valores en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$, para poder hacer uso del Teorema 8, Iscoe (1986) utiliza el espacio $\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$, el cual es localmente compacto.

8. Los resultados y definiciones sobre caracterización martingala serán utilizados en los últimos capítulos, con $M = D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$, y para aquellos casos en los que se requiera que el espacio sea localmente compacto, con $M = D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$.

Notas Adicionales

En [43] se encuentran los resultados principales sobre procesos de Markov discontinuos, en este artículo Moyal establece las condiciones bajo las cuales existe una solución para la ecuación (2.5). En [44] se establece la construcción del espacio de probabilidad para procesos de población y se da la caracterización como procesos de Markov con valores en el espacio de medidas de contar y finalmente, en [45] se establece lo referente a procesos de población multiplicativos.

El espacio de probabilidad definido al inicio de este capítulo para los procesos de población es llamado *proceso puntual* en [44], sin embargo no debe confundirse con el concepto de campo aleatorio enunciado en el capítulo 1.

Capítulo 3

Movimiento α-estable Ramificado

Debido a que interesa obtener el superbrowniano como límite de difusión de movimientos Brownianos ramificados (MBR), este capítulo tiene como objetivo definir y dar algunos resultados relevantes para un proceso más general, el Movimiento α-estable Ramificado, que será denotado por MR^α, para $\alpha \in (0,2]$. Esté tipo de procesos son SPMM conocidos como *procesos de difusión ramificados*. La fuente bibliográfica corresponde a [17] y [36].

3.1. Descripción Heurística

El ***Movimiento α-estable Ramificado*** (MR^α), para $0 < \alpha \leq 2$, es un proceso con valores en el espacio de medidas de contar en $\mathbb{R}^d$, que inicia con una sola partícula, δ_x, en el que cada individuo se desplaza independientemente siguiendo un movimiento α-estable simétrico en $\mathbb{R}^d$, y los tiempos de vida de las partículas son exponenciales. Así, el MR^α, queda determinado por los siguientes elementos:

1. ***Estado Inicial***. El estado inicial del sistema es una única partícula en la posición x, para $x \in \mathbb{R}^d$, es decir, $N_0 = \delta_x$.

2. ***Tasa de Ramificación***. El Tiempo de vida de las partículas es exponencial de parámetro V, por lo que la probabilidad de que muera en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ es $V\delta t + \circ(\Delta t)$.

3. ***Movimiento Espacial*** Al transcurrir el tiempo cada partícula se desplaza, independientemente de las otras, siguiendo un Movimiento α-estable esféricamente simétrico en $\mathbb{R}^d$, con familia de densidades de transición $p(t,x,y) := P_t(y-x)$ cuya función característica es

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot y} P_t(x)dx = \exp(-t|y|^\alpha), \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

   El semigrupo $\{T_t^\alpha : t > 0\}$ asociado a las probabilidades de transición es

$$(T_t^\alpha \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P_t(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

   para cada $\varphi \in B_b(\mathbb{R}^d)$. El generador infinitesimal de $\{T_t^\alpha : t \geq 0\}$ es la potencia fraccionaria $\Delta_\alpha = -(-\Delta)^{\alpha/2}$, del Laplaciano en $\mathbb{R}^d$ y $D(\Delta_\alpha)$ su dominio. Para $\alpha = 2$, se denota $\Delta_2 := \frac{1}{2}\Delta$.

4. ***Mecanismo de Ramificación***. Cuando la partícula muere, da origen a k individuos con probabilidades q_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$[1]. La ramificación es *local*, es decir, la descendencia aparece en el lugar

[1]En el caso en el que $q_0 = q_2 = \frac{1}{2}$, se denomina ramificación binaria crítica

donde murió su progenitora, y ellas se desplazan y se reproducen independientemente unas de otras, con la misma dinámica que sus progenitoras. Su función generadora de probabilidades,

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k q_k, \quad |s| \le 1, \tag{3.1}$$

es tal que su primer y segundo momentos factoriales, m_1 y m_2, son finitos.

Observaciones:

1. Debido a que la tasa de ramificación es exponencial y a que el movimiento α-estable es un proceso de Markov, el MR^α hereda la propiedad Markoviana. De hecho, en la definición anterior podría considerarse cualquier proceso de Markov para el movimiento espacial de las partículas.

2. Si se considera que la población inicial es una medida de contar $\mu \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$, por la independencia, se sigue que MR^α es un SPMM, es decir se cumple (2.1).

3. Para el movimiento de las partículas, en el caso $\alpha = 2$, se obtiene el movimiento browniano estándar en $\mathbb{R}^d$, de modo que sus probabilidades de transición son las densidades gaussianas

$$P_t(y-x) = \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{2t}\right), \qquad t>0, \quad P_0(y-x) = \delta_{y-x}.$$

y el semigrupo $\{T_t : t \ge 0\}$ asociado a las probabilidades de transición $\{P_t(x) : t > 0\}$ tiene como generador infinitesimal al operador $\frac{1}{2}\Delta$, donde Δ es el Laplaciano en $\mathbb{R}^d$ y $D(\Delta)$ su dominio.

3.2. Caracterización mediante la ecuación de Skorohod

En esta sección se dará una caracterización rigurosa del MR^α , mediante su FGPT.

Proposición 11. *El proceso $N = \{N_t\}_{t\ge 0}$ es un MR^α en $\mathbb{R}^d$, con $N_0 = \delta_x$, si su FGPT, $G_t(\varphi, x)$, es la única solución de la ecuación de Skorohod (2.7),*

$$G_t(\varphi|x) = e^{-Vt} T_t^\alpha \varphi(x) + V \int_0^t e^{-Vu} T_u^\alpha (F[G_{t-u}(\varphi|\cdot)])(x) du, \tag{3.2}$$

donde $\{T_t^\alpha, t \ge 0\}$ es el semigrupo asociado al movimiento espacial de las partículas.

Demostración. Usando la ecuación (2.5) se tiene que las probabilidades de transición satisfacen la identidad

$$P_t(A|x) = P_t^0(A|x) + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \int_{(\mathbb{R}^d)^j} P_{t-s}(A|y^i) Q^{(j)}(dy^j, ds|x). \tag{3.3}$$

Dadas las características del sistema, es posible determinar $P_t^0(A|x)$ y $Q^{(j)}(dy^j, ds|x)$. Para la parte correspondiente a la probabilidad de transición sin saltos en el tamaño de la población, se tiene

$$P_t^0(d\mu|x) = P_t^0(d\delta_y|x) = e^{-Vt} P_t(y-x) dy, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \tag{3.4}$$

donde $P_t(y-x)$ es la probabilidad de desplazarse de la posición x a la posición y, determinada por el movimiento α-estable en $\mathbb{R}^d$, para $0 < \alpha \le 2$. Así, $P_t^0(dy|x)$ se interpreta como la probabilidad de que la partícula migre de la posición x a la posición y con probabilidad $P_t(y-x)$) en el intervalo $(0,t]$ y no se ramifique (para no tener saltos) con probabilidad e^{-Vt}.

Por otra parte, la distribución conjunta del primer tiempo de salto, u, y el estado inmediato $y^j = \delta_{(y_1,\ldots,y_j)} \in (\mathbb{R}^d)^j$, dado que la partícula se encuentra en la posición $x \in \mathbb{R}^d$, es

$$Q^j(dy^j, du|x) = \begin{cases} e^{-Vu} V q_0 du, & j = 0 \\ \\ Ve^{-Vu} q_j P_u(y-x)\delta_{(y_1,\ldots,y_j)} dy du, & j = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.5}$$

Es decir, la probabilidad de que ocurran saltos en el tamaño de la población es igual a no ramificarse hasta el tiempo u con probabilidad e^{-Vu}, y con tasa V ramificarse en el intervalo de tiempo du, ocasionando

a) la extinción del sistema con probabilidad q_0, o bien

b) con probabilidad q_j dar origen a j partículas localizadas en la posición en la cual muere y se ramifica la partícula progenitora, y, la cual se desplazo a dicha posición con probabilidad $P_u(y-x)$. Las partículas hijas serán denotada por $\delta_{(y_1,\ldots,y_j)}(dy^j)$, donde cada y_i debe ser igual a y.

Así, sustituyendo (3.4) y (3.5) en la expresion (3.3), se obtiene

$$P_t(A|x) = e^{-Vt} P_t(y-x)dy + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \int_{(\mathbb{R}^d)^j} P_{t-s}(A|y^i) V e^{-Vu} q_j P_u(y-x)\delta_{(y_1,\ldots,y_j)}(dy^j) dy du.$$

Multiplicando por el factor $e^{\langle \mu, \log\varphi\rangle}$ e integrando sobre todo el espacio, con $\varphi \in B_b(\mathbb{R}^d)$ y usando el teorema de Tonelli-Fubini se tiene

$$G_t(\varphi|x) = \tag{3.6}$$
$$\int e^{<\mu,\log\varphi>} e^{-Vt} P_t(y-x)dy + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \int_{(\mathbb{R}^d)^j} \int e^{<\mu,\log\varphi>} P_{t-s}(A|y^i) V e^{-Vu} q_j P_u(y-x)\delta_{(y_1,\ldots,y_j)}(dy^j) dy du.$$

Obsérvese que, en el primer sumando, si se inicia con una población $\mu = \delta_y$, se tiene que $e^{\langle \mu, \log\varphi\rangle} = \varphi(y)$. Por otra parte, usando que el proceso es multiplicativo se sigue que

$$\int e^{<\mu,\log\varphi>} P_{t-s}(A|y^i) = \left[G_{t-u}(\varphi|y)\right]^j.$$

Con lo anterior se tiene que

$$G_t(\varphi|x) = \int \varphi(y) e^{-Vt} P_t(y-x)dy + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} V e^{-Vu} \left[G_{t-u}(\varphi|y)\right]^j q_j P_u(y-x) dy du.$$

Usando que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left[G_{t-u}(\varphi|y)\right]^j q_j = F\left(G_{t-u}(\varphi|y)\right),$$

y que $T_t^\alpha f(x) = \int f(y) P_t(y-x)dy$, se obtienen las igualdades

$$\begin{aligned} G_t(\varphi|x) &= \int \varphi(y) e^{-Vt} P_t(y-x)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} V e^{-Vu} P_u(y-x) F\left(G_{t-u}(\varphi|y)\right) dy du \\ &= e^{-Vt} T_t^\alpha \varphi(x) + V \int_0^t e^{-Vu} \int_{\mathbb{R}^d} F\left(G_{t-u}(\varphi|y)\right) P_u(y-x) dy du \\ &= e^{-Vt} T_t^\alpha \varphi(x) + V \int_0^t e^{-Vu} T_u^\alpha \left[F\left(G_{t-u}(\varphi|\cdot)\right)\right](x) du, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es la expresión (3.2) que se deseaba encontrar.

Resta garantizar la existencia de una solución para (3.6). La existencia y unicidad, se establece por cualesquiera de los dos métodos siguientes:

1. Usando el Teorema 6, se sigue que (2.6) posee una única solución (llamada por Watanabe la ***solución probabilística***).

2. El segundo método es observando que, en términos de semigrupos, la ecuación (3.2) es la forma integral de una EDP semi-lineal del tipo de la ecuación (2.10) establecido en el capítulo anterior, la cual tiene solución única ([46], cap. 6) cuando F es Lipschitz continua (lo cual es cierto pues F es una función generadora de probabilidades). Así, usando (2.9), se tiene que el FGPT del MR^{α} es la única solución *mild* a la EDP siguiente

$$\frac{\partial G_t(\varphi|x)}{\partial t} = (\Delta_\alpha - VI)\, G_t(\varphi|x) + VF(G_t(\varphi|x)),$$
$$G_0(\varphi|\cdot) = \varphi \in D(\Delta_\alpha).$$

■

Nota 5. *Con lo anterior se ha garantizado la existencia del MR^{α}, para $N_0 = \delta_x$. El caso en el que $N_0 = \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, no necesariamente finita, será comentado al final de esta sección, haciendo uso del Teorema 7 y resultados sobre el espacio de medidas $p-$temperadas.*

3.3. Funcional de Laplace

Recuérdese que, del mismo modo en el que la transformada de Laplace permite caracterizar a las variables aleatorias no negativas, el funcional de Laplace lo hace en el caso de medidas aleatorias no negativas. Es por ello que en esta sección se determinará el funcional de Laplace del MR^{α}. Se muestran los resultados para los casos en los que la población inicial es una única partícula o cuando es un campo aleatorio de Poisson, y se generalizará para una medida aleatoria puntual (no necesariamente de Poisson).

Funcional de Laplace del MR^{α} con $N_0 = \delta_x$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Proposición 12. *Sea $N = \{N_t\}_{t\geq 0}$ un MR^{α} con $0 < \alpha \leq 2$, tal que $N_0 = \delta_x$ para alguna $x \in \mathbb{R}^d$. Entonces el funcional de Laplace de N cumple la ecuación integral no lineal*

$$L_t(\varphi|x) := \mathbb{E}\big[e^{-<N_t,\varphi>}\big|N_0 = \delta_x\big] = e^{-Vt}\left(T_t^{\alpha} e^{-\varphi}\right)(x) + V\int_0^t e^{-Vu} T_u^{\alpha}(F[L_{t-u}(\varphi|\cdot)])(x)du, \tag{3.7}$$

es decir, $L_t(\varphi|\cdot)$ es la solución mild de la EDP no lineal

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = (\Delta_\alpha - V)\, u_t + VF(u_t), \quad t > 0,$$
$$u_0 = e^{-\varphi}, \quad \varphi \in B_b^{+}(\mathbb{R}^d). \tag{3.8}$$

Demostración. Usando la relación (1.5) del FGPT y el FL de N, se tiene que $G_t(e^{-\varphi}|x) = L_t(\varphi|x)$. Entonces, sustituyendo $e^{-\varphi}$ en la ecuación de Skorohod (2.7), se obtiene el funcional de Laplace de N dado por la expresión

$$L_t(\varphi|x) = e^{-Vt}\left(T_t^{\alpha} e^{-\varphi}\right)(x) + V\int_0^t e^{-Vu} T_u^{\alpha}(F[L_{t-u}(\varphi|\cdot)])(x)du.$$

Para demostrar la última afirmación basta observar que la igualdad anterior es de la forma (2.10) y por lo tanto satisface (3.8) con $u_t(x) = L_t(\varphi|x)$.

■

La ecuación (3.7) suele denominarse ***ecuación log-Laplace*** del MR^{α} .

Funcional de Laplace del MR^{α} con $N_0 \sim Poisson(\lambda)$

Proposición 13. *Sea $N = \{N_t\}_{t\geq 0}$ un MR^{α} con $0 < \alpha \leq 2$, tal que N_0 es un campo de Poisson con intensidad λ, donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$. Entonces el funcional de Laplace de N_t es*

$$L_t(\varphi) := \mathbb{E}\left[e^{-\langle N_t,\varphi\rangle}\right] = e^{-\langle\lambda,v_t\rangle}, \quad \varphi \in B_b^+(\mathbb{R}^d),\ t \geq 0,$$

donde $v_t(\cdot) = 1 - L_t(\varphi|\cdot)$ es la única solución de evolución de la EDP

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_t}{\partial t} &= \Delta_\alpha v_t(x) - V\left[F(1-v_t(x)) - (1-v_t(x))\right],\\ v_0 &= 1-e^{-\varphi}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Demostración. Sea $N = \{N_t\}_{t\geq 0}$ como en el enunciado de la proposición. Sea $\{K_j\}_{j\geq 1}$ una sucesión de conjuntos compactos en $\mathbb{R}^d$ tales que $K_j \subset K_{j+1}$, $\forall i$ y $\mathbb{R}^d = \cup_j K_j$. Sea

$$N_0^j(\cdot) = N_0(\cdot \cap K_j),\ \forall j \geq 1.$$

Entonces la población inicial sobre cada compacto es finita casi seguramente, es decir

$$\mathbb{P}[N_0^j(\mathbb{R}^d) < +\infty] = 1, \qquad \forall j \geq 1.$$

La ventaja de considerar la medida restringida a K_j, $N_0^j(\cdot)$, radica en que para este tipo de conjuntos se tiene una representación de las medidas puntuales dada en (1.2).
Sean

$$0 \leq t_i \leq t_2 \leq \cdots \leq t_m, \quad \varphi_1,\cdots,\varphi_m \in C_K^+(\mathbb{R}^d), \quad u_1,u_2,\cdots,u_m \in \mathbb{R}^+,\ m = 1,2,\ldots.$$

Considérese lo siguiente

$$\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^m u_i<N_{t_i},\varphi_i>}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^m u_i<N_{t_i},\varphi_i>}|N_0^j(\mathbb{R}^d)=n\right]\mathbb{P}[N_0^j(\mathbb{R}^d)=n].$$

Usando que la suma en la exponencial es invariante respecto a permutaciones de los índices , al condicionar a que el campo Poisson tenga n partículas en K_j, se tienen n v.a. uniformes independientes en el compacto K_j, las cuales corresponden a la distribución espacial de dichas partículas. Luego,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^m u_i<N_t,\varphi_i>}|N_0^j(\mathbb{R}^d)=n\right] &= \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda(K_j)}\int_{K_j}\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^m u_i<N_{t_i},\varphi>}\middle|N_0=\delta_{x_k}\right]dx_k\\ &= \frac{1}{(\lambda(K_j))^n}\left(\int_{K_j}\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^m u_i<N_{t_i},\varphi_i>}\middle|N_0=\delta_x\right]dx\right)^n,\end{aligned}$$

mientras que

$$\mathbb{P}[N_0^j(\mathbb{R}^d)=n] = e^{-\lambda(K_j)}\frac{\lambda(K_j)^n}{n!}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^m u_i<N_{t_i},\varphi_i>}\right] &= e^{-\lambda(K_j)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_{K_j}\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^m u_i<N_{t_i},\varphi_i>}\middle|N_0=\delta_x\right]dx\right)^n\\ &= e^{-\lambda(K_j)}\exp\left(\int_{K_j}\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^m u_i<N_{t_i},\varphi_j>}\middle|N_0=\delta_x\right]dx\right)\\ &= \exp\left[\int_{K_j}\left(\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^m u_i<N_{t_i},\varphi_i>}\middle|N_0=\delta_x\right]-1\right)\lambda(dx)\right]\\ &= \exp\left(-\left\langle\lambda|_{K_j},1-\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^m u_i<N_{t_i},\varphi_i>}\middle|N_0=\delta_{(\ \cdot\ )}\right]\right\rangle\right)\\ &= \exp\left(-\left\langle\lambda|_{K_j},1-\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^m u_i<N_{t_i}^{(\bullet)},\varphi_i>}\right]\right\rangle\right),\end{aligned}$$

donde $N_{t_i}^{(\cdot)}$ denota al MR^α al tiempo t, iniciando con un individuo δ_x. La expresión anterior corresponde al funcional de Laplace de N_t, iniciando con un un campo de Poisson restringído a K_j. Haciendo $K_j \uparrow \mathbb{R}^d$, se obtiene

$$\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^m u_i <N_{t_i}, \varphi_i>}\right] = \exp\left(-\left\langle \lambda, 1 - \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^m u_i <N_{t_i}^{(\cdot)}, \varphi_i>}\right]\right\rangle\right). \tag{3.10}$$

Tomando $m = 1$ y $u = 1$,

$$\mathbb{E}\left[e^{-<N_t,\varphi>}\right] = \exp\left(-\left\langle \lambda, 1 - \mathbb{E}\left[e^{-<N_t^{(\cdot)},\varphi>}\right]\right\rangle\right) = \exp\left(-\left\langle \lambda, 1 - L_t(\varphi|\,\cdot\,)\right\rangle\right).$$

Ahora, denótese $v_t(x) := 1 - u_t(x)$, donde $u_t(x)$ es la solución *mild* de (3.8). Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_t(x)}{\partial t} &= -\frac{\partial u_t(x)}{\partial t} \\
&= -\left(\Delta_\alpha - V\right) u_t + VF(u_t) \\
&= -\left(\Delta_\alpha - V\right)(1 - v_t(x)) + VF(1 - v_t(x)) \\
&= -\Delta_\alpha(1 - v_t(x)) + V(1 - v_t(x)) + VF(1 - v_t(x)) \\
&= \Delta_\alpha(v_t(x)) - V(1 - v_t(x)) + VF(1 - v_t(x)) \\
&= \Delta_\alpha(v_t(x)) + V\Big(F(1 - v_t(x)) - (1 - v_t(x))\Big).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $v_t(\cdot) = 1 - L_t(\varphi|\cdot)$ es la única solución de evolución de la EDP (3.9), es decir

$$v_t(x) = T_t^\alpha\left(1 - e^{-\varphi}\right)(x) - V\int_0^t T_s^\alpha\left[F(1 - v_{t-s}(\cdot)) - (1 - v_{t-s}(\cdot))\right](x)ds.$$

■

Para aquellos casos en los que se tenga una expresión explícita para el generador de probabilidades, es factible encontrar una expresión explícita para la EDP. Por ejemplo, cuando la ramificación es binaria crítica, la función generadora es de la forma

$$F(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s^2, \quad s \in [0,1],$$

y así, la EDP (3.9) satisface

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_t}{\partial t} &= \Delta_\alpha v_t(x) - V\left[F(1 - v_t(x)) - (1 - v_t(x))\right] \\
&= \Delta_\alpha v_t(x) - V\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - v_t(x))^2 - (1 - v_t(x))\right] \\
&= \Delta_\alpha v_t(x) - V\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2v_t(x) + v_t^2(x)) - (1 - v_t(x))\right] \\
&= \Delta_\alpha v_t(x) - V v_t^2(x).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_t}{\partial t} &= \Delta_\alpha v_t(x) - \frac{V}{2}v_t^2(x) \\
v_0 &= 1 - e^{-\varphi}.
\end{aligned}$$

Funcional de Laplace de MR^α con $N_0 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$.

La siguiente proposición establece un resultado análogo al caso anterior, para un MR^α cuyo estado inicial es cualquier medida puntual.

Proposición 14. *Sea $N = \{N_t, t \geq 0\}$, un MR^α , donde $N_0 = \mu \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[e^{-<N_t,\varphi>}|N_0 = \mu\right] = e^{<\mu,\log(1-v_\varphi(t))>}$$

para $\varphi \in C_K^+(\mathbb{R}^d)$, donde v_φ es la (única) solución global de evolución de (3.9).

Demostración. Por la propiedad de ramificación, se puede suponer que μ es simple y $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ en el compacto $A \subset \mathbb{R}^d$. Entonces, restringiendo μ a A resulta

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-<N_t,\varphi>}|N_0 = \mu\right] &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[e^{-<N_t,\varphi>}|N_0 = \delta_{x_i}\right] \\
&= \exp\left\{\log\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{-<N_t^{x_i},\varphi>}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\sum_{i=1}^n \log\left(\mathbb{E}e^{-<N_t^{x_i},\varphi>}\right)\right\} \\
&= e^{<\mu,\log u_\varphi(t)>},
\end{aligned}$$

donde u cumple (3.8). Luego, haciendo $A \uparrow \mathbb{R}^d$ y poniendo $v_\varphi(t,x) = 1 - u_t(x)$ se sigue el resultado. ∎

3.4. Intensidad del MR^α

La ecuación de Skorohod y el funcional de Laplace, permiten el cálculo de momentos para el proceso N. A continuación se derivan las expresiones para la intensidad del MR^α para los tres casos de la sección anterior.

Intensidad del MR^α con $N_0 = \delta_x$

Teorema 10. *Sea $N^x = \{N_t^x\}_{t\geq 0}$ un MR^α tal que $N_0 = \delta_x$. Entonces $\forall f \in B_b(\mathbb{R}^d)$,*

$$\mathbb{E} < N_t^x, f > := \mathbb{E}_x < N_t, f > = e^{V(m-1)t} T_t^\alpha f(x), \qquad t \geq 0, \tag{3.11}$$

donde m es el primer momento de la ley de ramificación F.

Demostración. De manera similar al caso de variables aleatorias, la intensidad del MR^α se obtiene como la derivada del FGPT, es decir,

$$\left.\frac{d}{d\theta} G_t\left(e^{-\theta f}|x\right)\right|_{\theta=0} = \left.\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}\left[e^{\langle N_t^x,-\theta f\rangle}\right]\right|_{\theta=0}, \tag{3.12}$$

donde $G_t(\varphi|x) := \mathbb{E}\left[e^{<N_t^x,\log\varphi>}\right]$. Así, derivando de la manera usual el lado derecho en (3.12) se sigue la primera igualdad:

$$\left.\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}\left[e^{-<N_t^x,f>\theta}\right]\right|_{\theta=0} = \left.\mathbb{E}\left[e^{-<N_t^x,f>\theta} < N_t, f >\right]\right|_{\theta=0} = -\mathbb{E} < N_t^x, f >, \qquad \theta > 0.$$

Por otra parte, usando la relación entre el FGPT y el funcional de Laplace de N,

$$\mathbb{E}\left[e^{-\langle N_t^x, f\rangle\theta}\right] = L_t(\theta f) = G_t(e^{-\theta f}|x), \tag{3.13}$$

y aplicando (3.2) con $\varphi \equiv e^{-\theta f}$, resulta

$$\begin{aligned} G_t(e^{-\theta f}|x) &= e^{-Vt}T_t^\alpha e^{-\theta f} + V\int_0^t e^{-Vu}T_u^\alpha \left[F\left(G_{t-u}\left(e^{-\theta f|\cdot}\right)\right)\right](x)du \\ &= e^{-Vt}T_t^\alpha e^{-\theta f} + V\int_0^t e^{-Vu}T_u^\alpha \left[F\left(\mathbb{E}\left[e^{-\left\langle N_{t-u}^{(\bullet)}, f\right\rangle\theta}\right]\right)\right](x)du. \end{aligned}$$

Derivando la expresión anterior respecto a θ y usando (3.13), se siguen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}G_t\left(e^{-\theta f}|x\right)\Big|_{\theta=0} &= \frac{d}{d\theta}e^{-Vt}T_t^\alpha e^{-\theta f}\Bigg|_{\theta=0} + \frac{d}{d\theta}V\int_0^t e^{-Vu}T_u^\alpha \left[F\left(\mathbb{E}\left[e^{-\left\langle N_{t-u}^{(\bullet)}, f\right\rangle\theta}\right]\right)\right](x)du\Bigg|_{\theta=0} \\ &= e^{-Vt}\frac{d}{d\theta}T_t^\alpha e^{-\theta f}\Bigg|_{\theta=0} + V\int_0^t e^{-Vu}\frac{d}{d\theta}T_u^\alpha \left[F\left(\mathbb{E}\left[e^{-\left\langle N_{t-u}^{(\bullet)}, f\right\rangle\theta}\right]\right)\right](x)du\Bigg|_{\theta=0}. \end{aligned}$$

Observar que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}T_t^\alpha e^{-\theta f}\Bigg|_{\theta=0} &= \frac{d}{d\theta}\int e^{-\theta f(y)}P_t(y-x)dy\Bigg|_{\theta=0} \\ &= \int \frac{d}{d\theta}e^{-\theta f(y)}\Bigg|_{\theta=0} P_t(y-x)dy \\ &= \int -f(y)e^{-\theta f(y)}\Bigg|_{\theta=0} P_t(y-x)dy \\ &= \int -f(y)P_t(y-x)dy = -T_t^\alpha f(x), \end{aligned}$$

y también, si $\left.\dfrac{dF}{ds}\right|_{s=1} = m < +\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}T_u^\alpha \left[F\left(\mathbb{E}\left[e^{-\left\langle N_{t-u}^{(\bullet)}, f\right\rangle\theta}\right]\right)\right](x)du\Bigg|_{\theta=0} &= T_u^\alpha\left[\frac{d}{d\theta}F\left(\mathbb{E}\left[e^{-\left\langle N_{t-u}^{(\bullet)}, f\right\rangle\theta}\right]\right)\Bigg|_{\theta=0}\right](x)du \\ &= T_u^\alpha\left[F\left(\mathbb{E}\left[e^{-\left\langle N_{t-u}^{(\bullet)}, f\right\rangle\theta}\right]\right)\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}\left[e^{-\left\langle N_{t-u}^{x}, f\right\rangle\theta}\right]\Bigg|_{\theta=0}\right](x)du \\ &= T_u^\alpha\left[F\left(\mathbb{E}\left[e^{-\left\langle N_{t-u}^{(\bullet)}, f\right\rangle\theta}\right]\right)\mathbb{E}\left[-e^{-\langle N_{t-u}^{x}, f\rangle\theta} < N_{t-u}, f >\right]\Bigg|_{\theta=0}\right](x)du \\ &= T_u^\alpha\Big[F(1)\mathbb{E}- < N_{t-u}^x, f > \Big](x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo los cálculos anteriores,

$$\mathbb{E}_x < N_t, f > = \frac{d}{d\theta}G_t\left(e^{-\theta f}|x\right)\Big|_{\theta=0} = e^{-Vt}T_t^\alpha f(x) + Vm\int_0^t e^{-Vu}T_u^\alpha\left(\mathbb{E}. < N_{t-u}, f >\right)(x)du. \tag{3.14}$$

Ahora supóngase que $f \geq 0$ (si no fuera el caso, se descompone a f en su parte positiva y parte negativa y se usa linealidad). Aplicando la transformada de Laplace L en (3.14), se tiene que si $L(\mathbb{E}_x < N_{(\cdot)}, f >, \lambda) := F_\lambda$, entonces

$$F_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-Vt}T_t^\alpha f(x)dt + Vm\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-Vt}T_t^\alpha L(\mathbb{E}_\bullet < N_\bullet, f >, \lambda)dt.$$

Teniendo en cuenta [46] que el resolvente de $(\Delta_\alpha - VI)$ en λ, es

$$R(\Delta_\alpha - VI, \lambda) = [\lambda I - (\Delta_\alpha - VI)]^{-1},$$

y aplicado a φ da

$$R(\Delta_\alpha - VI, \lambda)\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(e^{-Vt}T_t^\alpha\right)\varphi dt,$$

F_λ se reescribe como

$$F_\lambda = R(\Delta_\alpha - VI, \lambda) f + VmR(\Delta_\alpha - VI)F_\lambda. \tag{3.15}$$

Aplicando el inverso del resolvente a la identidad anterior se obtiene

$$\Big[\lambda I - (\Delta_\alpha - VI)\Big]F_\lambda = f + VmF_\lambda,$$

es decir

$$\Big[\lambda I - (\Delta_\alpha + V(m-1))\Big]F_\lambda = f.$$

Utilizando nuevamente el resolvente,

$$F_\lambda = R(\Delta_\alpha + V(m-1), \lambda) f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{V(m-1)t} T_t^\alpha f(x) dt.$$

Y por unicidad del funcional de Laplace se sigue que

$$\mathbb{E}_x < N_t, f >= e^{V(m-1)t} T_t^\alpha f(x).$$

■

Observaciones:

1. El término $V(m-1)$ se conoce como el parámetro de Malthus, y determina el comportamiento asintótico promedio de la población.

2. Si se toma $f = 1_A$ entonces $\mathbb{E} < N_t^x, f >$ da la población promedio al tiempo t en el conjunto A, procreada por el ancestro δ_x.

Intensidad del MR^{α} con N_0 un campo de $Poisson(\lambda)$

Teorema 11. *Sea $N = \{N_t\}_{t\geq 0}$ un MR^α con N_0 un campo de $Poisson(\lambda)$. Entonces $\forall \varphi \in B_b(\mathbb{R}^d)$, la intensidad de N, satisface*

$$< \mathbb{E}N_t, \varphi >= \mathbb{E} < N_t, \varphi >= \left\langle \lambda, e^{V(m-1)t} T_t^\alpha \varphi \right\rangle, \qquad t \geq 0.$$

Demostración. Usando (3.10) con $m = 1$, $\varphi_1 = 1$ y $u_1 = \theta$ constante positiva, se tiene

$$\mathbb{E}\left[e^{-<N_t, \varphi\theta>}\right] = \exp\left\{-\left\langle \lambda, 1 - \mathbb{E}\left[e^{-<N_t^{(\cdot)}, \varphi\theta>}\right]\right\rangle\right\}, \qquad \theta > 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} < N_t, \varphi > &= -\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}\left[e^{-<N_t, \varphi\theta>}\right]\Bigg|_{\theta=0} \\
&= -\exp\left\{-\left\langle \lambda, 1 - \mathbb{E}\left[e^{-\left\langle N_t^{(\cdot)}, \varphi\theta\right\rangle}\right]\right\rangle\right\}\left\langle \lambda, -\mathbb{E}\left[e^{-\left\langle N_t^{(\cdot)}, \varphi\theta\right\rangle}\left\langle N_t^{(\cdot)}, \varphi\right\rangle\right]\right\rangle\Bigg|_{\theta=0} \\
&= \left\langle \lambda, \mathbb{E}\left\langle N_t^{(\cdot)}, \varphi\right\rangle\right\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando (3.11), se sigue que

$$\begin{aligned}\mathbb{E} < N_t, \varphi > &= \left\langle \lambda, \mathbb{E} < N_t^{(\cdot)}, \varphi > \right\rangle \\ &= \left\langle \lambda, e^{V(m-1)t} T_t^\alpha \varphi \right\rangle .\end{aligned}$$

■

Para el caso en el que la intensidad del campo aleatorio Poisson N_0 es la medida de Lebesgue λ en $\mathbb{R}^d$, se tiene, para $\varphi \in B_b(\mathbb{R}^d)$, que

$$\begin{aligned}< \lambda, T_t^\alpha \varphi > &= \int T_t^\alpha \varphi(x) dx \\ &= \int \left(\int \varphi(y) P_t(y-x) dy \right) dx \\ &= \int \varphi(y) \left(\int P_t(y-x) dx \right) dy = \int \varphi(y) dy.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E} < N_t, \varphi >= e^{V(m-1)t} < \lambda, \varphi > .$$

Intensidad del MR^α con $N_0 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$.

Para este caso, usando la Proposición 14 se establece el siguiente corolario sobre la intensidad del MR^α para $N_0 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$.

Corolario 3. *Sea $N = \{N_t\}$ un MR^α , con $N_0 = \mu \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$. Si $m = F'(1) < +\infty$, entonces*

$$\mathbb{E} < N_t, \varphi >= \left\langle \mu, e^{V(m-1)t} T_t^\alpha \varphi \right\rangle, \qquad \varphi \in B_b(\mathbb{R}^d).$$

Demostración. De la Proposición 14 se tiene que $\forall r \in [0, +\infty)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-\langle N_t, r\varphi\rangle}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{-\langle N_t, r\varphi\rangle} | N_0\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{\langle N_0, \log(1-v_{r\varphi}(t))\rangle}\right],\end{aligned}$$

donde $v_{r\varphi}$ es la solución de evolución de (3.9), es decir

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_{r\varphi}(t)}{\partial t} = \Delta_\alpha v_{r\varphi}(t) - V\left[F(1 - v_{r\varphi}(t)) - (1 - v_{r\varphi}(t))\right], \\ &v_0 = 1 - e^{-\varphi}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} < N_t, \varphi > &= -\frac{d}{dr} \mathbb{E}\left[e^{-<N_t, r\varphi>}\right]\Bigg|_{r=0} \\ &= -\left[\mathbb{E} e^{-<N_0, \log(1-v_{r\varphi}(t))>} \left\langle N_0, -\frac{1}{1 - v_{r\varphi(t)}} \frac{\partial}{\partial r} v_{r\varphi}(t) \right\rangle\right]\Bigg|_{r=0} . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Para encontrar $\frac{\partial}{\partial r} v_{r\varphi}(t)$, nótese que

$$\frac{\partial}{\partial t} v_{r\varphi}(t) = (\Delta_\alpha - V)\, v_{r\varphi} + V\left[1 - F(1 - v_{r\varphi}(t))\right], \quad t > 0, \tag{3.17}$$
$$v_{r\varphi}(x,0) = 1 - e^{-r\varphi(x)}.$$

Usando un desarrollo de Taylor de segundo orden

$$1 - F(1 - v_{r\varphi}) = F'(1) v_{r\varphi} - \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2} F(\xi_r) v_{r\varphi}^2,$$

con $\xi_r \in (v_{r\varphi}, 1)$. Entonces, usando que $F'(1) = m$, la ecuación (3.17) cambia a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} v_{r\varphi}(t) &= (\Delta_\alpha - V)\, v_{r\varphi} + V\left[m v_{r\varphi} - \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2} F(\xi_r) v_{r\varphi}^2\right],\\ &= (\Delta_\alpha - V(m-1))\, v_{r\varphi} - \frac{V}{2} F''(\xi_r) v_{r\varphi}^2,\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$v_{r\varphi}(t) = e^{V(m-1)t} T_t^\alpha \left(1 - e^{-r\varphi}\right) - V \int_0^t e^{V(m-1)} T_s^\alpha \left[\frac{F''}{2}(\xi_r) v_{r\varphi}(t-s)^2\right](x) ds.$$

Derivando con respecto a r y evaluando en $r = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} v_{r\varphi}(t)\bigg|_{r=0} &= e^{V(m-1)t} T_t^\alpha \varphi e^{-r\varphi}\bigg|_{r=0} - V\frac{\partial}{\partial r}\left(\int_0^t e^{V(m-1)s} T_s^\alpha \left[\frac{F''}{2}(\xi_r)(v_{r\varphi}(t-s))^2\right] ds\right)\bigg|_{r=0}\\ &= e^{V(m-1)t} T_t^\alpha \varphi(x).\end{aligned}$$

Se ha usado que $v_0 \equiv 0$ y la dependencia continua de (3.17) respecto a la condición inicial [30]. Por lo tanto, sustituyendo esta última expresión en (3.16), se sigue que

$$\begin{aligned}\mathbb{E} < N_t, \varphi > &= -\left[\mathbb{E} e^{-<N_0, \log(1 - v_{r\varphi}(t))>} \left\langle N_0, -\frac{1}{1 - v_{r\varphi(t)}} \frac{\partial}{\partial r} v_{r\varphi}(t)\right\rangle\right]\bigg|_{r=0}\\ &= -\mathbb{E}\left[e^0 \left\langle \mu, -e^{V(m-1)t} T_t^\alpha \varphi\right\rangle\right]\\ &= \left\langle \mu, e^{V(m-1)t} T_t^\alpha \varphi\right\rangle.\end{aligned}$$

■

Caracterización vía Funcional de Laplace

A continuación se establece la definición de Movimiento α-estable Ramificado, $N = \{N_t, t \geq 0\}$, cuyos valores son medidas $\mu \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$, no necesariamente finitas.

Definición 25. *Un proceso de Markov $N = \{N_t, t \geq 0\}$ con valores en $\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$, se dice Movimiento α-estable (simétrico) ramificado en $\mathbb{R}^d$, si su funcional de transición de Laplace está dado por*

$$\mathbb{E}\left[e^{-<N_t, \varphi>} | N_s = \mu\right] = e^{\langle \mu, \log(1 - \nu_\varphi(t-s))\rangle}, \qquad \varphi \in C_p^+(\mathbb{R}^d),\ 0 \leq s \leq t, \quad \mu \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d), \tag{3.18}$$

donde $v_\varphi(x,s)$ es la única solución (mild) de

$$\frac{\partial v(t)}{\partial t} = \Delta_\alpha v(t) - V\left[F(1 - v(t)) - (1 - v(t))\right], \quad t > s,$$
$$v(x,s) = 1 - e^{-\varphi(x)}, \qquad \varphi \in C_p^+(\mathbb{R}^d). \tag{3.19}$$

Observaciones:

1. Nótese que la ecuación diferencial parcial dada en (3.19) es equivalente a

$$\frac{\partial v(t)}{\partial t} = (\Delta_\alpha - V)v(t) + V\left[1 - F(1 - v(t))\right], \quad t > s,$$
$$v(x,s) = 1 - e^{-\varphi(x)}, \qquad \varphi \in C_p^+(\mathbb{R}^d). \tag{3.20}$$

2. Si N_0 tiene intensidad finita λ (es decir, $\lambda(\mathbb{R}^d) < \infty$), entonces N_t es finito con probabilidad 1, ya que
$$\mathbb{E} < N_t, 1 >= \left\langle \lambda, e^{V(m-1)t} T_t^\alpha 1 \right\rangle = e^{V(m-1)t}\lambda(\mathbb{R}^d) < +\infty.$$
Así, basta pedir que la intensidad de N_0 sea finita, para garantizar que el MR^α tome valores en $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$.

3. Nótese que para que la Definición 25 tenga sentido, es necesario que expresiones del tipo $< \mu, \varphi >$, sean finitas. Ahora, si $\mu \notin \mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$, entonces para φ medible y no negativa,
$$< \mu, \varphi > = \int \varphi d\mu = \int \frac{\varphi}{\varphi_p}\varphi_p d\mu \le \int \|\varphi\|_p \varphi_p d\mu = \|\varphi\|_p \int \varphi_p d\mu = \|\varphi\|_p < \mu, \varphi_p >, \tag{3.21}$$
y la última expresión es finita si $\mu \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$, y $\varphi \in C_p(\mathbb{R}^d)$. Esto último permite concluir que (3.18) tiene sentido.

3.5. Generadores Infinitesimales

Se sabe que los procesos de Markov quedan determinados por su distribución inicial y su función de probabilidades de transición. Éstas últimas definen un semigrupo de transición el cual queda especificado completamente por su generador infinitesimal, $\mathcal{A}$. En el caso de sistemas de ramificación espacio-temporales, como lo es el MR^α, resulta de interés encontrar el generador infinitesimal que involucra ambas dinámicas: ramificación y migración. Usando la independencia de ambas dinámicas y el teorema de Trotter-Kato (ver Apéndice), se sabe que el generador buscado es la suma de los generadores de cada dinámica. A continuación se muestra el cálculo de tales generadores para ramificación de un tipo, para el proceso de migración, y aunque no será requerido posteriormente (excepto en la Sección 5.4), también para la dinámica de inmigración.

3.5.1. Generador para la dinámica de Ramificación

Sea $\{X_t\}_{t\ge0}$ un proceso de Markov $\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$-valuado, definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}, \mathbb{P})$, donde $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_r, 0 \le r \le t)$, $t \ge 0$.

Ramificación de un tipo

Supóngase que para $t \ge 0$, X_t denota al número de partículas al tiempo t. La tasa de ramificación es V, es decir, cada partícula vive un tiempo de vida que tiene una distribución exponencial de parametro V, al final del cual se ramifica. La ley de ramificación es $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde q_k denota la probabilidad de que la partícula de origen a k partículas hijas al momento de su muerte.

Proposición 15. *Para el proceso $\{X_t\}_{t\ge0}$, definido arriba, el generador infinitesimal, $\mathcal{A}_r$, está dado por la expresión*

$$\mathcal{A}_r f(X_t) = V\sum_{k=0}^{\infty}\left\langle X_t, f(X_t + (k-1)\delta_{(\cdot)}) - f(X_t)\right\rangle, \quad f : \mathcal{N}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, \quad f \in B_b(\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)).$$

En particular, para $f : \mathcal{N}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ cilíndrica, es decir para f de la forma

$$f : \mu \longmapsto g(<\mu, \varphi>), \quad g \in B_b(\mathbb{R}), \quad \varphi \in C_K(\mathbb{R}^d),$$

se tiene

$$\mathcal{A}_r g(<X_t, \varphi>) = V \sum_{k=0}^{\infty} q_k \Big\langle X_t\,,\, g(<X_t, \varphi> + (k-1)\varphi(\cdot)) - g(<X_t, \varphi>) \Big\rangle.$$

Demostración. Sea $f : \mathcal{N}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$. Por definición se tiene que

$$\mathcal{A}_r f(X_t) = \frac{d}{ds} T_s^{\alpha} f(X_t)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \mathbb{E}\Big[f(X_{t+s})\Big|\mathcal{F}_t\Big]\Big|_{s=0} = \lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s}\Big(\mathbb{E}\Big[f(X_{t+s})\Big|\mathcal{F}_t\Big] - \mathbb{E}\Big[f(X_t)\Big|\mathcal{F}_t\Big]\Big). \quad (3.22)$$

Para $t \geq 0$, sea

$$\tau_t = \inf\{u > 0 : X_{t+u} \neq X_t\}$$

el primer tiempo de salto del proceso, posterior al tiempo t. Sea $A_s = \{\tau_t \leq s\}$, $s \geq 0$, y supóngase que

$$\mathbb{P}(A_s|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}[0 \leq \tau_t \leq s\Big|\mathcal{F}_t] = \lambda(X_t)s + \circ(s), \quad s \downarrow 0,$$

donde λ es no-negativa y medible. Para el primer término de (3.22) se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[f(X_{t+s})\Big|\mathcal{F}_t\Big] &= \mathbb{E}\Big[f(X_{t+s})\left[1_{A_s} + 1_{A_s^c}\right]\Big|\mathcal{F}_t\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[f(X_{t+s})1_{A_s}\Big|\mathcal{F}_t\Big] + \mathbb{E}\Big[f(X_{t+s})1_{A_s^c}\Big|\mathcal{F}_t\Big], \quad (3.23)\end{aligned}$$

y por definición se sigue que

$$\mathbb{E}\Big[f(X_{t+s})1_{A_s}\Big|\mathcal{F}_t\Big] = \int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} f(\mu) d\mathbb{P}\left[(X_{t+s} = \mu) \bigcap A_s|\mathcal{F}_t\right], \quad (3.24)$$

donde por la propiedad de Markov y la ecuación de Chapman-Kolmogorov se obtiene que $\forall \Gamma \in \mathfrak{B}(\mathcal{N}(\mathbb{R}^d))$,

$$\mathbb{P}\left[(X_{t+s} \in \Gamma) \bigcap A_s|\mathcal{F}_t\right] = [\lambda(X_t)s + \circ(s)] \int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} P(t, X_t, t+\tau_t, d\nu) P(t+\tau_t, \nu, s+t, \Gamma), \quad (3.25)$$

donde se ha usado la notación $P(s, x, t, \Gamma) := \mathbb{P}(X_t \in \Gamma | X_s = x)$. Así, (3.24) satisface

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[f(X_{t+s})1_{A_s}\Big|\mathcal{F}_t\Big] &= \int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} f(\mu) \Big\{[\lambda(X_t)s + \circ(s)] \int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} P(t, X_t, t+\tau_t, d\nu) P(t+\tau_t, \nu, s+t, \Gamma)\Big\} \\ &= [\lambda(X_t)s + \circ(s)] \int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} f(\mu) \Big[\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} P(t, X_t, t+\tau_t, d\nu) P(t+\tau_t, \nu, s+t, \Gamma)\Big]. \quad (3.26)\end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión (3.26) en (3.22) se obtiene

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_r f(X_t) = \\ &\quad = \lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s} \mathbb{E}\left[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}\Big[f(X_t)\Big|\mathcal{F}_t\Big] \\ &\quad = \lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s} \Big\{ [\lambda(X_t)s + \circ(s)] \int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} f(\mu) \Big[\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} P(t, X_t, t+\tau_t, d\nu) P(t+\tau_t, \nu, s+t, \Gamma)\Big] + \mathbb{E}\Big[f(X_{t+s})1_{A_s^c}\Big|\mathcal{F}_t\Big] \\ &\qquad\qquad - \mathbb{E}\Big[f(X_t)\Big|\mathcal{F}_t\Big] \Big\}.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[f(X_t)\Big|\mathcal{F}_t\Big] &= f(X_t)\mathbb{E}\Big[1_{A_s}+1_{A_s^c}\Big|\mathcal{F}_t\Big]\\
&= f(X_t)\Big\{\mathbb{E}\Big[1_{A_s}\Big|\mathcal{F}_t\Big]+\mathbb{E}\Big[1_{A_s^c}\Big|\mathcal{F}_t\Big]\Big\}\\
&= f(X_t)\Big\{\mathbb{P}(A_s\Big|\mathcal{F}_t)+\mathbb{E}\Big[1_{A_s^c}\Big|\mathcal{F}_t\Big]\Big\}\\
&= f(X_t)\Big\{[\lambda(X_t)s+\circ(s)]+\mathbb{E}\Big[1_{A_s^c}\Big|\mathcal{F}_t\Big]\Big\}\\
&= [\lambda(X_t)s+\circ(s)]\,f(X_t)+\mathbb{E}\Big[1_{A_s^c}\Big|\mathcal{F}_t\Big]f(X_t). \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Se sigue que

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_r f(X(t)) =\\
&= \lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}\Bigg\{[\lambda(X_t)s+\circ(s)]\Bigg(\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} f(\mu)\Bigg[\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} P(t,X_t,t+\tau_t,d\nu)P(t+\tau_t,\nu,s+t,\mu)\Bigg]-f(X_t)\Bigg)\\
&\qquad +\mathbb{E}\Big[f(X_{t+s})1_{A_s^c}\Big|\mathcal{F}_t\Big]-f(X_t)\mathbb{E}\Big[1_{A_s^c}\Big|\mathcal{F}_t\Big]\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Usando el teorema de Tonelli-Fubini,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_r f(X(t)) =\\
&= \lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}\Bigg\{[\lambda(X_t)s+\circ(s)]\Bigg(\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} P(t,X_t,t+\tau_t,d\nu)\Bigg[\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} f(\mu)P(t+\tau_t,\nu,s+t,\mu)\Bigg]-f(X_t)\Bigg)\\
&\qquad +\mathbb{E}\Big[f(X_{t+s})1_{A_s^c}\Big|\mathcal{F}_t\Big]-f(X_t)\mathbb{E}\Big[1_{A_s^c}\Big|\mathcal{F}_t\Big]\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Haciendo $s\downarrow 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_r f(X_t) &= \lambda(X_t)\Bigg(\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)} f(\nu)P(t,X_t,t+\tau_t,d\nu)-f(X_t)\Bigg)\\
&= \lambda(X_t)\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)}\Big[f(\nu)-f(X_t)\Big]P(t,X_t,t+\tau_t,d\nu).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\mathcal{A}_r f(X_t) = \lambda(X_t)\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)}\Big[f(\nu)-f(X_t)\Big]\Lambda(X_t,d\nu), \qquad (3.28)
$$

donde

$$
\Lambda(X_t,\Gamma) := P\left[X_{t+\tau_t}\in\Gamma|X_t\right].
$$

Ahora bien, se sabe que la expresión general

$$
\lambda(x)\int\big[f(y)-f(x)\big]\mu(x,dy),
$$

determina al generador de un proceso de Markov siempre que $\lambda(x)\geq 0$ sea una función medible y acotada [18]. Sin embargo, para la dinámica de ramificación, en la expresión (3.28) no se sabe que $\lambda(X_t)$ sea acotada. Por lo tanto, será necesario el cálculo explícito de λ y Λ, lo cual se hace a continuación.

Considerando un sistema en el que $X_0 = \delta_x$, es posible suponer que al tiempo t hay n partículas, es decir, $X_t = \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n}$. Debido a que el primer salto después de t, ocurre cuando cualesquiera de las n partículas se ramifica, por la independencia y el hecho de que el tiempo de ramificación para cada partícula es $\exp(V)$, se sigue que $\tau_t \sim \exp(nV)$. Así

$$\mathbb{P}(A_s|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}[0 \leq \tau_t \leq s\Big|\mathcal{F}_t] = (|X_t|V)s + \circ(s), \quad s \downarrow 0,$$

es decir

$$\lambda(X_t) = |X_t|V, \tag{3.29}$$

donde $|X_t| :=< X_t, 1 >$ es el número de partículas vivas al tiempo t.

Por otra parte, si $X_t = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$, entonces

$$\Lambda(X_t, \Gamma) = \Lambda(\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, \Gamma) = \mathbb{P}\left[X_{t+\tau_t} \in \Gamma\Big|X_t = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}\right].$$

Defínase el evento

$$B_j := \{ \text{ la partícula } \delta_{x_j} \text{ se ramifica}\}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

el cual tiene probabilidad $\mathbb{P}(B_j|X_t = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}) = \frac{V}{nV} = \frac{1}{n}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\Lambda(\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, \Gamma) &= \mathbb{P}\left[X_{t+\tau_t} \in \Gamma, \bigcup_{j=1}^n B_j\Big|X_t = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}\right] \\
&= \sum_{j=1}^n \mathbb{P}\left[X_{t+\tau_t} \in \Gamma, B_j\Big|X_t = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}\right] \\
&= \sum_{j=1}^n \mathbb{P}\left[X_{t+\tau_t} \in \Gamma\Big|X_t = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, B_j\right]\mathbb{P}(B_j|X_t = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbb{P}\left[X_{t+\tau_t} \in \Gamma\Big|X_t = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, B_j\right],
\end{aligned}$$

Finalmente, basta observar que condicionado a B_j,

$$X_{t+\tau_t} = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} - \delta_{x_j} + k\delta_{x_j}$$

con probabilidad q_k, es decir, dado que inicialmente había n partículas y la primera en ramificarse fue la partícula δ_{x_j}, se cumple que

$$\begin{aligned}
X_{t+\tau_t} = &\text{ las } n \text{ partículas iniciales } - \text{ la } j\text{-ésima partícula (la cual muere al ramificarse)} \\
&+ \text{ las partículas hijas de } \delta_{x_j} \text{ (digamos } k \text{ copias idénticas de ella para alguna } k \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Lambda(\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, \Gamma) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbb{P}\left[X_{t+\tau_t} \in \Gamma\Big|X_t = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, B_j\right] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^\infty q_k \delta_{\sum_{i=1}^n \delta_{x_i} + (k-1)\delta_{x_j}}(\Gamma). \tag{3.30}$$

Sustituyendo (3.29) y (3.30) en (3.28) obtenemos, para $X_t = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}f(\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}) &= \lambda(\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i})\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)}\Big[f(\nu)-f(\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i})\Big]\Lambda(\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i},d\nu)\\
&= nV\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)}\Big[f(\nu)-f(\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i})\Big]\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}q_k\delta_{\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}+(k-1)\delta_{x_j}}(d\nu)\right)\\
&= V\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}q_k\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)}\Big[f(\nu)-f(\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i})\Big]\Big(\delta_{\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}+(k-1)\delta_{x_j}}(d\nu)\Big)\\
&= V\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}q_k\left[f(\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}+(k-1)\delta_{x_j})-f(\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i})\right].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\mathcal{A}_r f(X_t) = V\sum_{k=0}^{\infty}q_k\left\langle X_t, f(X_t+(k-1)\delta_{(\bullet)})-f(X_t)\right\rangle .
$$

■

3.5.2. Generador para la dinámica de Migración

Para este caso únicamente se tomará en cuenta la migración de partículas, es decir, el proceso $X=\{X_t\}_{t\geq 0}$, proceso $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$-valuado, es tal que las partículas no se ramifican, sólo se mueven a través del tiempo, de acuerdo a $W=\{W_t\}_{t\geq 0}$, un movimiento α-estable simétrico, con $\alpha\in(0,2]$.

Proposición 16. *Sea $X=\{X_t\}_{t\geq 0}$, un sistema de partículas con dinámica de migración dada por el movimiento α-estable $W=\{W_t\}_{t\geq 0}$, con $\alpha\in(0,2]$. El generador infinitesimal de la dinámica de migración, $\mathcal{A}_m$, para funciones cilíndricas, $f:\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$ de la forma*

$$
f:\mu\longmapsto g(<\mu,\varphi>),\quad \varphi\in B_b(\mathbb{R}^d),\ g\in C_b^3(\mathbb{R}), \tag{3.31}
$$

está dado por la expresión

$$
\mathcal{A}_m f(X_t) = g'\big(<X_t,\varphi>\big)<X_t,\Delta_\alpha\varphi> + \frac{1}{2}g''\big(<X_t,\varphi>\big)<X_t,\Delta_\alpha\varphi^2-2\varphi\Delta_\alpha\varphi> + G,
$$

donde G es un término de error.

Demostración. Sea $f:\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$ de la forma (3.31) y sea $W=\{W_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento α−estable simétrico en $\mathbb{R}^d$. Por definición,

$$
\mathcal{A}_m f(X_t) = \lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}\left\{\mathbb{E}\Big[g(<X_{t+s},\varphi>)\Big|\mathcal{F}_t\Big]-g(<X_t,\varphi>)\right\}.
$$

Supóngase que al tiempo $t\geq 0$, existe un único individuo en la posición W_t, es decir

$$
X_t=\delta_{W_t},\ t\geq 0.
$$

Entonces

$$
\lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}\mathbb{E}\left[g(<\delta_{W_{t+s}},\varphi>)-g(<\delta_{W_t},\varphi>)|\mathcal{F}_t\right] = \lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}\int\Big(g(\varphi(z))-g(\varphi(x))\Big)P_s(x,z)dz,
$$

donde $\{P_s,\ s>0\}$ son las densidades de transición de $\{W_t\}_{t\geq 0}$.

Usando un desarrollo de Taylor de tercer orden para $g(\varphi(z))$, alrededor de $\varphi(x)$, se tiene

$$\begin{aligned}g(\varphi(z)) - g(\varphi(x)) =&\big(\varphi(z) - \varphi(x)\big)g'(\varphi(x))\\ &+ \big(\varphi(z) - \varphi(x)\big)^2 \frac{1}{2} g''(\varphi(x))\\ &+ \big(\varphi(z) - \varphi(x)\big)^3 \frac{1}{3!} g'''\big(\varphi(x) + \theta\varphi(z)\big), \quad \theta \in [0,1].\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s} \int \big(g(\varphi(z)) - g(\varphi(x))\big)P_s(x,z)dz =& \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s}\Big\{ g'(\varphi(x)) \int [\varphi(z) - \varphi(x)]\, P_s(x,z)dz\\ &+ \frac{1}{2} g''(\varphi(x)) \int [\varphi(z) - \varphi(x)]^2\, P_s(x,z)dz\\ &+ \frac{1}{3!} g'''(\varphi(x)) \int [\varphi(z) - \varphi(x)]^3\, P_s(x,z)dz\Big\}\\ &=: \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s}\big(A + B + C\big).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Por otra parte, sea

$$\Lambda_\alpha \varphi(x) := \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}^d} \big(\varphi(z) - \varphi(x)\big)P_s(x,z)dz.$$

Para el primer término de (3.32), se tiene que

$$\lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s} A = g'(\varphi(x))\Lambda_\alpha\varphi(x) = g'(\langle X_t, \varphi\rangle)\, \langle X_t, \Lambda_\alpha \varphi\rangle\,.$$

Para B, usando que

$$[\varphi(z) - \varphi(x)]^2 = \varphi^2(z) - \varphi^2(x) - 2\varphi(x)[\varphi(z) - \varphi(x)],$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s} B &= \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{2s} g''(\varphi(x)) \Big\{ \int \big[\varphi^2(z) - \varphi^2(x)\big]\, P_s(x,z)dz - 2\varphi(x) \int [\varphi(z) - \varphi(x)]\, P_s(x,z)dz\Big\}\\ &= \frac{1}{2} g''(\varphi(x))\, \big[\Lambda_\alpha \varphi^2(x) - 2\varphi(x)\Lambda_\alpha\varphi(x)\big]\\ &= \frac{1}{2} g''(< X_t, \varphi >)\, \big[< X_t, \Lambda_\alpha\varphi^2 - 2\varphi\Lambda_\alpha\varphi >\big].\end{aligned}$$

Para C, como por hipótesis $g \in C_b^3(\mathbb{R})$, se sigue que existe constante positiva J_3 tal que

$$\|g'''(\varphi(x) + \theta\varphi(z))\| \le J_3,$$

por lo que

$$\frac{1}{3!}\big[\varphi(z) - \varphi(x)\big]^3 g'''(\varphi(x) + \theta\varphi(z)) \le \frac{1}{3!}\big(\varphi(z) - \varphi(x)\big)^2 2 \sup_{z\in\mathbb{R}^d} \big|\varphi(z)\big| J_3,$$

y así,

$$\lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s} C \approx G := \frac{1}{3} \sup_{z\in\mathbb{R}^d} \big|\varphi(z)\big| J_3 \,\big\langle X_t, \Lambda_\alpha\varphi^2 - 2\varphi\Lambda_\alpha\varphi\big\rangle\,.$$

De todo lo anterior resulta

$$\mathcal{A}_m f = g'\big(< X_t, \varphi > \big) < X_t, \Delta_\alpha\varphi > + \frac{1}{2} g''\big(< X_t, \varphi > \big) < X_t, \Delta_\alpha\varphi^2 - 2\varphi\Delta_\alpha\varphi > + G.$$

■

3.5.3. Generador de la dinámica de Inmigración

Se considerará un sistema en el cual sólo se toma en cuenta la inmigración. Para ello, supóngase que

a) al tiempo $t = 0$ el espacio $\mathbb{R}^d$ no cuenta con ninguna partícula,

b) se permite inmigración de partículas al conjunto $C \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+))$. La inmigración ocurre de acuerdo a un campo de Poisson N, en espacio tiempo $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$, con intensidad homogénea $\Lambda_C \in \mathcal{M}(C)$, donde Λ_C es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ restringida a C.

El proceso $\mathcal{M}(C)$-valuado $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ es el proceso de inmigración en C, donde X_t es la medida aleatoria puntual en C, determinada por las posiciones de partículas que inmigraron a C hasta el tiempo t.

Proposición 17. *Sea $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ compacto, y $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ el proceso de inmigración en C definido anteriormente. Entonces el generador infinitesimal de X, $\mathcal{A}$, está dado por*

$$\mathcal{A}f(X_t) = \left\langle \lambda_{C_t}, f(X_t + \delta_{(\bullet)}) - f(X_t) \right\rangle, \quad f \in B_b(\mathcal{M}(C)),$$

donde C_t es la $t-$sección de C, y λ_{C_t} es la medida de Lebesgue en $\mathfrak{B}(C_t)$.

Demostración. Sea $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ y $f \in B_b(\mathcal{M}(C))$. Por definición,

$$\mathcal{A}f(X_t) = \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s} \left\{ \mathbb{E}\left[f(X_{t+s}) \middle| \mathcal{F}_t \right] - f(X_t) \right\},$$

Defínase

$$C \wedge r := \{(x,s) \in C : s \leq r\}.$$

Poniendo

$$N(C \wedge r) := \text{ número de partículas que inmigraron a } C\text{, hasta el tiempo } r \ ,$$

entonces

$$N(C \wedge t) = \langle X_t, 1 \rangle .$$

Además,

$$N(C \wedge (t+s)) - N(C \wedge t) := \text{ número de partículas que inmigraron a } C \text{ en el intervalo } (t, t+s].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}f(X_t) &= \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s} \left\{ \mathbb{E}\left[f(X_{t+s}) \middle| \mathcal{F}_t \right] - f(X_t) \right\} \\
&= \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[f(X_{t+s}) - f(X_t), N(C \wedge (t+s)) - N(C \wedge t) = k \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[f(X_{t+s}) - f(X_t) \middle| N(C \wedge (t+s)) - N(C \wedge t) = k, \mathcal{F}_t \right] \mathbb{P}\left[N(C \wedge (t+s)) - N(C \wedge t) = k \middle| \mathcal{F}_t \right]
\end{aligned}$$

Nótese que si $k = 0$, entonces no hay inmigración en el intervalo $(t, t+s]$, y ello implica que $f(X_{t+s}) = f(X_t)$. Por otra parte, por ser N un campo Poisson se tiene que

$$\mathbb{P}\left[N(C \wedge (t+s)) - N(C \wedge t) = k \middle| \mathcal{F}_t \right] = \begin{cases} e^{\Lambda_C(C\cap(\mathbb{R}^d \times (t,t+s]))} \frac{\Lambda_C(C\cap(\mathbb{R}^d \times (t,t+s]))}{1!}, & k = 1 \\ \circ(s), & k \geq 2. \end{cases}$$

Utilizando lo observado anteriormente, se sigue que

$$\mathcal{A}f(X_t) =$$
$$= \lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}\Bigg\{\mathbb{E}\Big[f(X_{t+s})-f(X_t),N(C\wedge(t+s))-N(C\wedge t)=1\Big|\mathcal{F}_t\Big]e^{\Lambda_C(C\cap(\mathbb{R}^d\times(t,t+s]))}\frac{\Lambda_C(C\cap(\mathbb{R}^d\times(t,t+s]))}{1!},$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\mathbb{E}\Big[f(X_{t+s})-f(X_t)\Big|N(C\wedge(t+s))-N(C\wedge t)=k,\mathcal{F}_t\Big]\Big(\circ(s)\Big)\Bigg\}$$

Haciendo $s\downarrow 0$, se tiene que

$$\mathcal{A}f(X_t) =$$
$$\lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}\mathbb{E}\Big[f(X_{t+s})-f(X_t),N(C\wedge(t+s))-N(C\wedge t)=1\Big|\mathcal{F}_t\Big]e^{\Lambda_C(C\cap(\mathbb{R}^d\times(t,t+s]))}\Lambda_C(C\cap(\mathbb{R}^d\times(t,t+s])).$$

Además,

$$\mathbb{E}\Big[f(X_{t+s})-f(X_t),N(C\wedge(t+s))-N(C\wedge t)=1\Big|\mathcal{F}_t\Big]=$$
$$\left(\frac{1}{\Lambda_C(C\cap(\mathbb{R}^d\times(t,t+s]))}\int_{C\cap(\mathbb{R}^d\times(t,t+s])}\Big[f(X_t+\delta_z)-f(X_t)\Big]\Lambda_C(dz)\right).$$

Así,

$$\mathcal{A}f(X_t)=\lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}\left(\int_{C\cap(\mathbb{R}^d\times(t,t+s])}\Big[f(X_t+\delta_z)-f(X_t)\Big]\Lambda_C(dz)\right)e^{\Lambda_C(C\cap(\mathbb{R}^d\times(t,t+s]))}.$$

Usando el teorema de Fubini en la integral anterior se tiene que

$$\int_{C\cap(\mathbb{R}^d\times(t,t+s])}\Big[f(X_t+\delta_z)-f(X_t)\Big]\Lambda_C(dz)=\int_t^{t+s}dr\int_{C_r}\Big[f(X_t+\delta_{(y,r)})-f(X_t)\Big]dy.$$

Tomando el límite cuando $s\downarrow 0$ se tiene que

$$\mathcal{A}f(X_t)=\int_{C_t}\Big[f(X_t+\delta_y)-f(X_t)\Big]dy,$$

donde C_t, es la t-sección de C. Por lo tanto,

$$Af(X_t)=\Big\langle\lambda_{C_t},\Big[f(X_t+\delta_{(\cdot)})-f(X_t)\Big]\Big\rangle,$$

donde λ_{C_t} es la medida de Lebesgue en $\mathfrak{B}(C_t)$. ∎

Observaciones:

1. Si C no fuera acotado, basta usar un argumento de aproximación por conjuntos compactos y hacer uso del resultado anterior.

2. En el caso $C=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+$ también se puede usar el hecho de que $\mathbb{R}^d=\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i$, con K_i compacto como en (1.1).

3.5.4. Generador Infinitesimal del MR^α

Finalmente, usando el teorema de Trotter-Kato[2], se tiene que para el caso en el que $N=\{N_t\}_{t\geq 0}$, es un MR^α , el generador de N es la suma de los generadores de las dinámicas que intervienen. De la Proposición 15 se tiene que el generador de la dinámica de ramificación $\mathcal{A}_r$, para funciones cilíndricas es

$$\mathcal{A}_r g(<X_t,\varphi>)=V\sum_{k=0}^{\infty}q_k\left\langle X_t,g(<X_t,\varphi>+(k-1)\varphi(\cdot))-g(<X_t,\varphi>)\right\rangle$$

[2]Ver Apéndice

y de la Proposición 16, se vió que el generador de la dinámica de migración, $\mathcal{A}_m$, en funciones de la forma (3.31), es

$$\mathcal{A}_m g(< X_t, \varphi >) = g'\big(< X_t, \varphi > \big) < X_t, \Delta_\alpha \varphi > + \frac{1}{2} g''\big(< X_t, \varphi > \big) < X_t, \Delta_\alpha \varphi^2 - 2\varphi \Delta_\alpha \varphi > + G$$

donde

$$G = \frac{1}{3!} \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^d} |\varphi(y)| \right) J_3 < \mu, \Delta_\alpha \varphi^2 - 2\varphi \Delta_\alpha \varphi >$$

y $J_3 \geq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'''(x)|$.

Por lo tanto, el ***Generador Infinitesimal del*** MR^α , evaluado en funciones cilíndricas, es

$$\mathcal{A} g(< X_t, \varphi >) = V \sum_{k=0}^{\infty} q_k \left\langle X_t, g(< X_t, \varphi > + (k-1)\varphi(\cdot)) - g(< X_t, \varphi >) \right\rangle \tag{3.33}$$

$$+ g'\big(< X_t, \varphi > \big) < X_t, \Delta_\alpha \varphi > + \frac{1}{2} g''\big(< X_t, \varphi > \big) < X_t, \Delta_\alpha \varphi^2 - 2\varphi \Delta_\alpha \varphi > + G. \tag{3.34}$$

3.6. Sobre la existencia del MR^α con valores en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$

En las secciones anteriores se ha considerado al MR^α como un proceso con valores en el espacio de medidas de Radon finitas. Como se mencionó, la existencia de este proceso queda garantizada por el Teorema 6 o bien, haciendo uso del Teorema 8 debido a que $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ es un espacio localmente compacto. No obstante, para el caso general dado en la Definición 25, no es posible utilizar directamente el Teorema 8 ya que $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$ no es localmente compacto.

La extensión de procesos de ramificación a procesos con valores en medidas no necesariamente finitas, se debe a I. Iscoe [32]. La idea básica es descomponer la medida inicial en una serie de medidas finitas haciendo uso de (1.1), y para probar la existencia, introduce un nuevo espacio, el espacio de medidas p–temperadas, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$ que se introdujo en el Capítulo 1. Para ello se establece la siguiente

Definición 26. *Se dice que $P(s,\mu,\Gamma)$ es una* ***función de transición de Markov*** *definida en el espacio $(\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d), \tau_v)$, si*

a) $\forall s \geq 0, \mu \in \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$, *$P(s,\mu,\cdot)$ es una probabilidad (incompleta) en* $\mathfrak{B}(\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$.

b) $\forall s \geq 0$ *y* $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$ *fijos,* $\mu \longmapsto P(s,\mu,\Gamma)$ *es* $\mathfrak{B}(\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$*–medible.*

c) $\forall 0 \leq s, t$ *y* $\mu \in \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$, $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$,

$$P(s+t,\mu,\Gamma) = \int_{\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)} P(s,\mu,d\nu) P(t,\nu,\Gamma).$$

d) $P(0,\mu,\Gamma) = \delta_\mu(\Gamma)$, $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$.

Si P es una función de transición de Markov, entonces determina un semigrupo $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0}$ de operadores lineales en $B_b(\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$, de modo que si $f : \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d) \to \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{T}_t f(\mu) = \int_{\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)} f(\nu) P_t(\mu, d\nu).$$

Se sabe que P puede caracterizarse mediante el funcional de transición de Laplace

$$L_t(\mu,\varphi) = \int_{\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)} e^{-<\nu,\varphi>} P_t(\mu,d\nu), \qquad \varphi \in B_b^+(\dot{\mathbb{R}}^d),$$

el cual satisface:

i) $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 < t$ y μ fijos, $\varphi \longmapsto L_t(\mu, \varphi)$ es el funcional de Laplace de una medida aleatoria en $\mathbb{R}^d$.

ii) $\forall \varphi \in B_b^+(\mathbb{R}^d)$, $\mu \longmapsto L_t(\mu, \varphi)$ es $\mathfrak{B}(\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$–medible.

iii) Análogo a la propiedad de semigrupo

$$L_t(\mu, \varphi) = \int P_u(\mu, d\nu) L_{t-u}(\nu, \varphi).$$

Para establecer la existencia del MR^α con valores en el espacio de medidas p-temperadas, se utiliza el Teorema 8 con $E := \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$, el cual es un espacio localmente compacto (ver Teorema 3 del Capítulo 1). La hipótesis de que $T_t^\alpha(C_0^\infty(E)) \subset C_0^\infty(M)$ se prueba en [32]. Por tanto, la existencia de un proceso de Markov con valores en $\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$ y semigrupo $\{T_t^\alpha\}_{t \geq 0}$ de generador infinitesimal $\mathcal{A}$ dado por la dinámica de ramificación y migración, se sigue directamente del Teorema 8.

3.7. Resumen

En el capítulo anterior se enunciaron los resultados más importantes sobre un tipo de SPMM, los denominados *procesos de difusión ramificados*, para los cuales la dinámica espacial de las partículas sigue una ley α-estable simétrica en $\mathbb{R}^d$. Este tipo de proceso se denomina también *movimiento α-estable ramificado*, y de ellos se estableció lo siguiente:

1. En la primera sección se da la caracterización clásica o intuitiva del MR^α . En está definición se toma como estado inicial una sola partícula, δ_x, sin embargo, pueden considerarse casos más generales (como se hizo en secciones posteriores). De igual modo, para el mecanismo de ramificación, es posible considerar casos más particulares al dado por (3.1), como por ejemplo ramificación crítica, ramificación binaria, ramificación con terceros momentos factoriales finitos, etc.

2. Se derivan el funcional de Laplace (FL) y la intensidad del MR^α para tres casos particulares del estado inicial N_0. La importancia del FL radica en que permite establecer otra caracterización del proceso en términos de ecuaciones de evolución, ver Definición 25.

3. Para el caso en el que la intensidad del estado inicial del MR^α es una medida en $\mathcal{M}_F$, usando la ecuación de Skorohod, es posible caracterizar a éste proceso como aquel cuyo FGPT es la solución a la ecuación (3.2). La existencia de dicha solución puede ser establecida por el Teorema 6 o bien, observando su relación con EDP no lineales del tipo establecido en (2.9).

4. Usando el Teorema de Trotter-Kato, es posible determinar el generador infinitesimal del MR^α como la suma de los generadores de las dinámicas de migración y ramificación involucradas, de ese modo se llega al generador dado en (3.33).

5. Si la intensidad $\mathbb{E}N_0$ no es una medida finita, la existencia del MR^α se sigue por una aplicación del Teorema 8 considerando al espacio $\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$, el cual cumple con la hipótesis de ser localmente compacto.

Capítulo 4

Convergencia Débil en Espacios Métricos

En este capítulo se enuncian los resultados necesarios para este trabajo sobre convergencia débil en espacios métricos. Se exponen de manera general y sin demostración los resultados referentes al espacio de Skorohod $D(\mathbb{R}^+, E)$, donde E es un espacio métrico, y en la última sección se trata lo referente al espacio de interés para esta tesis, el espacio $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}(\dot{\mathbb{R}}^d))$. Para las demostraciones y para una revisión más a detalle, se remite al lector a las referencias [1], [18], [40], mismas que constituyen la base bibliográfica de este capítulo.

4.1. Convergencia de Medidas de Probabilidad

El uso típico de variables aleatorias o vectores aleatorios, ha hecho natural el concepto de convergencia débil en $\mathbb{R}$. Sin embargo, cuando se trabaja con elementos aleatorios, es decir, funciones medibles que toman valores en un espacio métrico diferente (como en el caso de las medidas aleatorias), es necesario extender la teoría de convergencia débil en $\mathbb{R}$ a convergencia débil en espacios métricos generales.

4.1.1. Medidas de probabilidad sobre espacios métricos

A lo largo de esta sección se considerará un espacio métrico general (S, d), donde d denota la métrica correspondiente, y como es usual, $\mathfrak{B}(S)$ denotará la clase de subconjuntos de Borel de S. Defínase al conjunto de medidas de probabilidad sobre S como

$$\mathcal{P}(S) = \Big\{ \mu : \mathfrak{B}(S) \to [0,1] : \mu \text{ medida de probabilidad en } S \Big\}.$$

El siguiente teorema tiene relevancia debido a que establece que las medidas de probabilidad en $\mathcal{P}(S)$ quedan determinadas por sus valores en conjuntos cerrados

Teorema 12. *Cada medida $P \in \mathcal{P}(S)$ es* ***regular,*** *es decir para cada $A \in \mathfrak{B}(S)$ y $\varepsilon > 0$, existen en S subconjuntos F y G, cerrado y abierto respectivamente, tales que $F \subset A \subset G$ y $P(G \setminus F) < \varepsilon$.*

Demostración. Ver [1], p. 7. ∎

Otro modo de determinar a una medida de probabilidad es mediante los valores de las integrales $< P, f >$, para funciones f uniformemente continuas y acotadas.

Teorema 13. *Sean $P, Q \in \mathcal{P}(S)$. Entonces $P = Q$ si, y sólo si, $< P, f > = < Q, f >$, para toda función f uniformemente continua y acotada.*

Demostración. Ver [1] p.8 ∎

Por lo anterior, es posible establecer resultados para $P \in \mathcal{P}(S)$, en términos de probabilidades de subconjuntos cerrados, o bien, con los valores integrales $< P, f >$. Los conceptos de convergencia débil serán tratados mediante valores integrales, como se verá más adelante.

Definición 27. *Una subclase $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{B}(S)$, es una* ***clase separante*** *si dadas $P, Q \in \mathcal{P}(S)$, tales que $P(A) = Q(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$, implica que $P = Q$.*

Ejemplos:

1. De acuerdo al Teorema 12, la clase de conjuntos cerrados en S constituye una clase separante.

2. Sea $(\mathbb{R}^k, d)$, donde d es la métrica Euclideana y $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Si $F : \mathbb{R}^k \to [0,1]$, se define como

$$F(x_1, \ldots, x_k) = P\left[y \in \mathbb{R}^k : y_i \leq x_i,\, i \leq k\right],$$

   Entonces los conjuntos de la forma

$$\left\{y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k : y_i \leq x_i,\, i \leq k\right\},$$

   son una clase separante para F.

3. Sea $(\mathbb{R}^\infty, d)$, donde $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$, y d la métrica dada por

$$d(x, y) = \sum_i \frac{b(x_i, y_i)}{2^i}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots),\, y = (y_1, y_2, \ldots),$$

   donde $b(r, s) = 1 \wedge |r - s|$. Se sabe que d es una métrica equivalente a la métrica usual de $\mathbb{R}$ y bajo ésta, $\mathbb{R}$ es completo y separable. Puede probarse que $(\mathbb{R}^\infty, d)$ también es separable y completo ([1] p. 10). Ahora, sea $\pi_k : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^k$ la proyección natural: $\pi_k(x) = (x_1, \ldots, x_k)$, $x \in \mathbb{R}^\infty$, entonces la clase de conjuntos de dimensión finita $\mathcal{R}_f^\infty$, dada por

$$\mathcal{R}_f^\infty = \left\{\pi_k^{-1} H : H \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k), \quad k \geq 1\right\},$$

   es una clase separante para $\mathcal{P}(\mathbb{R}^\infty)$. Así, si $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^\infty)$, las medidas $P\pi_k^{-1}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$, $k \geq 1$, se denominan sus ***distribuciones de dimensión finita***. Por lo anterior, éstas determinan completamente a P.

4. Sea (C, d) el espacio de funciones continuas en $[0,1]$ con d la métrica uniforme inducida por la norma $||x|| = \sup_t \left|x(t)\right|$, es decir,

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sup_t \left|x(t) - y(t)\right|, \quad x, y \in C.$$

   Se sabe que (C, d) es separable y completo ([1], p. 11). Para este espacio, dados $0 \leq t_1 < \cdots < t_k \leq 1$, se define la proyección natural $\pi_{t_1, \ldots, t_k}(x) : C[0,1] \to \mathbb{R}^k$, como $\pi_{t_1, \ldots, t_k}(x) = (x(t_1), \ldots, x(t_k))$, $x = x(\cdot) \in C[0,1]$. Entonces la clase de conjuntos de dimensión finita en C dados por

$$C_f := \left\{\pi_{t_1, \ldots, t_k}^{-1} H : 0 \leq t_1 < \cdots, < t_k \leq 1, \quad H \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)\right\},$$

   es una clase separante para $\mathcal{P}(C[0,1])$.

Definición 28. *Una medida $P \in \mathcal{P}(S)$ se dice* ***tensa*** *si para cada ε, existe K compacto tal que $P(K) > 1 - \varepsilon$.*

Teorema 14. *Si S es separable y completo, entonces cada $P \in \mathcal{P}(S)$ es tensa.*

Demostración. Ver [1] p. 8 ∎

Con el teorema anterior, para cada uno de los ejemplos arriba mencionado, se tiene que las medidas de probabilidad definidas ahí siempre son tensas.

4.1.2. Convergencia Débil

Definición 29. *Sean P, $P_n \in \mathcal{P}(S)$, $n \in \mathbb{N}$. Se dice que la sucesión de medidas $\{P_n\}$* ***converge débilmente*** *a P en S, denotado por $P_n \Rightarrow P$, cuando*

$$P_n(A) \to P(A), \quad \forall A \in \mathfrak{B}(S), \ \textit{tal que} \ P(\partial A) = 0,$$

donde los conjuntos $A \in \mathfrak{B}(S)$ tales que $P(\partial A) = 0$ se denominan conjuntos de P-continuidad.

En el Teorema 13 se estableció que las integrales $< P, f >$, para $f \in C_b(S)$, determinan completamente a $P \in \mathcal{P}(S)$. Lo anterior permite dar una definición equivalente a la Definición 29.

Definición 30. *Sean P, $P_n \in \mathcal{P}(S)$, $n \in \mathcal{N}$. Se dice que la sucesión de medidas P_n* ***converge débilmente*** *a P en S, denotado por $P_n \Rightarrow P$ si, y sólo, si*

$$< P_n, f > \to < P, f >, \qquad \forall f \in C_b(S).$$

Uno de los resultados más importantes sobre convergencia débil es el teorema de Portmanteau, el cual establece condiciones equivalentes para probar convergencia débil. Sea $C_b^u(S)$ el espacio de funciones continuas y uniformemente acotadas en S.

Teorema 15 (Teorema de Portmanteau)**.** *Sea (S, d) un espacio métrico. Para $P_n, P \in \mathcal{P}(S)$, son equivalentes*

i) $P_n \Rightarrow P$ *en* S.

ii) $P_n f \to P$, $\forall f \in C_b^u(S)$.

iii) $\limsup_n P_n(F) \leq P(F)$, $\forall F$ *cerrado.*

iv) $\liminf_n P_n(G) \geq P(G)$, $\forall G$ *abierto.*

v) $P_n(A) \to P(A)$, $\forall A$ *conjunto de $P-$continuidad.*

Demostración. Ver [1], p. 16. ∎

Otro modo de probar convergencia débil, es mostrando la convergencia $P_n(A) \to P(A)$, para una cierta clase de conjuntos A. Para ello, de modo análogo al concepto de clase separante, se tiene un concepto para la clase de conjuntos que determinan la convergencia débil de una sucesión $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Definición 31. *La clase $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}(S)$ se denomina* ***clase determinante de convergencia*** *si para $P, P_n \in \mathcal{P}(S)$, tales que $P_n(A) \to P(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ conjunto de P-continuidad, se sigue que $P_n \Rightarrow P$.*

Observación: Una clase determinante de convergencia también es una clase separante, pero el recíproco no necesariamente es cierto.

Ejemplos:

1. Sea $(\mathbb{R}^k, d)$ y $a = (a_1, \ldots, a_k), b = (b_1, \ldots, b_k) \in \mathbb{R}^k$. Los rectángulos
$$\left\{y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k : \quad a_i < y_i \le b_i,\ 1 \le i \le k\right\},$$
forman una clase determinante de convergencia. Mas aún, la clase
$$\left\{Q_x = \left\{y \in \mathbb{R}^k : y_i \le x_i,\ i \le k\right\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k\right\},$$
es una clase determinante de convergencia para las funciones de distribución inducidas por P y P_n, es decir, para $F(x) = P(Q_x)$ y $F_n(x) = P_n(Q_x)$.

2. Sea $(\mathbb{R}^\infty, d)$. La clase separante de conjuntos de dimensión finita $\mathcal{R}_f^\infty$,
$$\mathcal{R}_f^\infty = \left\{\pi_k^{-1} H : k \ge 1, \quad H \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)\right\}$$
es también una clase determinante de convergencia. Así, si $P, P_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^\infty)$, entonces $P_n \Rightarrow P$ si, y sólo si, $P_n(A) \to P(A)$, para todo $A \in \mathcal{R}_f^\infty$, conjunto de P-continuidad.

3. Sea (C, d). La clase separante de conjuntos de dimensión finita en C,
$$C_f := \left\{\pi_{t_1,\ldots,t_k}^{-1} H : 0 \le t_1 < \cdots < t_k \le 1, \quad H \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)\right\},$$
no es una clase determinante de convergencia para $\mathcal{P}(C)$.

Teorema 16. *$P_n \Rightarrow P$ si, y sólo sí, cada subsucesión de $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, contine una subsucesión que converge débilmente a P.*

Teorema del Mapeo

Sean (S, d) y (S', d') espacios métricos y sea $h : (S, d) \to (S', d')$ una función medible. Cada medida de probabilidad $P \in \mathcal{P}(S)$ induce una medida de probabilidad, Ph^{-1}, tal que $Ph^{-1} \in \mathcal{P}(S')$.

Teorema 17. *Si $h : (S, d) \to (S', d')$ es una función continua y $P_n \Rightarrow P$ en S, entonces $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$ en S'.*

Ejemplos:

1. Sea $\pi_k : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^k$, la proyección natural. Como π_k es continua para cada $k \in \mathbb{N}$, se sigue que si $P_n \Rightarrow P$ en $\mathbb{R}^\infty$, entonces $P_n\pi_k^{-1} \Rightarrow P\pi_k^{-1}$ en $\mathbb{R}^k$. El recíproco se sigue del hecho de que $\mathcal{R}_f^\infty$ es una clase determinante de convergencia en $\mathbb{R}^\infty$.

2. Sea (C, d) y $\pi_{t_1,\ldots,t_k} : C \to \mathbb{R}^k$ la proyección natural en C. Si $P_n \Rightarrow P$ en C, entonces $P_n\pi_{t_1,\ldots,t_k}^{-1} \Rightarrow P\pi_{t_1,\ldots,t_k}^{-1}$ en $\mathbb{R}^k$. Pero el recíproco no es cierto, puesto que la clase separante de conjuntos de dimensión finita,
$$C_f := \left\{\pi_{t_1,\ldots,t_k}^{-1} H : 0 \le t_1 < \cdots, < t_k \le 1, \quad H \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)\right\},$$
no es una clase determinante de convergencia.

Para concluir esta sección, se enuncia el teorema siguiente en el cual se ha debilitado el supuesto de que h sea una función continua.

Teorema 18. *Sea $h : (S, d) \to (S', d')$ una función medible y D_h el conjunto de sus puntos de discontinuidad. Si $P_n \Rightarrow P$ en S y $P(D_h) = 0$, entonces $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$.*

Demostración. Ver [1], p. 21. ∎

4.1.3. Compacidad Relativa

En la sección anterior se vio que en el espacio (C, d), si $P_n \Rightarrow P$ en C, entonces se tiene la convergencia de distribuciones de dimensión finita, es decir, $P_n \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} \Rightarrow P\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}$ en $\mathbb{R}^k$. La pregunta natural es saber bajo qué condiciones se tiene el resultado recíproco en espacios generales. Más adelante se verá que esto ocurre bajo la hipótesis de *compacidad relativa.*

Definición 32. *Una familia* $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ *es* ***relativamente compacta*** *si para cada sucesión* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* Π*, existe una subsucesión* $\{P_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *y una medida* $Q \in \mathcal{P}(S)$ *tal que* $P_{n_i} \Rightarrow Q$*,* $i \to \infty$*.*

El concepto anterior tiene relación con la siguiente

Definición 33. *Una familia* $\Pi \in \mathcal{P}(S)$ *se dice* ***tensa*** *(tight) si* $\forall \varepsilon > 0$ *existe* $K \subset S$ *compacto tal que*

$$\inf_{P\in\Pi} P(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Teorema 19 (Teorema de Prohorov)**.** *Sea* (S, d) *un espacio métrico y* $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$*.*

a) Si Π *es tensa, entonces es relativamente compacta.*

b) Si S *es separable y completo, y* Π *es relativamente compacta, entonces es tensa.*

Demostración. Ver [1], p. 60. ∎

El teorema de Prohorov indica que el concepto de *compacidad relativa* es equivalente al concepto de *tensión* cuando el espacio (S, d) es separable y completo. Este resultado será de importancia para probar convergencia débil para $S = D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$. Más adelante se establecerán las condiciones necesarias para contar con un espacio que satisfaga las condiciones del Teorema 19.

4.1.4. Métrica de Prohorov

Es posible dotar al espacio $\mathcal{P}(S)$ de una topología adecuada de manera que el concepto de convergencia débil sea equivalente al concepto de convergencia en dicha topología. En tal caso, se tomarán como vecindades básicas a los conjuntos de la forma

$$\Big\{Q \in \mathcal{P}(S) : \big|Qf_i - Pf_i\big| < \varepsilon,\, i \leq k,\, f_i \in C_b(S)\Big\}, \quad \epsilon > 0.$$

Si S es separable y completo, lo anterior se logra con la topología inducida por la *métrica de Prohorov*, que se define a continuación.
Sean $P, Q \in \mathcal{P}(S)$, defínase

$$\rho(P, Q) = \inf\Big\{\varepsilon > 0 : P(F) \leq Q(F^\varepsilon) - \varepsilon,\ \forall F \subset S \text{ cerrado}\Big\}, \tag{4.1}$$

donde $F^\varepsilon = \{x \in S : \inf d(x, y) < \varepsilon\}$.

Para esta métrica se tiene el siguiente resultado ([1], p. 72).

Teorema 20. *Sea* (S, d) *separable y completo. Entonces la convergencia débil es equivalente a la convergencia en la métrica* ρ*,* $\mathcal{P}(S)$ *es separable y completo y un conjunto en* $\mathcal{P}(S)$ *es relativamente compacto si, y sólo si, su* ρ*-cerradura es* ρ*-compacta.*

4.1.5. Convegencia Débil en $D(\mathbb{R}^+, E)$.

En esta sección se enunciarán los resultados de convergencia débil sobre el espacio $S = D(\mathbb{R}^+, E)$, donde (E, r) será un espacio métrico con r la métrica correspondiente y $q := r \wedge 1$.

Se denotará al espacio de funciones *càdlàg* con valores en E, como

$$D(\mathbb{R}^+, E) = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to E : \lim_{s \downarrow t} f(s) = f(t), \forall t \geq 0 \text{ y } \lim_{s \uparrow t} f(s) = f(t-) \text{ existe } \forall t > 0 \right\}.$$

Observaciones:

1. Por convención, $\lim_{s \uparrow 0} x(s) = x(0-) = x(0)$.
2. Si $x \in D(\mathbb{R}^+, E)$, x tiene a lo más un conjunto numerable de puntos de discontinuidad.

Se ha visto que el teorema de Prohorov es aplicable únicamente para espacios separables y completos. En lo que sigue, se establecerá una métrica bajo la cual el espacio $D(\mathbb{R}^+, E)$ cumple dicha hipótesis.

Sean

$$\Lambda' := \left\{ \lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : \lambda \text{ es estrictamente creciente} \right\},$$
$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \Lambda' : \lambda \text{ es Lipschitz continua y } \gamma(\lambda) < +\infty \right\},$$

donde

$$\gamma(\lambda) := \text{ess sup}_{s > t \geq 0} \left| \log \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \right|.$$

Para $x, y \in D(\mathbb{R}^+, E)$ se define

$$d(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty e^{-u} d'(x, y, \lambda, u) du \right\}, \tag{4.2}$$

donde

$$d'(x, y, \lambda, u) := \sup_{t \geq 0} q(x(t \wedge u), y(\lambda(t) \wedge u)).$$

Teorema 21. *Sea (E, r) espacio métrico y $D(\mathbb{R}^+, E)$ el espacio de Skorohod correspondiente.*

i) Si E es separable, entonces $D(\mathbb{R}^+, E)$ es separable

ii) d es una métrica en $D(\mathbb{R}^+, E)$ y la topología que induce se denomina topología de Skorohod.

iii) Si (E, r) es completo y separable entonces $(D(\mathbb{R}^+, E), d)$ también es completo y separable.

Demostración. Ver [18] p. 117 y Teorema 5.6. ∎

La siguiente proposición da criterios para probar convergencia en el espacio $D(\mathbb{R}^+, E)$ con la métrica d.

Proposición 18. *Sean $x_n, x \in D_E[0, \infty)$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones*

a) $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$

b) $\exists \{\lambda_n\} \subset \Lambda$ *tal que*

$$\lim_{n \to \infty} \gamma(\lambda_n) = 0, \tag{4.3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \leq T} r(x(\lambda_n(t)), x_n(t)) = 0, \quad \forall T > 0. \tag{4.4}$$

c) $\forall T > 0$, $\exists \lambda_n \in \Lambda'$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\leq T} |\lambda_n(t) - t| = 0, \tag{4.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\leq T} r(x(\lambda_n(t)), x_n(t)) = 0. \tag{4.6}$$

d) $\forall s_n \geq t_n$, *tales que* $\lim_{n\to\infty} = t$ *y* $\lim_{n\to\infty} s_n = t$ *se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \left([r(x_n(t_n), x(t)) \vee r(x_n(s_n), x(t))] \wedge r(x_n(t_n), x(t-))\right) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(r(x_n(s_n), x(t)) \wedge [r(x_n(t_n), x(t-)) \vee r(x_n(s_n), x(t-))]\right) = 0.$$

Demostración. Ver [18] pp. 119-127. ■

Es relevante observar que en general no existe relación entre convergencia en $D(\mathbb{R}^+, E)$ y convergencia puntual. Lo anterior se deduce del siguiente ejemplo. Sean

$$x(t) = \mathbb{I}_{[1,\infty)}(t),$$
$$x_n(t) = \mathbb{I}_{[1+\frac{1}{n},\infty)}(t),$$
$$y_n(t) = \mathbb{I}_{[1,1+\frac{1}{n})\cup[1+\frac{2}{n},\infty)}(t).$$

Entonces

a) $y_n \to x$ puntualmente en $[0,\infty)$ pero $y_n \nrightarrow x$ en $D_E[0,\infty)$.

b) $x_n \nrightarrow x$ puntualmente en $[0,\infty)$ pero $x_n \to x$ en $D_E[0,\infty)$.

Conjuntos Compactos y Tensión

Hasta el momento se ha establecido una métrica bajo la cual el espacio $D(\mathbb{R}^+, E)$ es un espacio separable y completo. En lo que sigue se darán las condiciones para caracterizar a los conjuntos compactos de $D(\mathbb{R}^+, E)$ y posteriormente, los conjuntos compactos en $\mathcal{P}(D(\mathbb{R}^+, E))$. Para éste último caso, se omitirán los resultados generales, y en su lugar se establecerán los correspondientes para las distribuciones de probabilidad de procesos con valores en $D(\mathbb{R}^+, E)$, las cuales son elementos de $\mathcal{P}(D(\mathbb{R}^+, E))$.

Sean $x \in D(\mathbb{R}^+, E)$, $\delta > 0$ y $T > 0$. Se define el ***módulo de continuidad*** de x como

$$w'(x, \delta, T) := \inf_{\{t_i\}} \max_i \sup_{s,t\in[t_{i-1},t_i)} r(x_s, x_t),$$

donde el ínfimo se toma sobre los $\{t_i\}$ tales que

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < T \leq t_n, \text{ y } \min_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1}) > \delta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 22. *Sea (E, r) completo. Un conjunto $A \subset D(\mathbb{R}^+, E)$, es relativamente compacto si, y sólo si, se cumplen*

i) Para cada $t \in \mathbb{Q}^+$, existe un conjunto compacto, $\Gamma_t \subset E$, tal que $x(t) \in \Gamma_t$, $\forall x \in A$.

ii) Para cada $T > 0$, $\lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in A} w'(x, \delta, T) = 0$.

Teorema 23. *Sea (E, r) separable y completo. La sucesión $\{P_n\} \subset \mathcal{P}(D(\mathbb{R}^+, E))$, es* relativamente compacta *(o tensa) si, y sólo si, se satisfacen:*

i) Para cada $\eta > 0$ y $t \in \mathbb{Q}^+$, existe un compacto $\Gamma_{\eta,t} \subset E$, tal que

$$\inf_n P_n\left[x(t) \in \Gamma_{\eta,t}\right] \geq 1 - \eta.$$

ii) Para cada $\eta > 0$ y $T > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\sup_n P_n\left[x : w(x, \delta, T) \geq \eta\right] \leq \eta.$$

Convergencia en Distribución

Más adelante se enunciará un resultado que indica que el MR^α es un proceso con trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, E)$, donde E es un cierto espacio de medidas específico. De manera general, cuando se tienen procesos estocásticos con trayectorias en el espacio $D(\mathbb{R}^+, E)$ y se desea estudiar su convergencia en distribución, se hace necesario contar con resultados para este tipo de convergencia en $D(\mathbb{R}^+, E)$. Lo anterior es la razón de ser de este apartado.

Definición 34. *Sea $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un proceso estocástico con valores en un espacio métrico (E, r). Diremos que X tiene trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, E)$ si*

$$\mathbb{P}[X(\cdot) \in D(\mathbb{R}^+, E)] = 1.$$

Observaciones:

1. Se puede probar que
$$\Big\{\omega \in \Omega : X(\omega, \cdot) \in D(\mathbb{R}^+, E)\Big\},$$
es medible.

2. Un elemento aleatorio con valores en $D(\mathbb{R}^+, E)$, es un proceso estocástico con trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, E)$. Y el recíproco se garantiza sólo si E es separable.

3. Si E es separable, y $\pi_t : D(\mathbb{R}^+, E) \to E$ está dada por $\pi_t(x) = x(t)$, entonces $\mathfrak{B}(D(\mathbb{R}^+, E))$ coincide con la $\sigma(\pi_t : 0 \leq t < \infty)$. (Ver [18], p. 127).

Por lo observado anteriormente, se tiene que si (E, r) es separable, entonces para X con valores en $D(\mathbb{R}^+, E)$, al ser una variable aleatoria $D(\mathbb{R}^+, E)$-valuada sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, es posible definir su distribución, $P = \mathbb{P}X^{-1}(\cdot)$, como la medida de probabilidad inducida por X sobre $(D(\mathbb{R}^+, E), \mathfrak{B}(D(\mathbb{R}^+, E)))$. Es claro que $P \in \mathcal{P}(D(\mathbb{R}^+, E))$.

Definición 35. *Sea $\{X^\alpha\}_\alpha$ una familia de procesos con trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, E)$. Diremos que $\{X^\alpha\}_\alpha$ es tensa (o relativamente compacta) si la correspondiente familia de distribuciones*

$$\Big\{P_\alpha(\cdot) := \mathbb{P}_\alpha(X^\alpha)^{-1}(\cdot)\Big\}_\alpha$$

es tensa (o relativamente compacta) en $\mathcal{P}(D(\mathbb{R}^+, E))$.

Nota: Para la definición anterior, y en adelante, se supondrá que para cada α, X^α está definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \mathbb{P}_\alpha)$.

Teorema 24. *Sea (E, r) separable y completo. Sea $\{X^\alpha\}_\alpha$ una familia de procesos con trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, E)$. Entonces $\{X^\alpha\}_\alpha$ es relativamente compacta (o tensa), si, y sólo si,* *i) Para cada* $\eta > 0$ *y* $t \in \mathbb{Q}^+$*, existe un compacto* $\Gamma_{\eta,t} \subset E$*, tal que*

$$\inf_{\alpha} \mathbb{P}_\alpha \left[X_\alpha(t) \in \Gamma^{\eta}_{\eta,t} \right] \geq 1 - \eta,$$

donde

$$\Gamma^{\eta}_{\eta,t} := \left\{ x \in E : \inf_{y \in \Gamma_{\eta,t}} r(x,y) < \eta \right\}.$$

ii) Para cada $\eta > 0$ *y* $T > 0$*, existe* $\delta > 0$*, tal que*

$$\sup_{\alpha} \mathbb{P}_\alpha \left[w'(X^\alpha, \delta, T) \geq \eta \right] \leq \eta.$$

Observación: En un caso más general, si (E,r) no es separable pero se cumple la condición $ii)$ y la condición de que para cada $\eta > 0$ y $T > 0$ existe un compacto $\Gamma_{\eta,T} \subset E$ tal que

$$\inf_{\alpha} \mathbb{P}_\alpha \left[X_\alpha(t) \in \Gamma_{\eta,T}, 0 \leq t \leq T \right] \geq 1 - \eta, \tag{4.7}$$

entonces existe una modificación $\tilde{X}^\alpha$, para cada α, la cual es una variable aleatoria $D(\mathbb{R}^+, E)$-valuada, tal que $\{\tilde{X}^\alpha\}$ es relativamente compacta (Ver [18], Teorema 7.6).

Teorema 25. *Sean* (E,r) *separable,* X *y* $X^n = \{X^n_t, t \geq 0\}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, procesos con trayectorias en* $D(\mathbb{R}^+, E)$ *y sea* $C(X) = \{t \geq 0 : \mathbb{P}[X_t = X_{t-}] = 1\}$*.*

- *Si* $X^n \Rightarrow X$*, entonces* $(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_n}) \Rightarrow (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$*, para todo conjunto finito* $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset C(X)$*. Además, para cada conjunto finito* $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset [0, \infty)$*, existen sucesiones*

$$\{t^k_1\}_k \subset [t_1, \infty), \ldots, \{t^k_n\}_k \in [t_n, \infty]$$

  tales que $t^k_i \to t_i$ *cuando* $k \to \infty$ *y*

$$(X^n_{t^k_1}, \ldots, X^n_{t^k_n}) \Rightarrow (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}).$$

- *Si* $\{X^n\}_n$ *es relativamente compacto en* $\mathcal{P}(D(\mathbb{R}^+, E))$ *y existe* $B \subset \mathbb{R}^+$ *denso tal que*

$$(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_n}) \Rightarrow (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$$

  $\forall \{t_1, \ldots, t_n\} \subset B$ *finito, entonces* $X^n \Rightarrow X$ *en* $D(\mathbb{R}^+, E)$*.*

Criterios de Compacidad Relativa

Los criterios establecidos anteriormente, no suelen ser fácilmente aplicables, de ahí que resulte necesario establecer criterios más convenientes. Para la prueba de convergencia débil del MR^α, se utilizarán criterios relacionados con los teoremas subsecuentes.

Teorema 26. *Sea* (E,r) *completo y separable, y sea* $\{X^\alpha\}$ *familia de procesos con trayectorias en* $D(\mathbb{R}^+, E)$*. Si se satisface la condición* $i)$ *del Teorema 24, entonces* $\{X^\alpha\}$ *es relativamente compacto si, y sólo si, para cada* $T > 0$*, existe* $\beta > 0$ *y familia* $\{\gamma^T_\alpha(\delta); 0 < \delta < 1\}$ *de variables aleatorias no negativas que cumplen*

$$i) \ E\left[q^\beta(X^\alpha_{t+u}, X^\alpha_t) \middle| \mathcal{F}^{X_\alpha}_t \right] \leq E[\gamma^T_\alpha(\delta) | \mathcal{F}^{X^\alpha}_t], \quad 0 \leq t \leq T, \ 0 \leq u \leq \delta$$

$$ii) \ \lim_{\delta \to 0} \overline{\lim}_{n \to \infty} E[\gamma^T_\alpha(\delta)] = 0.$$

Demostración. Ver [40], Teorema 2.7. ■

Nota. Para sucesiones $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, en el Teorema 24 y la desigualdad (4.7), el $\sup_\alpha$ y el $\inf_\alpha$ se reemplazan por $\overline{\lim}_{n \to \infty}$ y $\underline{\lim}_{n \to \infty}$, respectivamente.

4.1.6. Convergencia Débil en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$

Sean

$$K_p(\mathbb{R}^d) = C_K^\infty(\mathbb{R}^d) \cup \{\varphi_P\}, \quad K_p(\dot{\mathbb{R}}^d) = C_K^\infty(\mathbb{R}^d) \cup \{\dot{\varphi}_p\},$$

donde cada $f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ se extiende a $\dot{\mathbb{R}}^d$ poniendo $f(\tau_d) = 0$. Para toda $\varphi \in K_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$ se definen

$$\begin{aligned}
&\pi_\varphi : D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)) \to D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}),\\
&\tilde{\pi}_\varphi : \mathcal{P}(D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))) \to \mathcal{P}(D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})),\\
&(\pi_\varphi X)(t) =< X_t, \varphi >= \int \varphi(y) X(t, dy),\\
&(\tilde{\pi}_\varphi P)(A) = (P \circ \pi_\varphi^{-1})(A),
\end{aligned}$$

donde $t \geq 0$, $X \in D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$, $A \in \mathcal{B}(D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}))$, $P \in \mathcal{P}(D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)))$. Con la notación anterior, se establece el siguiente teorema para probar tensión en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$.

Teorema 27. *Una sucesión $\{P_n\} \subset \mathcal{P}(D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)))$ es tensa si, y sólo si, $\forall \varphi \in K_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$ la familia $\{\tilde{\pi}_\varphi P_n\}$ es tensa en $\mathcal{P}(D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}))$. Es decir, si $\{X^n = \{X^n(t), t \geq 0\}\}_{n=1}^\infty$ son procesos en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$, $\{X^n\}$ es tensa si, y sólo si, $\forall \varphi \in K_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$, $\{< X^n(t), \varphi >, t \geq 0\}_{n=0}^\infty$ es tensa en $D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.*

El teorema anterior es de gran relevancia puesto que permite reducir la tensión de procesos con valores en $\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$, a la tensión de sus proyecciones, es decir, tensión en $D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. La ventaja es que para el espacio $D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ se tienen criterios más convenientes. Así, para probar que la familia de distribuciones de sucesiones de $MR^\alpha R$ es *tensa*, se utilizará la siguiente proposición, la cual se obtiene con el Teorema 26 y el Teorema 27.

Proposición 19. *Sea $d < 2p$. Para cada $\varphi \in K_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$ la familia de procesos reales $\{< X_t^n, \varphi >, t \geq 0\}_n$ es tensa en $D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ si, y sólo si,*

a) $\forall \eta > 0$, $\forall t \in \mathbb{Q}^+$, *existe $\Gamma_{\eta,t} \subset \mathbb{R}$ compacto tal que*

$$\inf_n P\left[< X_t^n, \varphi >\in \Gamma_{\eta,t}^\eta\right] \geq 1 - \eta,$$

donde $\Gamma_{\eta,t}^\eta$ es la η-vecindad de $\Gamma_{\eta,t}$.

b') $\forall T > 0$, $\exists \beta > 0$ *y* $\{\gamma_n(\delta), 0 < \delta < 1\}$ *variables aleatorias no negativas tales que*

$$E\left[q^\beta\left(< X_{t+u}^n, \varphi >, < X_t^n, \varphi >\right)\middle|\mathcal{F}_t^{X^n}\right] \leq E\left[\gamma_n(\delta)\middle|\mathcal{F}_t^{X^n}\right], \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq u \leq \delta,$$

donde $q(x, y) = |x - y| \wedge 1$,

c) $\lim_{\delta \to 0} \sup_n E[\gamma_n(\delta)] = 0$.

Observaciones:

1. El Teorema 27, tiene una versión más general en el siguiente sentido: Sea M un espacio vectorial topológico y M' su dual, en varios casos, una sucesión de procesos $\{X^n\}$, M'-valuados con trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, M')$ es tensa si, y sólo sí, $\forall \varphi \in M$, se tiene que $\{< X^n(t), \varphi >, t \geq 0\}_n$ es tensa. Como ejemplo se tiene el siguiente teorema

   Teorema 28 (Teorema de Mitoma). *Si $\{X^n(t), t \geq 0\}$ es un proceso en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$, $\{X^n\}_n$ es tensa en $(D(\mathbb{R}^+, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)))$ si, y sólo si, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\{< X^n(t), \varphi >, t \geq 0\}_n$ es tensa en $D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.*

2. El espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ es de importancia porque permite estudiar límites de fluctuaciones ya que éste es un espacio vectorial, lo cual permite garantizar que $N_t - EN_t$ es también un elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

4.2. Resumen

En el capítulo anterior se dieron definiciones y resultados sobre convergencia débil en espacios métricos. Para los propósitos de la tesis, debido a que el MR^{α} es un proceso con trayectorias en el espacio de Skorohod con valores en las medidas p-temperadas, $D(\mathbb{R}^{+}, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$, se consideró importante tratar la convergencia débil en el espacio $D(\mathbb{R}^{+}, E)$. A modo de síntesis se tiene lo siguiente:

1. Se dan dos definiciones de convergencia débil de medidas de probabilidad, ver Definicion 29 y Definición 30. Esta última surge como consecuencia del Teorema 13, en el cual se establece que las medidas de probabilidad quedan determinadas completamente por las integrales $< P, f >$, para $f \in C_b(S)$.

2. Con el teorema del mapeo, Teorema 18, se tiene que si $\{P_n\}, P \in \mathcal{P}(S)$ y $P_n \Rightarrow P$ entonces se tiene la convergencia de las distribuciones de dimensión finita. El recíproco queda garantizado con la hipótesis de compacidad relativa para la familia $\{P_n\}$, ver Teorema 25.

3. En el teorema de Prohorov, Teorema 19, se establece que la compacidad relativa en espacios métricos completos y separables es equivalente al concepto de *tensión*. Este resultado será el que se utilizará para probar la convergencia al superproceso que nos interesa.

4. Se define la métrica de Prohorov, ver (4.1), con la cual se establece que si el espacio es separable y completo, entonces la convergencia débil es equivalente a la convergencia en dicha métrica.

5. En la Definición 33 de *tensión*, se establece la necesidad de caracterizar conjuntos compactos en espacios de funciones. Así, los criterios para probar tensión en C surgen de la caracterización de conjuntos compactos en el espacio de funciones C que se establece en el Teorema de Arzelà-Ascoli (ver apéndice, [1]).

6. Para el caso del espacio de funciones $D(\mathbb{R}^{+}, E)$, se requiere establecer una métrica que haga a dicho espacio separable y completo para poder usar el Teorema de Prohorov.

7. En el Teorema 21 es de importancia el resultado sobre que si (E, r) es completo y separable, entonces $D(\mathbb{R}^{+}, E)$ también es completo y separable. Dicho teorema será utilizado para el caso en el que E es el espacio de medidas p-temperadas.

8. Finalmente, el Teorema 27, permite reducir el concepto de *tension* de procesos con valores en $\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$, al concepto de tensión de sus proyecciones, es decir, tensión en $D(\mathbb{R}^{+}, \mathbb{R})$.

Capítulo 5

Superproceso de Dawson-Watanabe

En este capítulo se establece la existencia del superproceso de Dawson-Watanabe, así como su caracterización vía el problema de la martingala. Como se ha mencionado, éste surge como límite de difusión de movimientos α-estables ramificados. Se establecen resultados sobre el movimiento $\alpha-$estable ramificado reescalado ($MR^{\alpha}R$) y se concluye con la prueba de la convergencia débil de éstos al superproceso. El proceso límite se caracteriza tanto por sus distribuciones de dimensión finita como vía un problema de martingala bien planteado. Al final del capítulo se incluyen las demostraciones de algunos resultados técnicos que se utilizan en las demostraciones principales.

El método para obtener al superproceso de Dawson-Watanabe como límite de sistemas de partículas ramificadas, el cual se expondrá en este capítulo, se basa en la idea, subyacente en el teorema de Donsker, de aproximar una sucesión de procesos por un proceso con tiempo y estado continuos.

Sea $N = \{N_t, t \geq 0\}$ un MR^{α}. Se define una sucesión de procesos $\{N^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$, el proceso $N^n = \{N_t^n, t \geq 0\}$ se específica de acuerdo a los siguientes parámetros:

a) ***Configuración y densidad inicial de partículas***. En capítulos anteriores se hizo mención al hecho de que la medida de intensidad inicial determina si el proceso MR^{α} toma valores en el espacio de medidas finitas, o en medidas infinitas de Radon. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, se puede suponer que N_0^n toma valores en $\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$ y $\mathbb{E}N_0^n \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$, o bien $\mathbb{E}N_0^n \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$.

   Para estudiar la evolución del sistema cuando la densidad de partículas es alta, se supondrá que la intensidad inicial $\mathbb{E}N_0^n$ es proporcional a n, de modo que el promedio de partículas en un conjunto acotado tienda a infinito con n, es decir si $\mathbb{E}N_0^1 = \lambda$, entonces $\mathbb{E}N_0^n := \lambda_n = n\mathbb{E}N_0^1$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

b) ***Ley de Ramificación.*** La función generadora de probabilidades de la ley de ramificación para cada N_0^n, puede ser

   i) *Constante*. En este caso se supone que cada sistema N^n tiene la misma ley de ramificación la cual es crítica, con función generadora de probabilidades F. En este caso usualmente se imponen condiciones sobre los momentos, como por ejemplo que F tenga segundo momento factorial m_2 finito.
   Una ley de ramificación comúnmente utilizada en límites de difusión corresponde a la *ramificación binaria crítica*, donde la función generadora de probabilidades es

$$F(s) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j q_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s^2, \quad s \in [0,1].$$

Por otro lado, para obtener como límite al llamado (d,α,β,b)-superproceso, se toma la función generadora

$$F(s) = s + b(s-1) + c(1-s)^{1+\beta}, \quad s \in [0,1],\ b \in (-1,c],\ 0 < c \leq \frac{1+b}{1+\beta},\ 0 < \beta \leq 1.$$

la cual, no necesariamente tiene varianza finita. Nótese que la ramificación binaria crítica es un caso particular de ésta última para los parámetros $\beta = 1$ y $b = 0$.

ii) *Reescalada.* Es decir, dependiente de n, donde la expresión más general a considerar suele ser de la forma $F^n(s) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j q_j^n$, tal que los momentos factoriales asociados a F^n son

$$\begin{aligned} m_1^{(n)} &= \sum j q_j^{(n)}, \\ m_2^{(n)} &= \sum j(j-1) q_j^{(n)}, \\ m_3^{(n)} &= \sum j(j-1)(j-2) q_j^{(n)}, \end{aligned}$$

y cumplen

$$\begin{aligned} & m_1^{(n)} = 1 + \frac{a_n}{n}, && \text{con } \lim_{n\to\infty} a_n = a, \\ & m_2 := \lim_{n\to\infty} m_2^{(n)} && \text{existe y es finito,} \\ & \sup_n m_3^{(n)} < +\infty. && \end{aligned} \tag{5.1}$$

c) ***Tasa de ramificación***. Se acelera el tiempo en el que ocurre la ramificación de las partículas, de modo que ocurren más ramificaciones por unidad de tiempo. El objetivo es que en el límite la vida media de las partículas sea cero, lo cual se conoce como ramificación continua.

Por ejemplo, para obtener el superproceso de DW el parámetro de la ley del tiempo de vida de las partículas suele tomarse como $V_n = nV$, de modo que la vida media de las partículas es $\frac{1}{nV}$. Por otra parte, para obtener el (d,α,β,b)-superproceso, se considera $V_n = n^{\beta}V$, para $\beta \in (0,1]$.

e) ***Masa de las partículas***. Las partículas no tienen masa unitaria, a cada una se le asigna masa pequeña. En general, a cada partícula en el sistema se le asigna masa $1/n$.

Observaciones:

1. El reescalamiento anterior, se conoce como límite de alta densidad, vida media corta y masa pequeña, en inglés ***small mass- short life - high density limit***.

2. Si en las condiciones (5.1) se toma $a_n \to a$, $a \neq 0$, se dice que la ramificación es *asintóticamente crítica*. En este caso se obtiene un proceso límite con deriva en el movimiento.

3. Más adelante se verá que las hipótesis sobre los momentos factoriales de F determinan la continuidad del proceso límite.

5.1. Movimiento α-estable Ramificado Reescalado

Definición 36. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $X^n = \{\frac{1}{n} N_t^n\}_{t\geq 0}$, donde $N^n = \{N_t^n, t \geq 0\}$ es un MR^{α} tal que*

i) Configuración inicial. *La población inicial N_0^n es un campo de Poisson con intensidad $\lambda_n = n\lambda$, donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$.*

ii) Ley de ramificación. *La función generadora de probabilidades es* $F^n(s) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j q_j^n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$, *y es tal que se cumplen las condiciones (5.1).*

iii) Tiempos de vida. *El tiempo de vida de cada partícula es exponencial de parámetro* $V_n := nV$.

El proceso X^n *será llamado* ***Movimiento α-estable Ramificado Reescalado*** *($MR^{\alpha}R$).*

Observaciones:

1. Nótese que en el proceso X^n, cada partícula tiene masa $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. El proceso N^n es un MR^{α}, tal que el tiempo de vida de las partículas es exponencial de parámetro $V_n := nV$, intensidad inicial $\lambda_n := n\lambda$, y función generadora de la ramificación F^n.

3. En el inciso i), una consecuencia de considerar a la medida de Lebesgue radica en que ésta es invariante respecto al semigrupo T_t del MR^{α} , es decir

$$< \lambda, T_t\varphi > = < \lambda, \varphi >, \quad \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d, \lambda).$$

   Esta propiedad será requerida en varias pruebas.

En lo que resta del trabajo (salvo que se establezca explícitamente algún cambio en el reescalamiento), el proceso $X^n = \{X_t^n, t \geq 0\}$ será un $MR^{\alpha}R$ como en la Definición 36. A continuación se establecen algunas propiedades relacionados con este proceso.

Proposición 20. *Sea* $X^n = \{X_t^n, t \geq 0\}$ *un* $MR^{\alpha}R$. *Si* $\mu \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$, *el* ***funcional de transición de Laplace*** *de* X^n, *dado* $X_0^n = \mu$, *está dado por la expresión*

$$L_t(\varphi|X_0^n = \mu) := \mathbb{E}\left[e^{-<X_t^n,\varphi>}|X_0^n = \mu\right] = e^{\left\langle \mu, n\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right)\right\rangle}, \quad \varphi \in C_p^+(\mathbb{R}^d), \quad t > 0, \tag{5.2}$$

donde $\omega_{\varphi/n}(t)$ *es la solución mild de la ecuación diferencial parcial no lineal*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{\varphi/n}}{\partial t} &= (\Delta_\alpha - Vn)\omega_{\varphi/n}(t) + Vn^2\left[1 - F^{(n)}\left(1 - \frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right)\right] \\ \omega_{\varphi/n}(0,x) &= n\left(1 - e^{-\varphi(x)/n}\right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Demostración. Sea $\varphi \in C_p^+(\mathbb{R}^d)$ y $t > 0$. Usando la Definición 25 con la expresión dada en (3.20), se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[e^{-<X_t^n,\varphi>}\Big|X_0^n = \mu\Big] &= \mathbb{E}\Big[e^{-<\frac{1}{n}N_t^n,\varphi>}\Big|\frac{1}{n}N_0^n = \mu\Big] = \mathbb{E}\left[e^{-<N_t^n,\frac{1}{n}\varphi>}\Big|N_0^n = n\mu\right] \\ &= e^{\left\langle n\mu, \log(1-v_{\varphi/n}(t))\right\rangle}, \end{aligned}$$

donde $v_{\varphi/n}$ es la solución *mild* de la ecuación diferencial parcial

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{\varphi/n}(t)}{\partial t} &= (\Delta_\alpha - nV)v_{\varphi/n}(t) + nV\left[1 - F^{(n)}(1 - v_{\varphi/n}(t))\right], \quad t > s, \\ v_{\varphi/n}(x,s) &= 1 - e^{-\varphi(x)/n}. \end{aligned}$$

Poniendo $\frac{1}{n}w_{\varphi/n}(t) := v_{\varphi/n}(t)$ se obtiene (5.2), es decir

$$\mathbb{E}\Big[e^{-<X_t^n,\varphi>}\Big|X_0^n\Big] = e^{\left\langle n\mu, \log(1-v_{\varphi/n}(t))\right\rangle} = e^{\left\langle n\mu, \log(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t))\right\rangle},$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_{\varphi/n}(t)}{\partial t} = n\frac{\partial v_{\varphi/n}(t)}{\partial t} &= n\left((\Delta_\alpha - nV)v_{\varphi/n}(t) + nV\left[1 - F^{(n)}(1 - v_{\varphi/n}(t))\right]\right) \\ &= (\Delta_\alpha - nV)nv_{\varphi/n}(t) + n^2V\left[1 - F^{(n)}(1 - v_{\varphi/n}(t))\right] \\ &= (\Delta_\alpha - nV)\omega_{\varphi/n}(t) + n^2V\left[1 - F^{(n)}(1 - \frac{1}{n}w_{\varphi/n}(t))\right],\end{aligned}$$

y

$$\omega_{\varphi/n}(0,x) = nv_{\varphi/n}(0,x) = n\left(1 - e^{-\varphi(x)/n}\right).$$

■

Proposición 21. *Sea* $X^n = \{X_t^n, t \geq 0\}$ *un* $MR^\alpha R$ *. El* ***generador infinitesimal*** *de* X^n*, denotado por* $\mathcal{A}^n$*, está dado por la expresión*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^n f(<\mu,\varphi>) &= f'(<\mu,\varphi>) <\mu, \Delta_\alpha\varphi> \\ &+ \frac{1}{2}\frac{1}{n}f''(<\mu,\varphi>) <\mu, \Delta_\alpha\varphi^2 - 2\varphi\Delta_\alpha\varphi> \\ &+ n^2V <\mu, \sum_{j=0}^{\infty} q_j^{(n)}\left[f(<\mu,\varphi> + (j-1)\frac{\varphi}{n}) - f(<\mu,\varphi>)\right]> + G(n);\end{aligned} \tag{5.4}$$

para $f \in C_b^3(\mathbb{R}^d) \cup \{f_1(x) = x, f_2(x) = x^2\}$*,* $\varphi \in C_p^+(\mathbb{R}^d)$ *y donde* $J_3 > 0$ *es tal que* $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'''(x)| \leq J_3$ *y*

$$G(n) = \frac{1}{3!}\sup_{y\in\mathbb{R}}|\varphi|\frac{J_3}{n}\left\langle \mu, \Delta_\alpha\varphi^2 - 2\varphi\Delta_\alpha\varphi\right\rangle = \circ(n^{-1}), \quad n \to \infty.$$

Demostración. De (3.33) se tiene que el generador para N^n, valuado en funciones de la forma (3.31), es

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^n f(<\mu,\varphi>) &= nV\sum_{j=0}^{\infty} q_j^{(n)} <\mu, [f(<\mu,\varphi> + (j-1)\varphi) - f(<\mu,\varphi>)]> \\ &+ f'(<\mu,\varphi>) <\mu, \Delta_\alpha\varphi> + \frac{1}{2}f''(<\mu,\varphi>) <\mu, \Delta_\alpha\varphi^2 - 2\varphi\Delta_\alpha\varphi> + G,\end{aligned} \tag{5.5}$$

para $f \in C_b^3(\mathbb{R}) \cup \{f_1, f_2\}$, $\mu \in \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^d)$ y $\varphi \in C_p(\mathbb{R}^d)$, donde

$$\begin{aligned}G &= \frac{1}{3!}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^d}|\varphi(y)|\right)J_3 <\mu, \Delta_\alpha\varphi^2 - 2\varphi\Delta_\alpha\varphi>, \\ J_3 &\geq \sup_{x\in\mathbb{R}}|f'''(x)|.\end{aligned}$$

Si $X_t^n = \mu$, debido a que $X_t^n = \frac{1}{n}N_t^n$ se sigue que para toda $\varphi \in C_p^+(\mathbb{R}^d)$,

$$<X_t^n, \varphi> = <\frac{1}{n}N_t^n, \varphi> = <N_t^n, \frac{1}{n}\varphi> = <n\mu, \frac{1}{n}\varphi>,$$

por lo que basta notar que se verifican las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}&1)\ <n\mu, \frac{1}{n}\varphi> = <\mu,\varphi>, \\ &2)\ <n\mu, \Delta_\alpha\left(\frac{\varphi}{n}\right)^2 - 2\frac{\varphi}{n}\Delta_\alpha\frac{\varphi}{n}> = \frac{1}{n} <\mu, \Delta_\alpha\varphi^2 - 2\varphi\Delta_\alpha\varphi>.\end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en (5.5), se tiene que el generador $\mathcal{A}^n$ de X^n está dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^n f(<\mu,\varphi>) = \mathcal{B}^n f(<n\mu,\frac{1}{n}\varphi>) &= n^2V<\mu,\sum_{j=0}^{\infty}q_j^{(n)}\Big[f(<\mu,\varphi>+(j-1)\frac{\varphi}{n})-f(<\mu,\varphi>)\Big]> \\ &+ f'(<\mu,\varphi>)<\mu,\Delta_\alpha\varphi> \\ &+ \frac{1}{2n}f''(<\mu,\varphi>)<\mu,\Delta_\alpha\varphi^2-2\varphi\Delta_\alpha\varphi>+G(n),\end{aligned}$$

donde $G(n)$ es como se postula. ∎

Otro resultado importante, que será requerido para caracterizar, vía martingalas, al superproceso de Dawson-Watanabe es la siguiente

Proposición 22. *El **límite del generador infinitesimal** $\mathcal{A}^n$, el cual se denotará por $\mathcal{A}$, es*

$$\mathcal{A}f(<\mu,\varphi>) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{A}^n f(<\mu,\varphi>) = f'(<\mu,\varphi>)<\mu,(\Delta_\alpha+V)\varphi>+\frac{1}{2}Vm_2f''(<\mu,\varphi>)<\mu,\varphi^2>. \quad (5.6)$$

Demostración. En la expresión (5.4) sea

$$D := n^2V\left\langle\mu,\sum_{j=0}^{\infty}q_j^{(n)}\left[f\left(<\mu,\varphi>+(j-1)\frac{\varphi}{n}\right)-f(<\mu,\varphi>)\right]\right\rangle.$$

Debido a que por hipótesis $f\in C_b^3(\mathbb{R})$, usando un desarrollo en serie de Taylor de tercer orden para f, en torno a cero, se tiene que

$$\begin{aligned}&f\left(<\mu,\varphi>+(j-1)\frac{\varphi}{n}\right)-f(<\mu,\varphi>)= \\ &f'(<\mu,\varphi>)\frac{(j-1)}{n}(\varphi-0)+\frac{1}{2!}f''(<\mu,\varphi>)\frac{(j-1)^2}{n^2}(\varphi-0)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_j)\frac{(j-1)^3}{n^3}(\varphi-0)^3.\end{aligned}$$

donde $\xi_j\in\left[\langle\mu,\varphi\rangle,\langle\mu,\varphi\rangle+(j-1)\frac{\varphi}{n}\right]$, para $j=0,1,2,\ldots$.

Por lo anterior, usando linealidad de la integral y que la ley de ramificación tiene momentos finitos hasta de orden 3, se tiene que

$$\begin{aligned}D:&=n^2V\left\langle\mu,\sum_{j=0}^{\infty}q_j^{(n)}\left[f\left(<\mu,\varphi>+(j-1)\frac{\varphi}{n}\right)-f(<\mu,\varphi>)\right]\right\rangle \\ &=n^2V\left\langle\mu,\sum_{j=0}^{\infty}q_j^{(n)}\left[f'(<\mu,\varphi>)\frac{(j-1)}{n}\varphi+\frac{1}{2!}f''(<\mu,\varphi>)\frac{(j-1)^2}{n^2}\varphi^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_j)\frac{(j-1)^3}{n^3}\varphi^3\right]\right\rangle \\ &=nV\left\langle\mu,f'(<\mu,\varphi>)\varphi\sum_{j=0}^{\infty}q_j^{(n)}(j-1)\right\rangle+\frac{V}{2}\left\langle\mu,f''(<\mu,\varphi>)\varphi^2\sum_{j=0}^{\infty}q_j^{(n)}(j-1)^2\right\rangle+\frac{V}{3!n}\left\langle\mu,f'''(\xi_j)\varphi^3\sum_{j=0}^{\infty}q_j^{(n)}(j-1)^3\right\rangle \\ &=V\left\langle\mu,f'(<\mu,\varphi>)\varphi a_n\right\rangle+\frac{V}{2}\left\langle\mu,f''(<\mu,\varphi>)\varphi^2\left(m_2^{(n)}-\frac{a_n}{n}\right)\right\rangle+\frac{V}{3!n}\left\langle\mu,f'''(\xi_j)\varphi^3\sum_{j=0}^{\infty}q_j^{(n)}(j-1)^3\right\rangle,\end{aligned}$$

donde para obtener la última igualdad de la expresión anterior se ha usado que las condiciones (5.1) implican

1. $$\sum_{j=0}^{\infty}q_j^{(n)}(j-1)=\sum_{j=0}^{\infty}q_j^{(n)}j-\sum_{j=0}^{\infty}q_j^{(n)}=m_1^{(n)}-1=\frac{a_n}{n}, \quad (5.7)$$
2. $$\sum_{j=0}^{\infty}q_j^{(n)}(j-1)^2=\sum_{j=0}^{\infty}q_j^{(n)}\big[j(j-1)-(j-1)\big]=\sum_{j=0}^{\infty}q_j^{(n)}j(j-1)-\sum_{j=0}^{\infty}q_j^{(n)}(j-1)=m_2^{(n)}-\frac{a_n}{n}, \quad (5.8)$$

donde $a_n \to a$ cuando $n \to \infty$.

Sustituyendo la última expresión de D en la expresión (5.4), se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^n f(<\mu,\varphi>) =& f'(<\mu,\varphi>) <\mu,\Delta_\alpha\varphi> + \frac{1}{2n} f''(<\mu,\varphi>) <\mu,\Delta_\alpha\varphi^2 - 2\varphi\Delta_\alpha\varphi> \\ &+ V\left\langle \mu, f'(<\mu,\varphi>)\varphi a_n\right\rangle + \frac{V}{2}\left\langle \mu, f''(<\mu,\varphi>)\varphi^2\left(m_2^{(n)} - \frac{a_n}{n}\right)\right\rangle \\ &+ \frac{V}{3!n}\left\langle \mu, f'''(\xi_j)\varphi^3 \sum_{j=0}^{\infty} q_j^{(n)}(j-1)^3\right\rangle + G(n).\end{aligned}$$

Haciendo $n \to \infty$ en la expresión anterior resulta

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}^n f(<\mu,\varphi>) &= f'(<\mu,\varphi>) <\mu,\Delta_\alpha\varphi> + V\left\langle \mu, f'(<\mu,\varphi>)\varphi a\right\rangle + \frac{V}{2}\left\langle \mu, f''(<\mu,\varphi>)\varphi^2 m_2\right\rangle \\ &= f'(<\mu,\varphi>) <\mu,(\Delta_\alpha + aV)\varphi> + \frac{1}{2} V m_2 f''(<\mu,\varphi>) <\mu,\varphi^2>,\end{aligned}$$

donde se ha usado que

$$\left(\frac{V}{3!n} <\mu,\varphi^3 \sum_{j=0}^{\infty} q_j^{(n)}(j-1)^3 f'''(\xi_j)> + G(n)\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

■

Observaciones:

1. En caso de que la ley de ramificación sea crítica e independiente de n, el término Va es cero pues en ese caso se tiene que $a_n = 0$ para toda n por criticalidad.

2. El uso de funciones cilíndricas se justifica por el hecho de que sólo para este tipo de funciones es factible hacer los cálculos y por el hecho de que para $\varphi \in K_p(\mathbb{R}^d), f \in C_b^3$, se tiene una familia de funciones densa en $B_b(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$.

Para finalizar está sección, se concluye con el siguiente corolario del Teorema 8 referente al proceso X^n, que será determinante para el resto de las secciones.

Corolario 4. *Sea $X^n = \{X_t^n, t \geq 0\}$ un $MR^\alpha R$, entonces X^n tiene una versión con trayectorias en el espacio de Skorohod $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$.*

La idea de la demostración es aplicar el Teorema 8 con $M := \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$, el cual es localmente compacto. La condición

$$T^n(t)(C_0(M)) \subset C_0(M)$$

donde $\{T^n(t)\}$ es el semigrupo correspondiente al proceso X^n se trata en [32].

5.2. Convergencia al superproceso de DW

Debido a que el objetivo de este trabajo es mostrar la construcción del superproceso de Dawson-Watanabe como límite de difusión de sistemas de partículas, el resultado principal del trabajo corresponde al Teorema 29 de esta sección. Dicho teorema establece la convergencia débil del $MR^\alpha R$ al superproceso de Dawson-Watanabe y su demostración se presenta siguiendo dos métodos. Por un lado, usando las distribuciones de dimensión finita del $MR^\alpha R$ y por el otro, utilizando un problema de martingala, mismo que será enunciado más adelante en el Lema 6. Es importante señalar que con la presentación de ambos métodos se cubren los primeros dos objetivos planteados para este trabajo.

Teorema 29. *Sea* $X^n = \{X_t^n,\ t \geq 0\}$, $n \in \mathbb{N}$, *un* $MR^\alpha R$ *como en la Definición 36. Si* $p > \frac{\alpha}{2}$ *(y* $p < \frac{(d+\alpha)}{2}$, *si* $\alpha < 2$*), entonces el proceso* $X^n = \{X_t^n, t \geq 0\}$, *es un proceso con valores en medidas (no necesariamente de contar) tal que*

$$X^n \Rightarrow X, \qquad en\ D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)),$$

donde el proceso $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *es el* ***límite de difusión o límite de Dawson-Watanabe del*** MR^α *, también conocido como superproceso de Dawson-Watanabe, y satisface lo siguiente:*

a) $X_t \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$, $\forall t \geq 0$.

b) X_t *es un proceso de Markov cádlàg temporalmente homogéneo.*

c) Si N_0 *es un campo de Poisson de intensidad* λ, *donde* λ *es la medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}^d$, *entonces* $X_0 = \lambda$ *c.s.*

d) Para cada $t \geq 0$, *el funcional de Laplace de* X_t *está dado por* $\mathbb{E}e^{-<X_t,\varphi>} = e^{<\lambda, u_\varphi(t)>}$, $\varphi \in C_p(\mathbb{R}^d)$, *donde* $u_\varphi(t)$ *es la única solución* mild *de la ecuación diferencial parcial no lineal*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_t}{\partial t} &= (\Delta_\alpha + Va)u_t - \frac{1}{2}Vm_2u_t^2, \\ u(0) &= \varphi, \end{aligned} \tag{5.9}$$

donde m_2 *y* a *son constantes definidas como en (5.1).*

El primer método de demostración del teorema anterior se basa en probar la tensión de la sucesión $\{X^n\}$ en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$, y en identificar el límite demostrando que $X^n \overset{Df}{\Rightarrow} X$, donde $\overset{Df}{\Rightarrow}$ denota convergencia débil de distribuciones de dimensión finita. En el segundo método la unicidad del límite se sigue de demostrar que todo punto límite de $\{X^n\}$ es solución de un problema de martingala bien planteado.

Con la intención de hacer una presentación clara de ambas técnicas, éstas se han desglosado en los resultados de las siguientes 4 secciones. En la primera se incluyen resultados preliminares que serán utilizados en las demostraciones principales. En la segunda se prueba la compacidad relativa de $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (ver la Proposición 24). En la tercera sección se prueba la convergencia del $MR^\alpha R$ al superproceso de DW en el sentido de distribuciones de dimensión finita (ver Proposición 25). Se finaliza con la prueba de que todo punto límite de $\{X^n\}$ en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$ resuelve el problema de martingala del superproceso de Dawson-Watanabe dado en el Lema 6 (ver Proposición 26). Para clarificar cómo estos cuatro apartados cubren las dos pruebas mencionadas para el Teorema 29, a continuación se esboza la idea general de cada enfoque.

Técnicas de demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea X^n un $MR^\alpha R$ y X el superproceso de DW caracterizado en el Teorema 29. Para probar que $X^n \Rightarrow X$ en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$, se utiliza lo siguiente:

a) Debido a que N_0^n es un campo aleatorio de Poisson con intensidad $n\lambda$, por (3.21) del Capítulo 3, el proceso X^n toma valores en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$ para $p > \frac{d}{2}$ (y $p < \frac{d+\alpha}{2}$ si $\alpha < 2$). De hecho se demostrará que X^n es un proceso con trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$ para los valores estipulados de p.

b) Usando que $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$ es separable (Teorema 21), se sigue que la distribución de X^n, la cual se denotará por $P_n(\cdot)$, es un elemento del espacio separable $\mathcal{P}(D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)))$.

c) Así, probar la convergencia débil de $\{X^n\}$ es equivalente a probar que $\{P_n\}$ converge débilmente en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$. Lo primero que se requiere es garantizar la ***existencia*** de puntos límite de $\{X^n\}$, y ello se hace probando que la sucesión $\{X^n\}$ es *relativamente compacta* en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$. La compacidad relativa se prueba como sigue:

1. Usando el Corolario 4 se sigue que X^n tiene una versión con trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$.
2. Así, se probará que $\{X^n\}$ es relativamente compacta (de hecho *tensa*) en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$. Para la demostración se utilizará el Teorema 27 el cual permite reducir la prueba de compacidad relativa de $\{X^n\}$ en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$ a probar compacidad relativa de las proyecciones $\{< X_t^n, \varphi >, t \geq 0\}$ en $D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Esto último se enunciará en la Proposición 24 y su demostración se hará siguiendo los criterios de la Proposición 19.
3. Usando el Lema 5 de la sección de resultados preliminares, se sigue que si X es un punto límite de $\{X^n\}$ en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^+))$, entonces éste toma sus valores en un espacio más *chico*, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$, es decir, tiene trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$.

De esta forma se prueba la existencia de puntos límite de $\{X^n\}$.

d) Resta probar la ***unicidad*** de puntos límite de $\{X^n\}$. Para ello se recurre a los dos métodos siguientes:

1. ***Convergencia débil de distribuciones de dimensión finita*** Si $\{X^n\}$ es relativamente compacta, la convergencia se asegura si se muestra que la sucesión tiene a lo más un punto límite. Usando el Teorema 25, resulta que basta probar la convergencia en el sentido de distribuciones de dimensión finita (DDF). Es decir, $X^n \Rightarrow X$, si, y sólo si,
   i) $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacta en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$.
   ii) $X^n \overset{df}{\to} X$; ver la Proposición 25.
2. ***Solución al problema de la martingala***. Nuevamente, dado que $\{X^n\}$ es relativamente compacta, basta probar la unicidad de puntos límites y para ello se identifican dichos puntos límite como solución a un problema de martingala que tiene solución única:
   i) En el Lema 6 se establecerá un problema de Martingala para el superproceso de Dawson-Watanabe. En términos generales, se tiene que la martingala es de la forma

   $$f(X_t) - \int_0^t \mathcal{A}f(X_r)dr, \quad 0 \leq t \leq T,$$

   bajo condiciones adecuadas de φ y funciones f cilíndricas de la forma $\mu \longmapsto g(< \mu, \varphi(s) >)$ y donde $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal límite dado por la expresión (5.6).
   ii) Se probará que los puntos de acumulación X de $\{X^n\}$ satisfacen el problema de martingala dado en el Lema 6. Para ello, se verá que si X^0 es una versión de X con trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$, entonces X^0 resuelve el problema de la martingala del lema mencionado, ver Proposición 26.
   iii) Del inciso a) y b) del Lema 6, se sigue que la solución al problema de martingala ahí planteado, es única.
   iv) Finalmente, también del inciso b), se tiene la expresión para el funcional de Laplace de las DDF del punto límite X^0, la cual corresponde al funcional de Laplace del superproceso de Dawson-Watanabe dado en el Teorema 29, con lo cual se concluye la prueba.

5.2.1. Resultados Preliminares

Con el objetivo de dar claridad en las pruebas de la Proposición 24), Proposicion 25 y Proposición 26, cuya importancia ya fue mencionada en la sección anterior, en esta sección se incluyen algunos resultados previos necesarios.

Lema 1. *Sea $\varphi \in C_p^+(\mathbb{R}^d)$ y $\omega_{\varphi/n}$ la solución mild de la EDP (5.3). Entonces $\forall T > 0$ existe $C_T > 0$ tal que*

$$\|\omega_{\varphi/n}(\cdot,t)\|_p \leq C_T e^{Vbt}\|\varphi\|_p, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

donde $b \geq \sup_n a_n$.

Demostración. Sea $T > 0$ y $t \in [0,T]$. Usando un desarrollo de Taylor de segundo orden para $F^{(n)}$, alrededor de uno, se sigue que

$$\begin{aligned} 1 - F^{(n)}\left[1 - \frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right] &= \left(F^{(n)}\right)'(1)\left(\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right) - \frac{1}{2n^2}\omega^2_{\varphi/n}(t)R_{2,n} \\ &= \frac{1}{n}m_1^{(n)}\omega_{\varphi/n}(t) - \frac{1}{2n^2}\omega^2_{\varphi/n}(t)R_{2,n}, \end{aligned}$$

donde $R_{2,n} \geq 0$ es un término residual. Luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{\varphi/n}}{\partial t} &= (\Delta_\alpha - Vn)\omega_{\varphi/n}(t) + Vn^2\left[\frac{1}{n}m_1^{(n)}\omega_{\varphi/n}(t) - \frac{1}{2n^2}\omega^2_{\varphi/n}(t)R_{2,n}\right] \\ &= \Delta_\alpha\omega_{\varphi/n}(t) - Vn\omega_{\varphi/n}(t) + Vn^2\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t) - Vn^2\frac{1}{2n^2}\omega^2_{\varphi/n}(t)R_{2,n} \\ &= \Delta_\alpha\omega_{\varphi/n}(t) + Va_n\omega_{\varphi/n}(t) - \frac{V}{2}\omega^2_{\varphi/n}(t)R_{2,n}. \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación diferencial parcial (5.3) se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{\varphi/n}}{\partial t} &= (\Delta_\alpha + Va_n)\omega_{\varphi/n}(t) - \frac{V}{2}\omega^2_{\varphi/n}(t)R_{2,n} \\ \omega_{\varphi/n}(0,x) &= n\left(1 - e^{-\varphi(x)/n}\right). \end{aligned}$$

La solución *mild* de esta ecuación está dada por

$$\omega_{\varphi/n}(t,x) = e^{Va_nt}T_t\left(n\left(1 - e^{-\varphi/n}\right)\right)(x) - \frac{V}{2}\int_0^t e^{Va_nr}T_r(R_{2,n}\omega^2_{\varphi/n}(t-r,\cdot))(x)dr.$$

Debido a que el semigrupo T_t es un operador positivo, la integral en la expresión anterior es un término no negativo, por lo cual

$$\omega_{\varphi/n}(t,x) = e^{Va_nt}T_t\left(n\left(1 - e^{-\varphi/n}\right)\right)(x).$$

Por otra parte, por hipótesis $\{a_n\}$ es convergente y entonces existe constante b positiva tal que $\sup_n a_n < b$ y se cumple

$$0 \leq \omega_{\varphi/n}(t,x) = e^{Vbt}T_t\left[n\left(1 - e^{-\varphi/n}\right)\right](x) \leq e^{Vbt}T_t\varphi(x), \quad t \leq T.$$

Además

$$\begin{aligned} |T_t\varphi(x)| &\leq \int P_t(y-x)\left|\frac{\varphi(y)}{\varphi_p(y)}\right| \cdot \varphi_p(y)dy \\ &\leq \|\varphi\|_pT_t\varphi_p(x), \end{aligned}$$

de donde

$$\left|\omega_{\varphi/n}(t,x)\right| \leq e^{Vbt}\|\varphi\|_pT_t\varphi_p(x), \quad t \leq T.$$

Así,

$$\|\omega_{\varphi/n}(\cdot,t)\|_p \le e^{Vbt}\|\varphi\|_p \sup_{0\le t\le T}\|T_t\varphi_p\|_p.$$

Por lo tanto

$$\|\omega_{\varphi/n}(\cdot,t)\|_p \le C_T e^{Vbt}\|\varphi\|_p, \quad \text{donde} \quad C_T := \sup_{0\le t\le T}\|T_t\varphi_p\|_p.$$

■

Proposición 23. *Sea X^n un $MR^\alpha R$. Existen $G_1, G_2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ continuas tales que $\forall n \ge 1$, $\forall t \ge 0$, $\forall \varphi \in K_p(\mathbb{R}^d)$,*

$$E < X_t^n, \varphi >^2 \le \left\{\frac{1}{n}G_1(t) + G_2(t)\right\}\|\varphi\|_p^2.$$

Demostración. Sea $\varphi \in K_p(\mathbb{R}^d)$. Como $X^n = \frac{1}{n}N^n$, resulta que

$$E\left[< X_t^n, \varphi >^2\right] = \frac{1}{n^2}\left[Var < N_t^n, \varphi > + (E < N_t^n, \varphi >)^2\right].$$

Sea $\{U_t^n, t \ge 0\}$ el semigrupo generado por $\Delta_\alpha + Va_n$, y $\{T_t, t \ge 0\}$ el semigrupo de generador Δ_α. Del Corolario 3 se sigue que

$$\begin{aligned}
&E < N_t^n, \varphi > = < n\lambda, e^{tnV\left(m_1^{(n)}-1\right)}T_t\varphi > = < n\lambda, e^{tnV\frac{a_n}{n}}T_t\varphi > = < n\lambda, e^{tVa_n}T_t\varphi > = < n\lambda, U_t^n\varphi >,\\
&Var < N_t^n, \varphi > = < n\lambda, U_t^n\varphi^2 + nVm_2^{(n)}\int_0^t U_s^n\left(U_{t-s}^n(\varphi)\right)^2 ds > .
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
< n\lambda, U_t^n\varphi^2 > \;&\le\; n\int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{U_t^n\varphi^2(x)}{\varphi_p(x)}\right|\varphi_p(x)dx\\
&\le\; ne^{|Va_n|t}\|\varphi\|_p^2 r_1,
\end{aligned}$$

donde $r_1 \ge 0$ es una constante independiente de n y de t. También se tiene que

$$(E < N_t^n, \varphi >)^2 \le n^2 e^{|Va_n|2t}\|\varphi\|_p^2 r_1^2.$$

Además

$$\left\langle n\lambda, nVm_2^{(n)}\int_0^t U_s^n\left(U_{t-s}^n\varphi\right)^2 ds\right\rangle \;\le\; n^2Vm_2^{(n)}e^{|Va_n|t}\int_0^t e^{|Va_n|s}ds\|\varphi\|_p^2 r_1.$$

Poniendo

$$\begin{aligned}
F_1^n(t) &= e^{|Va_n|t},\\
F_2^n(t) &= \int_0^t F_1(s)ds,
\end{aligned}$$

de lo anterior se sigue que

$$E < X_t^n, \varphi >^2 \;\le\; \frac{1}{n}r_1F_1^n(t) + r_1Vm_2^{(n)}F_1^n(t)F_2^n(t) + r_1^2\left(F_1^n(t)\right)^2\|\varphi\|_p^2$$

donde $\{a_n\}$ y $\{m_1^{(n)}\}$ son convergentes y acotadas por c_1 y c_2 respectivamente. Así, las funciones

$$\begin{aligned}
G_1(t) &= r_1e^{Vat},\\
G_2(t) &= r_1Vc_2G_1(t)\left(\int_0^t G_1(r)dr\right) + r_1^2\left(G_1(t)\right)^2\|\varphi\|_p^2,
\end{aligned}$$

cumplen lo deseado. ■

Lema 2. $\forall \varphi \in K_p(\mathbb{R}^d)$ *los procesos*

I.

$$M_t^n := < X_t^n, \varphi > - \int_0^t < X_s^n, (\Delta_\alpha + V a_n)\varphi > ds, \quad t \geq 0,$$

II.

$$\tilde{M}_t^n := (M_t^n)^2 - V_t^n, \quad t \geq 0,$$

son martingalas respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t^{X^n}\}$, *donde*

$$V_t^n = \int_0^t < X_s^n, V m_2^{(n)} \varphi^2 + \frac{1}{n}\left\{(\Delta_\alpha + V a_n)\varphi^2 - 2\varphi(\Delta_\alpha + V a_n)\varphi\right\} > ds. \tag{5.10}$$

Demostración. Se usará el siguiente resultado [11]:

Si $\{X_t\}$ es proceso de Markov con generador L y si $F \in D(L)$, entonces

$$M_t^F := F(X_t) - F(X_0) - \int_0^t LF(X_s) ds, \quad t \geq 0, \tag{5.11}$$

es martingala y su proceso creciente $\{< M^F, M^F >_t, t \geq 0, \}$ cumple que

$$\frac{d < M^F, M^F >_t}{dt} = \Gamma(F, F)(X_t), \tag{5.12}$$

donde $\Gamma(F, G) = L(FG) - FL(G) - GL(F), \quad F, G \in D(L)$. Más aún,

$$\left\{(M_t^F)^2 - < M^F, F^F >_t, \quad t \geq 0\right\}, \tag{5.13}$$

es martingala.

Demostración de I. Sea $\mathcal{A}^n f(< \mu, \varphi >)$ el generador dado en (5.4). Tómese $f(x) = x$, entonces $\mathcal{A}^n < X_s^n, \varphi >$ tiene la expresión

$$\mathcal{A}^n < \mu, \varphi > = < \mu, (\Delta_\alpha + V a_n)\varphi > . \tag{5.14}$$

Sean $L := \mathcal{A}^n$ y $F(\mu) = < \mu, \varphi >$ en (5.11). Entonces de (5.14) resulta que

$$F(X_t^n) - \int_0^t LF(X_s^n) ds = < X^n, \varphi > - \int_0^t < X_s^n, (\Delta_\alpha + V a_n)\varphi > ds, \quad t \geq 0,$$

es martingala.

Demostración de II. Sea $f(x) = x^2$, entonces

$$\mathcal{A}^n < \mu, \varphi >^2 = 2 < \mu, \varphi > \mathcal{A}^n < \mu, \varphi > + \frac{1}{n}\mathcal{A}^n < \mu, \varphi^2 > - \frac{2}{n} < \mu, \varphi(\Delta_\alpha + V a_n)\varphi > \tag{5.15}$$

Por otra parte, nótese que

$$\begin{aligned}
\Gamma(F, F) &= \mathcal{A}^n F^2(X_t^n) - 2F(X_t^n)\mathcal{A}^n F(X_t^n) \\
&= \mathcal{A}^n < X_t^n, \varphi >^2 - 2 < X_t^n, \varphi > \mathcal{A}^n < X_t^n, \varphi > \\
&= \frac{1}{n}\left\{< X_t^n, (\Delta_\alpha + V a_n)\varphi^2 > - 2 < X_t^n, \varphi(\Delta_\alpha + V a_n)\varphi >\right\} + < X_t^n, V m_2^{(n)} \varphi^2 >,
\end{aligned}$$

Integrando resulta

$$< M^n, M^n >_t = \int_0^t \Gamma(F, F)(X_s^n) ds = V_t^n,$$

Por lo tanto, de (5.12) y (5.13) se sigue el resultado. ∎

Lema 3. *Existe una función continua y positiva $h(t)$, $t \geq 0$, tal que $\forall n \geq 1$, $\forall T > 0$ y $\forall \varphi \in K_p(\mathbb{R}^d)$,*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} < X_t^n, \varphi >^2\right] \leq h(T)\|\varphi\|_p.$$

Demostración. $\forall n \geq 1$, $T > 0$ y $\varphi \in K_p(\mathbb{R}^d)$, sean $Z_t^n =< X_t^n, (\Delta_\alpha + Va_n)\varphi >$ y $M_t^n =< X_t^n, \varphi > - \int_0^t Z_s^n ds$. Por el Lema 2 se tiene que $\{M_t^n\}$ es martingala. Usando la desigualdad $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T} < X_t^n, \varphi >^2\right] &= E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \{M_t^n + \int_0^t Z_s^n ds\}^2\right] \\
&\leq 2E\left[\sup_{0\leq t\leq T} (M_t^n)^2\right] + 2E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left(\int_0^t Z_s^n ds\right)^2\right] \\
&\overset{C.Schwartz}{\leq} 2E\left[\sup_{0\leq t\leq T} pg{M_t^n}^2\right] + 2E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left\{t \int_0^t (Z_s^n)^2 ds\right\}\right] \\
&\leq 2E\left[\sup_{0\leq t\leq T} (M_t^n)^2\right] + 2TE\left[\int_0^T (Z_s^n)^2 ds\right].
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Doob para submartingalas en el primer término de la última desigualdad se sigue que

$$\begin{aligned}
\left(E\left[\sup (M_t^n)^2\right]\right)^{1/2} &\leq 2\left[E(M_T^n)^2\right]^{1/2} \\
&\overset{Minkowsky}{\leq} 2\left(\left[E < X_t^n, \varphi >^2\right]^{1/2} + \left[E\left(\int_0^T Z_s^n ds\right)^2\right]^{1/2}\right) \\
&\overset{C.Schwartz}{\leq} 2\left(E < X_T^n, \varphi >^2\right)^{1/2} + 2T^{1/2}\left(\int_0^T E(Z_s^n)^2 ds\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

y por la Proposición 23 se tiene

$$\begin{aligned}
\left(E\left[\sup (M_t^n)^2\right]\right)^{1/2} &\leq 2\left(\left\{\frac{1}{n}G_1(T) + G_2(T)\right\}\|\varphi\|_p^2\right)^{1/2} \\
&+ 2T^{1/2}\left(\int_0^T \left\{\frac{1}{n}G_1(s) + G_2(s)\right\}\|\Delta_\alpha + Va_n\|_p^2 ds\right)^{1/2} \\
&\leq 2\{G_1(T) + G_2(T)\}^{1/2}\|\varphi\|_p \\
&+ 2T^{1/2}\left\{\int_0^T (G_1(s) + G_2(s))\, ds\right\}^{1/2} \|(\Delta_\alpha + Va_n)\varphi_p\|_p\|\varphi\|_p,
\end{aligned}$$

donde $\|\Delta_\alpha\varphi_p\| < +\infty$ (Ver [?] nota al Lema 2.8). Como $\{a_n\}$ es acotada, existe k_0 tal que

$$\begin{aligned}
\left\{E\left[\sup_{0\leq t\leq T} (M_t^n)^2\right]\right\}^{1/2} &\leq 2\{G_1(T) + G_2(T)\}^{1/2}\|\varphi\|_p \\
&+ 2T^{1/2}\left\{\int_0^T (G_1(s) + G_2(s)) ds\right\}^{1/2} k_0\|\varphi\|_p
\end{aligned}$$

De modo similar se obtiene una cota para la expresión $2TE\int_0^T (Z_s^n)^2 ds$ y con ello se obtiene el resultado. ∎

Lema 4. *Sean f, φ como en el Lema 6. Entonces*

$$\lim_{k\to\infty} E\left[\left|E\left[f(< X_{t+s}^{n_k}, \varphi(t+s) >) - f(< X_t^{n_k}, \varphi(t) >) - \int_t^{t+s} g(< X_u^{n_k}, \varphi(u) >) du \middle| \mathcal{F}_t^{X^{n_k}}\right]\right|\right] = 0 \quad (5.16)$$

donde $g = \mathcal{A}f$.

Demostración. Sea

$$R := f(< X^{n_k}_{t+s}, \varphi(t+s) >) - f(< X^{n_k}_t, \varphi(t) >) - \int_t^{t+s} g(< X^{n_k}_u, \varphi(u) >)\, du.$$

Entonces

$$E\Big[R\Big|\mathcal{F}_t^{X^{n_k}}\Big] = E\Bigg[f(< X^{n_k}_{t+s}, \varphi(t+s) >) - f(< X^{n_k}_t, \varphi(t) >) - \int_t^{t+s} \mathcal{A}^{n_k} f(< X^{n_k}_u, \varphi(u) >) du\Big|\mathcal{F}_t^{X^{n_k}}\Bigg]$$
$$+ E\Big[\int_t^{t+s} \mathcal{A}^{n_k} f(< X^{n_k}_u, \varphi(u) >) - g(< X^{n_k}_u, \varphi(u) >) du\Big|\mathcal{F}_t^{X^{n_k}}\Big] := S_1^k + S_2^k.$$

Se sabe que

$$\Big\{f(< X^n_t, \varphi(t) >) - \int_0^t \mathcal{A}^n f(< X^n_s, \varphi(s) >) ds, \quad t \geq 0\Big\}$$

es martingala. Así, para el primer término S_1^k resulta

$$S_1^k = E\Bigg[f(< X^{n_k}_{t+s}, \varphi(t+s) >) - \int_0^{t+s} \mathcal{A}^{n_k} f(< X^{n_k}_u, \varphi(u) >) du$$
$$- \Big\{f(< X^{n_k}_t, \varphi(t) >) - \int_0^t \mathcal{A}^{n_k} f(< X^{n_k}_u, \varphi(u) >) du\Big\}\Big|\mathcal{F}_t^{X^{n_k}}\Bigg] = 0, \quad \text{c.s.}$$

Por otro lado, usando que $g = \mathcal{A}f$ y la expresión explícita de $\mathcal{A}^{n_k}$ resulta que

$$S_2^k = \Bigg|E\Big[\int_t^{t+s} \mathcal{A}^{n_k} f(< X^{n_k}_u, \varphi(u) >) - \mathcal{A} f(< X^{n_k}_u, \varphi(u) >) du\Big|\mathcal{F}_t^{X^{n_k}}\Big]\Bigg|$$
$$\overset{Jensen}{\leq} E\Bigg[\int_t^{t+s} \Big|f'(< X^{n_k}_u, \varphi(u) >) < X^{n_k}_u, \varphi(u) > V(a_{n_k} - a)$$
$$+ \frac{1}{2} f''(< X^{n_k}_u, \varphi(u) >) < X^{n_k}_u, \varphi^2(u) > V\Big(m_2^{n_k} - \frac{a_{n_k}}{n_k} - m_2\Big)$$
$$+ \frac{1}{2n_k} f''(< X^{n_k}_u, \varphi(u) >) < X^{n_k}_u, \Delta_\alpha \varphi^2(u) - 2\varphi(u)\Delta_\alpha\varphi(u) > + O_n(1)\Big| du\Big|\mathcal{F}_t^X\Bigg].$$

Dado que f es de clase C^3, sea $J > 0$ tal que

$$\sup_x \Big\{\Big|f(x)\Big|, \Big|f'(x)\Big|, \Big|f'''(x)\Big|\Big\} < J.$$

Entonces podemos continuar la expresión anterior por

$$\leq E\Bigg[\int_t^{t+s} \Bigg(JV < X^{n_k}_u, \Big|\varphi(u)\Big| > |a_{n_k} - a| + \frac{1}{2} JV < X^{n_k}_u, \varphi^2(u) > \Big|m_2^{(n_k)} - \frac{a_{n_k}}{n_k} - m_2\Big|$$
$$+ \frac{1}{2n_k} J\Big| < X^{n_k}_u, \Delta_\alpha \varphi^2(u) \Delta_\alpha \varphi(u) > + O_n(1)\Big|\Bigg) du\Big|\mathcal{F}_t^{X^{n_k}}\Bigg],$$

donde $\forall n \geq 0$,

$$|O_n(1)| \leq \frac{J_3}{3! n_k^2} \sup_{y \in \mathbb{R}^2} \Big|\varphi(u)\Big| < X^{n_k}_u, |\Delta_\alpha \varphi^2(u) - 2\varphi(u)\Delta_\alpha\varphi(u)| >$$
$$+ \frac{J_3 V}{3! n_k} < X^{n_k}_u, \varphi^3(u) \sum_{j=0}^{\infty} q_j^{(n_k)} |j-1|^3 >, \tag{5.17}$$

siendo $J_3 \geq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$.

Tomando el límite y usando teorema de Fubini resulta

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} S_2^k &\leq \lim_{k\to\infty} \int_t^{t+s} E\Bigg[\Bigg(JV < X_u^{n_k}, \Big|\varphi(u)\Big| > |a_{n_k} - a| + \frac{1}{2} JV < X_u^{n_k}, \varphi^2(u) > \Big| m_2^{(n_k)} - \frac{a_{n_k}}{n_k} - m_2 \Big| \\ &+ \frac{1}{2n_k} J\Big| < X_u^{n_k}, \Delta_\alpha \varphi^2(u) \Delta_\alpha \varphi(u) > + O_n(1) \Big| \Bigg)\Bigg] du. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Nótese que, debido a que $\forall \psi \in C_p(\mathbb{R}^d)$ con $d < 2p$, se cumple

$$\begin{aligned} E < X_t^u, \psi >= \frac{1}{n} E \langle N_t^n, \psi \rangle &\leq \frac{1}{n} e^{tV^{(n)}} (m_1^{(n)} - 1) ||\psi||_p < n\lambda, \varphi_p > \\ &\leq e^{tVb} ||\psi||_p < \lambda, \varphi_p >, \end{aligned} \tag{5.19}$$

donde $b \geq \sup_n \{a_n\}$. Sea $C > 0$, tal que $\sum_j q_j^{(n_k)} |j-1|^3 < C$ independientemente de n_k. Usando (5.17) y (5.19) en la expresión (5.18), resulta

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} S_2^k \leq & JV \Big(\int_t^{t+s} e^{uVb} ||\varphi(u)||_p du \Big) < \lambda, \varphi_p > \Big(\lim_{k\to 0} |a_{n_k} - a| \Big) \\ &+ \frac{JV}{2} \Big(\int_t^{t+s} e^{uVb} ||\varphi^2(u)||_p du \Big) < \lambda, \varphi_p > \lim_{k\to\infty} \Big| m_2^{(n_k)} - \frac{a_{n_k}}{n_k} - m_2 \Big| \\ &+ \frac{J_3 V}{3!} \int_t^{t+s} \Big(e^{uVb} ||\varphi^2(u)||_p du \Big) < \lambda, \varphi_p > \Big(\lim_{n_k \to\infty} \frac{1}{n_k} \Big) = 0. \end{aligned}$$

■

5.2.2. Compacidad Relativa

Para probar que $\{X^n\}$ es tensa en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$, debido al Teorema 27 basta probar lo siguiente:

Proposición 24. *Sea $d < 2p$. Para cada $\varphi \in K_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$ la familia de procesos reales $\{< X_t^n, \varphi >, t \geq 0\}_n$ es tensa en $D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.*

Se probarán las condiciones a), b') y c) dadas en la Proposición 19. Sea $\varphi \in K(\dot{\mathbb{R}}^d)$. Nótese que para $n \in \mathbb{N}$, debido a que $X_t^n(\{\tau_d\}) = 0$ c.s., se tiene

$$< X_t^n, \varphi >= \int \varphi\Big|_{\mathbb{R}^d} dX_t^n\Big|_{\mathbb{R}^d} + \varphi(\tau_p) X_t^n(\{\tau_p\}) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi dX_t^n\Big|_{\mathbb{R}^d}, \quad t \geq 0,$$

y por lo tanto, en lo que sigue bastará suponer que $\varphi \in K_p(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. a) P.D. $\forall \eta > 0$, $\forall t \in \mathbb{Q}^+$, existe $\Gamma_{\eta,t} \subset \mathbb{R}$ compacto tal que

$$\inf_n P\left[< X_t^n, \varphi > \in \Gamma_{\eta,t}^\eta \right] \geq 1 - \eta,$$

donde $\Gamma_{\eta,t}^\eta$ es la η-vecindad de $\Gamma_{\eta,t}$.

Sean $t \geq 0$ y $c > 0$. Por la desigualdad de Chebychev,

$$P\left[\Big| < X_t^n, \varphi > \Big| \geq c \right] \leq \frac{E < X_t^n, |\varphi| >}{c}$$

donde, de (5.19), se sigue que

$$E < X_t^n, |\varphi| > \leq e^{tVb} ||\varphi||_p < \lambda, \varphi_p > < +\infty.$$

Aquí, se ha usado la hipótesis de que $d < 2p$. Luego

$$P\left[\left| < X_t^n, \varphi > \right| \leq c\right] \geq 1 - \frac{e^{tVb}||\varphi||_p < \lambda, \varphi_p >}{c}.$$

Si $\eta > 0$ y c es suficientemente grande, se obtiene

$$\inf_n P\left[\left| < X_t^n, \varphi > \right| < c + \eta\right] \geq 1 - \eta.$$

b) P.D $\forall t > 0$, $\exists \beta > 0$ y una familia $\{\gamma_n(\delta),\, 0 < \delta < 1\}$ variables aleatorias no negativas tales que

$$E\left[q^\beta\left(< X_{t+u}^n, \varphi >, < X_t^n, \varphi >\right) \Big| \mathcal{F}_t^{X^n}\right] \leq E\left[\gamma_n(\delta) \Big| \mathcal{F}_t^{X^n}\right], \quad 0 \leq t \leq T,\, 0 \leq u \leq \delta,$$

donde $q^\beta(x,y) = |x-y| \wedge 1$ y $\mathcal{F}_t^{X^n} = \sigma(X_s^n,\, s \leq t)$.

Primero nótese que se tienen las siguientes igualdades. $\forall \varphi \in B_b(\mathbb{R}^d)$ y $0 \leq s \leq t$,

$$E\left[< N_t, \varphi > \Big| N_s\right] = < N_s, e^{V(t-s)(m_1-1)} T_{t-s}^\alpha \varphi >, \tag{5.20}$$

$$E\left[< X_t^n, \varphi > \Big| X_s^n\right] = < X_s^n, e^{V(t-s)a_n} T_{t-s}^\alpha \varphi > . \tag{5.21}$$

En efecto, usando la propiedad de ramificación de N se tiene que

$$\begin{aligned} E[< N_t, \varphi > \big| N_s] &= \sum_{x_i \in Sop X_s} E < N_{t-s}^{x_i}, \varphi > \\ &= \sum_{x_i \in Sop N_s} e^{V(t-s)(m_1-1)} T_{t-s}^\alpha \varphi(x_i) \\ &= < N_s, e^{V(t-s)(m_1-1)} T_{t-s}^\alpha \varphi >, \end{aligned}$$

de donde se sigue (5.20). De manera análoga se obtiene (5.21). Así, si $s \leq t$, entonces

$$\begin{aligned} A &:= E\left[< X_t^n, \varphi > - \int_0^t < X_r^n, (\Delta_\alpha + Va_n)\varphi > dr \Big| \mathcal{F}_s^{X^n}\right] \\ &= E\left[< X_t^n, \varphi > \Big| \mathcal{F}_s^{X^n}\right] - \int_0^s < X_r^n, (\Delta_\alpha + Va_n)\varphi > dr - \int_s^t E\left[< X_r^n, (\Delta_\alpha + Va_n)\varphi > \Big| \mathcal{F}_s^{X^n}\right] dr \\ &= < X_s^n, e^{V(t-s)a_n} T_{t-s}^\alpha \varphi > - \int_s^t < X_s^n, e^{V(r-s)a_n} T_{r-s}^\alpha (\Delta_\alpha + VA_n)\varphi > dr - \int_0^s < X_r^n, (\Delta_\alpha + Va_n)\varphi > dr, \end{aligned} \tag{5.22}$$

donde se ha usado que para $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned} &E[< X_t^n, \varphi > \big| \mathcal{F}_s^{X^n}] = E[< X_t^n, \varphi > \big| X_s^n] \quad \text{(propiedad de Markov de } X^n\text{)}, \\ &T_t\varphi - \varphi = \int_0^t T_r(A\varphi) dr, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_s^t < X_s^n, e^{V(r-s)a_n} T_{r-s}^\alpha (\Delta_\alpha + Va_n)\varphi > dr &= < X_s^n, \int_s^t e^{V(r-s)a_n} T_{r-s}^\alpha (\Delta_\alpha + Va_n)\varphi dr > \\ &= < X_s^n, e^{V(t-s)a_n} T_{t-s}^\alpha \varphi - \varphi > \\ &= < X_s^n, e^{V(t-s)a_n} T_{t-s}^\alpha \varphi > - < X_s^n, \varphi > . \end{aligned} \tag{5.23}$$

Sustituyendo (5.23) en (5.22), se obtiene que

$$A =< X_s^n, \varphi > - \int_0^s < X_r^n, (\Delta_\alpha + Va_n)\varphi > dr, \quad t \geq 0.$$

Ahora, por el Lema 2 se sigue que

$$M_t^n =< X_t^n, \varphi > - \int_0^t < X_r^n, (\Delta_\alpha + Va_n)\varphi > dr, \quad t \geq 0,$$

es martingala respecto a la filtración $\mathcal{F}_t^{X^n}$. Además, por el mismo Lema 2, para h función cilíndrica de la forma $h(X_t^n) =< X_t^n, \varphi >$ se tiene que

$$\tilde{M}_t^n := (M_t^n)^2 - V_t^n, \quad t \geq 0,$$

es martingala, donde $\{V_t^n\}_{t\geq 0}$ es el proceso de variación cuadrática en la descomposición de Doob-Meyer de $\{\tilde{M}_t^n\}_{t\geq 0}$ y está dado por

$$V_t^n = \int_0^t \Gamma(h,h)(X_r^n) dr,$$

y

$$\begin{aligned} \Gamma(h,h)(X_r^n) &= (\mathcal{A}^n h^2 - 2h\mathcal{A}^n h)(X_r^n) \\ &= \mathcal{A}^n < X_r^n, \varphi >^2 - 2 < X_r^n, \varphi > \mathcal{A}^n < X_r^n, \varphi > . \end{aligned} \tag{5.24}$$

Finalmente, $\forall T > 0$, $\delta > 0$ y $n \geq 1$ se define

$$\xi(n,T,\delta,\varphi) = 2\left\{\delta^2 \sup_{0\leq t\leq T+\delta} (\mathcal{A}^n < X_t^n, \varphi >)^2 + \delta \sup_{0\leq t\leq T+\delta} \Gamma(h,h)(X_t^n)\right\}.$$

b') Se demostrará que

$$E\left[\left| < X_{T+s}^n, \varphi > - < X_T^n, \varphi > \right|^2 \middle| \mathcal{F}_T^{X^n}\right] \leq E\left[\xi(n,T,\delta,\varphi) \middle| \mathcal{F}_T^{X^n}\right],$$

lo cual coincide con lo establecido en el inciso b) haciendo $\gamma_n(\delta) := \xi(n,T,\delta,\varphi)$ y usando la definición de q^β.

Así, sean $T > 0$ y $\delta > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} &E\left[\left| < X_{T+\delta}^n, \varphi > - < X_T^n, \varphi > \right|^2 \middle| \mathcal{F}_T^{X^n}\right] \\ &= E\left\{\left|\left(< X_{T+\delta}^n, \varphi > - \int_0^{T+\delta} \mathcal{A}^n < X_s^n, \varphi > ds\right) - \left(< X_T^n, \varphi > - \int_0^T \mathcal{A}^n < X_s^n, \varphi > ds\right)\right.\right. \\ &\left.\left. + \int_T^{T+\delta} \mathcal{A}^n < X_s^n, \varphi > ds\right|^2 \middle| \mathcal{F}_T^{X^n}\right\} \\ &= E\left[\left|M_{T+\delta}^n - M_T^n + \int_T^{T+\delta} \mathcal{A}^n < X_s^n, \varphi > ds\right|^2\right]. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, se continúa con las desigualdades

$$\begin{aligned} &\leq 2E\left((M_{T+\delta}^n - M_T Pn)^2 + \left(\int_T^{T+\delta} \mathcal{A}^n < X_s^n, \varphi > ds\right)^2\right) \\ &\leq 2E\left[(M_{T+\delta}^n)^2 - 2(M_{T+\delta}^n)M_T^n + (M_T^n)^2 + \left(\int_T^{T+\delta} \mathcal{A}^n < X_s^n, \varphi > ds\right)^2 \middle| \mathcal{F}_T^{X^n}\right] \\ &= 2E\left[\left\{(M_{T+\delta}^n)^2 - V_{T+\delta}\right\} - \left\{(M_T^n)^2 - V_T\right\} + \int_T^{T+\delta} \Gamma(h,h)(X_r^n) dr + \left(\int_T^{T+\delta} \mathcal{A}^n < X_s^n, \varphi > ds\right)^2 \middle| \mathcal{F}_T^{X^n}\right]. \end{aligned}$$

Usando ahora que $\tilde{M}_t^n$ es martingala se sigue que

$$
\begin{aligned}
&= 2E\left[\int_T^{T+\delta}\Gamma(h,h)(X_s^n)ds + \left(\int_T^{T+\delta}\mathcal{A}^n < X_s^n,\varphi > ds\right)^2 \middle| \mathcal{F}_T^{X^n}\right] \\
&\leq 2E\left[\left(\delta \sup_{T\leq s\leq T+\delta}\mathcal{A}^n < X_s^n,\varphi >\right)^2 + \delta \sup_{T\leq s\leq T+\delta}\Gamma(h,h)(X_s^n)\middle| \mathcal{F}_T^{X^n}\right] \\
&= E\left[\xi(n,T,\delta,\varphi)\middle| \mathcal{F}_T^{X^n}\right],
\end{aligned}
$$

que es lo deseado.

c) P.D $\lim_{\delta\to 0}\sup_n E[\gamma_n(\delta)] = 0$.

Usando la mismas definiciones que en la prueba anterior, se demostrará que

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} E[\xi(n,T,\delta,\varphi)] = 0.$$

Así, sea

$$E[\xi(n,T,\delta,\varphi)] = E[A_1] + E[A_2],$$

donde

$$
\begin{aligned}
E[A_1] &= 2\delta^2 E[\sup_{T\leq s\leq T+\delta} < X_s^n, (\Delta_\alpha + Va_n)\varphi >^2] \\
&\leq 2\delta^2 H(T+\delta)||(\Delta_\alpha + Va_n)\varphi||_p.
\end{aligned}
$$

La desigualdad se sigue de usar el Lema 6. Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
E[A_2] &= 2\delta E\left[\sup_{T\leq s\leq T+\delta} < X_s^n, \left|Vm_2^{(n)}\varphi^2 + \frac{1}{n} < (\Delta_\alpha + Va_n)\varphi^2 - 2\varphi(\Delta_\alpha + Va_n)\varphi > \right| >\right] \\
&\leq 2\delta E\left[\sup < X_s^n, \Psi_s >\right],
\end{aligned}
$$

donde

$$\Psi_s = \left|Vm_2^{(n)}\varphi^2 + \frac{1}{n} < (\Delta_\alpha + Va_n)\varphi^2 - 2\varphi(\Delta_\alpha + Va_n)\varphi > \right|.$$

Ahora bien,

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T+\delta} < X_s^n, \Psi_n >\right] &= E\left\{\left(E\left[\sup < X_s^n, \Psi_n >\right]\right)^2\right\}^{1/2} \\
&\overset{D.Jensen}{\leq} \left[E\left(\sup_{0\leq t\leq T+\delta} < X_s^n, \Psi_n >\right)^2\right]^{1/2} \\
&\overset{Lema\,3}{\leq} \left[H(T+\delta)||\Psi_n||_p\right]^{1/2} \\
&= H(T+\delta)\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{Vm_2^{(n)}\varphi^2(x) + \frac{1}{n}\left\{(\Delta_\alpha + Va_n)\varphi^2(x) - 2\varphi(x)(\Delta_\alpha + Va_n)\varphi(s)\right\}}{\varphi_p(x)}\right|,
\end{aligned}
$$

donde $H(T+\delta) : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función continua. Además, nótese que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{Vm_2^{(n)}\varphi^2(x) + \frac{1}{n}\left\{(\Delta_\alpha + Va_n)\varphi^2(x) - 2\varphi(x)(\Delta_\alpha + Va_n)\varphi(s)\right\}}{\varphi_p(x)}\right| < +\infty,$$

ya que $\Delta_\alpha(C_p(\mathbb{R}^d)) \subset C_p(\mathbb{R}^d)$ si $\frac{d}{2} < p$ (y adicionalmente $p < \frac{d+\alpha}{2}$ si $\alpha < 2$). De esta manera se obtiene c). ∎

Con la proposición anterior se ha establecido que $\{X_n\}$ es una sucesión relativamente compacta en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$. Resta mostrar que tal sucesión también es relativamente compacta pero en el espacio $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$. Dicho resultado se sigue del siguiente

Lema 5. *Sea X^0 un punto límite de $\{X^n\}$ en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$, y sea $d > 2p$. Para cada $t \geq 0$,*

$$X_t^0(\tau_d) = 0, \qquad c.s.$$

Demostración. Supóngase que $X^n \Rightarrow X^0$ en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$. Sea

$$C_p(\dot{\mathbb{R}}^d) = \left\{ \varphi : \dot{\mathbb{R}}^d \to \mathbb{R}, \varphi \text{ continua y } \lim_{|x|\to\infty} \left| \frac{\varphi(x)}{\varphi_p(s)} \right| = c \in \mathbb{R}^+,\ \varphi(\tau_d) = c \right\}$$

Entonces

$$E < X_t^0, \varphi >=< \lambda, e^{tVa} T_t^\alpha \varphi >, \quad \varphi \in C_p(\dot{\mathbb{R}}^d),\ t \geq 0. \tag{5.25}$$

En efecto, como $X^n \Rightarrow X^0$ por hipótesis, entonces

$$< X_t^n, \varphi > \Rightarrow < X_t^0, \varphi >, \quad \forall \varphi \in C_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$$

por el teorema del mapeo continuo y el Lema 3, sabemos que $\sup E \langle X_t^n, \varphi \rangle < \infty$. Por lo tanto

$$E < X_t^0, \varphi >= \lim_{n\to\infty} E < X_t^n, \varphi >=< \lambda, e^{tVa} T_t^\alpha \varphi > .$$

La primera igualdad se sigue del Teorema 4.5.2 de [4]. Además

$$E < X_t^n, \varphi >= E < \frac{1}{n} N_t^n, \varphi >= \frac{1}{n} < n\lambda, e^{tVn\frac{a_n}{n}} T_t^\alpha \varphi > .$$

Sea $\varphi_n \in C_p(\mathbb{R}^d)$. Es posible extender φ_n a $\dot{\mathbb{R}}^d$ poniendo $\varphi_n(\tau_d) = 0$. Sea $\psi = 1 - \varphi_n$, $\forall n$. Entonces para

$$\dot{\varphi}_p(x) := \varphi_p(x) + \mathbb{I}_{\{\tau_d\}}(x), \quad x \in \dot{\mathbb{R}}^d,$$

se cumple lo siguiente

a) $\lim_{|x|\to\infty} \left| \frac{\psi_n \dot{\varphi}_p(x)}{\varphi_p(x)} \right| = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\psi_n(x)\varphi_p(x) + \psi_n(x)\mathbb{I}_{\{\tau_d\}}(x)}{\varphi_p(x)} = 1.$

b) $|\psi_n \dot{\varphi}_p| \leq \dot{\varphi}_p, \quad n = 1, 2, \ldots.$

c) $\lim_{n\to\infty} \psi_n \dot{\varphi}_p(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\dot{\varphi}_p - \varphi_n(x)\dot{\varphi}_p(x)\right) = \mathbb{I}_{\{\tau_d\}}(x).$

Así, por a) se tiene que $\psi_n \dot{\varphi}_p \in C_p(\mathbb{R}^d)$. Aplicando lema de Fatou se sigue que

$$\begin{aligned} E\left[X_t^0(\{\tau_d\})\right] &\leq \lim_{n\to\infty} E\left[< X_t^0, \psi_n \dot{\varphi}_p >\right] \\ &= \liminf < \lambda, e^{-Vta} T_t \psi_n \dot{\varphi}_p > \\ &= 0. \end{aligned}$$

por el teorema de convergencia dominada, ya que $\psi_n \dot{\varphi}_p \to 0$ en $\mathbb{R}^d$, $\psi_n \dot{\varphi}_p \leq \dot{\varphi}_p$ y $< \lambda, \dot{\varphi}_p >< +\infty$ pues $d < 2p$. Entonces

$$\begin{aligned} < \lambda, e^{-Vat} T_t^\alpha \psi_n \dot{\varphi}_p > &= e^{-Vat} < \lambda, T_t^\alpha \psi_n \dot{\varphi}_p > \\ &= e^{-Vat} < \lambda, \psi_n \dot{\varphi}_p > \to 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X_t^0(\{\tau_d\}) = 0$ c.s. $\forall t \geq 0$. ∎

Nótese que, debido a que X_t^0 le da masa cero al punto $\{\tau_d\}$ c.s., entonces es posible usar el espacio $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$ en lugar de $\mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$.

5.2.3. Convergencia débil de las distribuciones de dimensión finita del $MR^{\alpha}R$

Proposición 25. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $X^n = \{X_t^n, t \geq 0\}$ el $MR^{\alpha}R$. Entonces*

$$X^n \overset{Df}{\Rightarrow} X \quad cuando \quad n \to +\infty,$$

donde X es el superproceso de Dawson-Watanabe.

Demostración. Se desea probar que las distribuciones de dimensión finita de X^n convergen a las de X, es decir, que

$$\left(X_{t_1}^n, X_{t_2}^n, \dots, X_{t_m}^n\right) \Rightarrow \left(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}\right), \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

La prueba se hará por inducción sobre m y usando el funcional de Laplace de X^n dado en (5.2).

Caso Base. Para $m = 1$, se probará que

$$\mathbb{E}\left[e^{-<X_t^n,\varphi>}\right] \to \mathbb{E}\left[e^{-<X_t,\varphi>}\right], \quad n \to \infty. \tag{5.26}$$

Para ello, sea $t > 0$ y $\varphi \in C_p^+(\mathbb{R}^d)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-<X_t^n,\varphi>}\right] &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[e^{-<X_t^n,\varphi>}|X_0^n\right]\right\} \\
&\overset{5,2}{=} \mathbb{E}\left[e^{\left\langle X_0^n, \left(n \log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right)\right)\right\rangle}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\left\langle N_0^n, \frac{1}{n}\left[-n\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right)-u_\varphi(t)+u_\varphi(t)\right]\right\rangle}\right]
\end{aligned}$$

donde $u_\varphi(t)$ es la solución de la ecuación diferencial parcial no lineal (5.9). Usando que N_0^n es un campo de Poisson con intensidad $n\lambda$ cuyo funcional de Laplace está dado por (1.8), resulta que el funcional de Laplace de X_t^n es

$$\mathbb{E}\left[e^{-\langle X_t^n,\varphi\rangle}\right] = \exp\left\{-\left\langle\lambda, n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}\left[-n\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right)+u_\varphi(t)-u_\varphi(t)\right]}\right)\right\rangle\right\}. \tag{5.27}$$

Por otro lado, utilizando que $X_0 = \lambda$ c.s., se sigue que el funcional de Laplace de X_t es

$$\mathbb{E}\left[e^{-<X_t,\varphi>}\right] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\left[e^{-<X_t,\varphi>}\big|X_0\right]\Big] = \mathbb{E}\left[e^{-<X_0,u_\varphi(t)>}\right] = e^{-<\lambda,u_\varphi(t)>}, \tag{5.28}$$

donde u_φ es la solución a la ecuación diferencial parcial (5.9). Así, de (5.27) y (5.28) se tiene que basta probar la convergencia

$$\exp\left\{-\left\langle\lambda, n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}\left[-n\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right)+u_\varphi(t)-u_\varphi(t)\right]}\right)\right\rangle\right\} \to e^{-<\lambda,u_\varphi(t)>}, \quad n \to \infty. \tag{5.29}$$

Nótese que si $\{\psi_n\} \subset C_p^+(\mathbb{R}^d)$ es tal que $\psi_n \to \psi$ en $C_p(\mathbb{R}^d)$, entonces usando Teorema del Valor Medio, se tiene que

$$\left|e^{-<\lambda,\psi_n>} - e^{-<\lambda,\psi>}\right| \leq \langle\lambda, |\psi_n - \psi|\rangle \leq ||\psi_n - \psi||_p \langle\lambda, \varphi_p\rangle, \tag{5.30}$$

donde $||\varphi||_p = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{|\varphi(x)|}{\varphi_p(x)}$. Es decir, si $\psi_n \to \psi$ en $C_p(\mathbb{R}^d)$, entonces $e^{-<\lambda,\psi_n>} \to e^{-<\lambda,\psi>}$. Así, para probar (5.29) basta ver que si $\varphi \in C_p^+(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1 - e^{-\frac{1}{n}\left(n\log(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t))+u_\varphi(t)-u_\varphi(t)\right)}\right] = u_\varphi(t), \quad \text{en} \quad C_p^+(\mathbb{R}^d). \tag{5.31}$$

Para lo anterior, se probará que

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right) = -u_\varphi(t), \text{ en } C_p^+(\mathbb{R}^d). \tag{5.32}$$

Para ello, obsérvese que

$$\begin{aligned}\left\|n\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right)+u_\varphi(t)\right\|_p &= \left\|n\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right)+u_\varphi(t)+\omega_{\varphi/n}(t)-\omega_{\varphi/n}(t)\right\|_p \\ &\le \left\|n\left[\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right)+\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right]\right\|_p + \left\|u_\varphi(t)-\omega_{\varphi/n}(t)\right\|_p.\end{aligned}$$

Así, basta probar las siguientes convergencias en $C_p^+(\mathbb{R}^d)$:

a) $\lim_{n\to\infty} n\left[\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right)+\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right]=0.$

b) $\lim_{n\to\infty} \omega_{\varphi/n}(t)=u_\varphi(t).$

Para el inciso a), usando las desigualdades

$$1-y\le e^{-y}, \quad y\in[0,1], \tag{5.33}$$

$$e^{-\frac{1-r}{r}}\le r \quad r\in[0,1], \tag{5.34}$$

con $y=\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)$ en (5.33) y $r=1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)$ en (5.34), y luego tomando logaritmo resulta

$$\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right)\le -\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t),$$

$$\frac{-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)}{1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)}\le \log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right),$$

y estas últimas desigualdades juntas dan

$$0\le -n\left[\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right)+\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right]\le \frac{\frac{1}{n}\omega^2_{\varphi/n}(t)}{1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)}. \tag{5.35}$$

Así, por el Lema 1, se tiene que existe C_T tal que

$$\frac{1}{n}\omega^2_{\varphi/n}(t)\le \frac{1}{n}\left(C_Te^{Vbt}\right)^2\|\varphi\|_p^2,$$

$$1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}\ge 1-\frac{1}{n}C_Te^{Vbt}\|\varphi\|_p.$$

Con las desigualdades anteriores y haciendo $n\to\infty$ en (5.35) se obtiene a).

Para probar b), debido a que por hipótesis $F^{(n)}$ tiene terceros momentos factoriales finitos, usando un desarrollo de Taylor de tercer orden en una vecindad de uno, la ecuación para $\omega_{\varphi/n}(t)$ se expresa como

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega_{\varphi/n}(t)}{\partial t} &= (\Delta_\alpha+Va_n)\omega_{\varphi/n}(t)-V\left[\frac{m_2^{(n)}}{2}\left(\omega_{\varphi/n}(t)\right)^2-\frac{F^{(n)'''}(\xi_n)}{3!n}(\omega_{\varphi/n}(t))^3\right] \\ \omega_{\varphi/n}(0,x) &= n\left(1-e^{-\varphi/n}\right), \quad \varphi\in C_p^+(\mathbb{R}^d).\end{aligned} \tag{5.36}$$

De acuerdo al Teorema 3.4.1 de [30], la ecuación diferencial parcial (5.36) depende continuamente de su condición inicial $\omega_{\varphi/n}(0)$. Así, como $\omega_{\varphi/n}(0,x) = n\left(1 - e^{-\varphi(x)/n}\right) \to \varphi(x)$ en $C_p^+(\mathbb{R}^d)$. Se obtiene que $\omega_{\varphi/n}(t) \to u_\varphi(t)$ en $C_p^+(\mathbb{R}^d)$ que es lo que se deseaba probar.

Finalmente, resta probar (5.31). Aplicando el Teorema del Valor Medio a $f(y) = n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}y}\right)$, existe K (independiente de n), tal que

$$\left\| n\left[1 - e^{\frac{1}{n}\left(n\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right)+u_\varphi(t)-u_\varphi(t)\right)}\right] - n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}u_\varphi(t)}\right)\right\|_p \le K\left\| n\log\left(1 - \frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right) + u_\varphi(t)\right\|_p.$$

Así, de (5.32) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}\left(n\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(t)\right)\right)+u_\varphi(t)} - u_\varphi(t)\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}u_\varphi(t)}\right) = u_\varphi(t).$$

Por lo tanto se ha probado que $\forall t \ge 0$, $\mathbb{E}\left[e^{-<X_t^n,\varphi>}\right] \to \mathbb{E}\left[e^{-<X_t,\varphi>}\right]$.

Hipótesis de inducción. Supóngase que para m tiempos, $t_0, t_1, \dots, t_{m-1} \in \mathbb{R}^+$, se tiene la convergencia buscada, es decir

$$\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m-1}<X_{t_j}^n,\varphi_j>}\right] \to \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m-1}<X_{t_j},\varphi_j>}\right], \quad n\to\infty, \quad \varphi_0,\dots,\varphi_{m-1} \in C_p^+(\mathbb{R}^d). \tag{5.37}$$

Para demostrar que es válida la convergencia para $m+1$ tiempos, sean $0 \le t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_m$ y $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m \in C_p^+(\mathbb{R}^d)$. Usando propiedades de esperanza condicional y la propiedad de Markov, resulta

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m}<X_{t_j}^n,\varphi_j>}\right] &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m}<X_{t_j}^n,\varphi_j>}|\mathcal{F}_{t_{m-1}}^{X^n}\right]\right\}\\
&= \mathbb{E}\left\{e^{-\sum_{j=0}^{m-1}<X_{t_j}^n,\varphi_j>}\mathbb{E}\left[e^{-<X_{t_m}^n,\varphi_m>}|\mathcal{F}_{t_{m-1}}^{X^n}\right]\right\}\\
&= \mathbb{E}\left\{e^{-\sum_{j=0}^{m-1}<X_{t_j}^n,\varphi_j>}\mathbb{E}\left[e^{-<X_{t_m}^n,\varphi_m>}|X_{t_{m-1}}^n\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Desarrollando y utilizando la expresión (5.2) del funcional de Laplace de X_t^n, resulta

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m}<X_t^n,\varphi_j>}\right] &= \mathbb{E}\left\{e^{-\sum_{j=0}^{m-1}<X_{t_j}^n,\varphi_j>}e^{\left\langle X_{t_{m-1}}^n,n\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi_m/n}(t_m-t_{m-1})\right)\right\rangle}\right\}\\
&= \mathbb{E}\left\{e^{-\sum_{j=0}^{m-1}<X_{t_j}^n,\varphi_j>}e^{\left\langle X_{t_{m-1}}^n,n\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi_m/n}(t_m-t_{m-1})\right)+u_{\varphi_m}(t_m-t_{m-1})-u_{\varphi_m}(t_m-t_{m-1})\right\rangle}\right\}
\end{aligned}$$

donde u_{φ_m} es la solución *mild* de la ecuación diferencial parcial (5.9), con condición inicial φ_m. Usando (5.32) y la hipótesis de inducción (5.37) se sigue que

$$\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m}<X_{t_j}^n,\varphi_j>}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left\{e^{-\sum_{j=0}^{m-1}<X_{t_j},\varphi_j>-\left\langle X_{t_{m-1}},u_{\varphi_m}(t_m-t_{m-1})\right\rangle}\right\}.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{e^{-\sum_{j=0}^{m-1}<X_{t_j},\varphi_j>}e^{-\left\langle X_{t_{m-1}},u_{\varphi_m}(t_m-t_{m-1})\right\rangle}\right\} &\overset{5.9}{=} \mathbb{E}\left\{e^{-\sum_{j=0}^{m-1}<X_{t_j},\varphi_j>}\mathbb{E}\left[e^{-\langle X_{t_m},\varphi_m\rangle}\middle|X_{t_{m-1}}\right]\right\}\\
&= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m}<X_{t_j},\varphi_j>}\middle|X_{t_{m-1}}\right]\right\}\\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m}<X_{t_j},\varphi_j>}\right].
\end{aligned}$$

Se obtiene la convergencia deseada:

$$\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m}<X_t^n,\varphi_j>}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m}<X_{t_j},\varphi_j>}\right].$$

Con lo anterior se termina la prueba de la convergencia de distribuciones de dimensión finita del $MR^{\alpha}R$ a las del superproceso X.

■

El siguiente resultado permite generalizar el caso anterior al caso en el que el proceso $X^n = \{X_t^n, t \geq 0\}$ sea un $MR^{\alpha}R$ en el que N_0^n no necesariamente es un campo de Poisson.

Corolario 5. *Sea $X^n = \{X_t^n = \frac{1}{n}N_t^n, t \geq 0\}$ un $MR^{\alpha}R$ donde N_0^n no necesariamente es un campo de Poisson. Si*

$$X_0^n \overset{d}{\Rightarrow} X_0, \quad n \to \infty,$$

entonces $X^n \overset{Df}{\Rightarrow} X$, donde X_0 es el estado inicial del límite de DW.

Demostración. Denótese

$$-\psi_{r-s}^n(\varphi) := n \log\left(1 - \frac{1}{n}\omega_{\varphi/n}(r-s)\right), \quad 0 \leq s \leq r, \quad \varphi \in C_p^+(\mathbb{R}^d).$$

Sean $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0, t_1, \ldots, t_m$, y $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m \in C_p^+(\mathbb{R}^d)$. Usando el funcional de Laplace, condicionando con respecto a $\mathcal{F}_{t_{m-1}}^{X^n}$ y usando la propiedad de Markov como en la prueba anterior, se tiene que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m}<X_{t_j}^n,\varphi_j>}\right] &= \mathbb{E}\left\{e^{-\sum_{j=0}^{m-1}<X_{t_j}^n,\varphi_j>}\mathbb{E}\left[e^{-<X_{t_m}^n,\varphi_m>}|X_{t_{m-1}}^n\right]\right\}\\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m-1}\left\langle X_{t_j}^n,\varphi_j\right\rangle+\left\langle X_{t_{m-1}}^n, n\log\left(1-\frac{1}{n}\omega_{\varphi_m/n}(t_m-t_{m-1})\right)\right\rangle}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m-1}\left\langle X_{t_j}^n,\varphi_j\right\rangle-\left\langle X_{t_{m-1}}^n,\psi_{t_m-t_{m-1}}^n(\varphi_m)\right\rangle}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m-2}\left\langle X_{t_j}^n,\varphi_j\right\rangle-\left\langle X_{t_{m-1}}^n,\varphi_{m-1}+\psi_{t_m-t_{m-1}}^n(\varphi_m)\right\rangle}\right] =: A.
\end{aligned}$$

Repitiendo el proceso anterior, pero ahora condicionando con respecto a $\mathcal{F}_{t_{m-2}}^{X^n}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m-2}\left\langle X_{t_j}^n,\varphi_j\right\rangle-\left\langle X_{t_{m-1}}^n,\varphi_{m-1}+\psi_{t_m-t_{m-1}}^n(\varphi_m)\right\rangle}\middle|\mathcal{F}_{t_{m-2}}^{X^n}\right]\right\}\\
&= \mathbb{E}\left\{e^{-\sum_{j=0}^{m-2}\left\langle X_{t_j}^n,\varphi_j\right\rangle}\mathbb{E}\left[e^{-\left\langle X_{t_{m-1}}^n,\varphi_{m-1}+\psi_{t_m-t_{m-1}}^n(\varphi_m)\right\rangle}\middle|X_{t_{m-2}}^n\right]\right\}\\
&= \mathbb{E}\left\{e^{-\sum_{j=0}^{m-2}\left\langle X_{t_j}^n,\varphi_j\right\rangle}e^{\left\langle X_{t_{m-2}}^n,\psi_{t_{m-1}-t_{m-2}}^n\left(\varphi_{m-1}+\psi_{t_m-t_{m-1}}^n(\varphi_m)\right)\right\rangle}\right\}\\
&= \mathbb{E}\left\{e^{-\sum_{j=0}^{m-3}\left\langle X_{t_j}^n,\varphi_j\right\rangle-\left\langle X_{t_{m-2}}^n,\varphi_{m-2}\psi_{t_{m-1}-t_{m-2}}^n\left(\varphi_{m-1}+\psi_{t_m-t_{m-1}}^n(\varphi_m)\right)\right\rangle}\right\}.
\end{aligned}$$

Utilizando el mismo procedimiento, inductivamente se llega a que

$$\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m}<X_{t_j}^n,\varphi_j>}\right] = \mathbb{E}\left\{e^{-\left\langle X_0^n,\varphi_0+\psi_{t_1-t_0}^n\left(\varphi_1+\psi_{t_2-t_1}^n(\varphi_2+\psi_{t_2-t_2}(\varphi_2+\ldots\ldots)\cdots)\right)\right\rangle}\right\}.$$

Haciendo $n \to \infty$, usando la hipótesis, así como la propiedad de Markov de X y que $-\psi_{r-s}^n(\varphi) \to u_{\varphi}(t)$, se obtiene lo deseado, a saber,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m}<X_{t_j}^n,\varphi_j>}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-\left\langle X_0,\varphi_0+u(t_1-t_0)+\varphi_1+u_{\varphi_2}(t_2-t_1)\right\rangle}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=0}^{m}\left\langle X_{t_j},\varphi_j\right\rangle}\right].
\end{aligned}$$

■

5.2.4. Caracterización vía el problema de la martingala

Como fue mencionado anteriormente, el superproceso de Dawson-Watanabe se puede caracterizar como solución a un problema de martingala bien planteado, tal problema de martingala está relacionado con lo siguiente:

Sea $\mu \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$. Se tiene que el generador infinitesimal $\mathcal{A}^n$ de X^n, valuado en la función cilíndrica

$$\mu \longmapsto f(<\mu, \varphi(s)>), \quad s \geq 0,$$

se expresa de la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^n f(<\mu,\varphi(s)>) &= f'(<\mu,\varphi(s)>)<\mu, \frac{\partial\varphi(s)}{\partial s}> + f'(<\mu,\varphi>)<\mu,\Delta_\alpha\varphi(s)> \\
&+ n^{-1}\frac{1}{2}f''(<\mu,\varphi(s)>)<\mu,\Delta_\alpha\varphi^2(s) - 2\varphi(s)\Delta_\alpha\varphi(s)> \\
&+ n^{-2}Vf'(<\mu,\varphi(s)>)<\mu, n^{-1}\varphi(s)\sum_{j=0}^{\infty} q_j^{(n)}(j-1)> \\
&+ \frac{1}{2}n^2 Vf''(<\mu,\varphi(s)>)<\mu, n^{-2}\varphi^2(s)\sum_{j=0}^{\infty} q_j^{(n)}(j-1)^2> + \circ(1)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$f(<X_t^n, \varphi(t)>) - \int_0^t \mathcal{A}^n f(<X_s^n,\varphi(s)>)ds, \qquad t \geq 0, \tag{5.38}$$

bajo condiciones adecuadas para φ y f (las cuales se establecerán formalmente en el Lema 6), es $\{\mathcal{F}_t^{X^n}\}$-martingala (local). Lo anterior lleva a establecer que el generador infinitesimal $\mathcal{A}$ de X, valuado en f (función cilíndrica dependiente del tiempo) esta dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}f(<\mu,\varphi(s)>) &= f'(<\mu,\varphi(s)>)<\mu,\frac{\partial\varphi}{\partial s}> + f'(<\mu,\varphi(s)>)<\mu,\Delta_\alpha\varphi(s)> \\
&+ Vaf'(<\mu,\varphi(s)>)<\mu,\varphi(s)> + \frac{1}{2}Vm_2 f''(<\mu,\varphi(s)>)<\mu,\varphi^2(s)>.
\end{aligned}$$

La expresión anterior lleva a establecer el problema de martingala del superproceso de Dawson-Watanabe que se enuncia a continuación.

Lema 6. *Sea $\{X_t^0\}$ un proceso con trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$ tal que es solución al siguiente problema de martingala: $\forall f \in C_b^3(\mathbb{R})$ y $\varphi(x,s) \in C_b^1(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$ tal que*

$$\begin{aligned}
&\varphi(\cdot,0) \equiv \varphi(\cdot) \in K_p(\mathbb{R}^d), \\
&\varphi(\cdot,s) \in D(\Delta_\alpha),\ s \geq 0, \\
&\frac{\partial\varphi}{\partial s} \in C_p(\mathbb{R}^d),
\end{aligned}$$

el proceso

$$\begin{aligned}
M_t \equiv f(<X_t^0,\varphi(t)>) - \int_0^t \Bigg[& f'(<X_s^0,\varphi(s)>)<X_s^0, \frac{\partial\varphi(s)}{\partial s} \\
&+ (\Delta_\alpha + Va)\varphi(s)> + \frac{1}{2}Vm_2 f''(<X_s^0,\varphi(s)>)<X_s^0,\varphi^2(s)> \Bigg] ds, \quad t \geq 0,
\end{aligned} \tag{5.39}$$

es martingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t^{X_0}\}_{t\geq 0}$ *con valor inicial* $M_0 = f(<\lambda,\varphi>)$. *Si* $H_t(\psi)$ *denota a la única solución clásica de la ecuación diferencial parcial*

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = (\Delta_\alpha + Va)u(t) - \frac{1}{2}Vm_2u^2(t), \quad t > s,$$
$$u(x,s) = \psi(s), \qquad \psi \in C_p^+(\mathbb{R}^d),$$

con valor inicial $H_0(\psi) = \psi \in D(\Delta_\alpha)$, *entonces*

a) $\forall T \geq 0$, $R_t^T \equiv e^{-<X_t^0, H_{T-t}(\psi)>}$, $0 \leq t \leq T$ *es martingala local con respecto a la filtración* $\{\mathcal{F}_t^{X_0}\}$.

b) Para cualesquiera $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ *y* $\psi_i \in D(\Delta_\alpha)$, $i = 0,\ldots,m$, $m = 1,2,\ldots$,

$$L_{X_{t_0}^0,\ldots,X_{t_m}^0}(\psi_0,\ldots,\psi_m) := E\left[e^{-\sum_{i=0}^m <X_{t_i}^0,\psi_i>}\right] = e^{-<\lambda,\Psi>},$$

donde $\Psi = \psi_0 + H_{t_1}(\psi_1 + H_{t_2-t_1}(\psi_2 + (\ldots + H_{t_m-t_{m-1}}(\psi_m)))$. *En particular, (5.39) tiene no más de una solución.*

Demostración. a) Sustitúyase en (5.39) las funciones $f(x) = e^{-x}$ y $\varphi(t) = H_{T-t}(\psi)$, $0 \leq t \leq T$. Se obtiene de (5.39) la martingala

$$e^{-<X_t^0,H_{T-t}(\varphi)>} - \int_0^t \Bigg\{ - e^{-<X_s^0,H_{T-s}(\psi)>} < X_s^0, \frac{\partial H_{T-s}(\psi)}{\partial s} + (\Delta_\alpha + Va)H_{T-s}(\psi) >$$
$$+ \frac{1}{2}Vm_2 e^{-<X_s^0,H_{T-s}(\psi)>} < X_s^0, (H_{T-s}(\psi))^2 > \Bigg\} ds, \quad t \geq 0,$$

donde

$$\left\{ - e^{-<X_s^0,H_{T-s}(\psi)>} < X_s^0, \frac{\partial H_{T-s}(\psi)}{\partial s} + (\Delta_\alpha + Va)H_{T-s}(\psi) > + \frac{1}{2}Vm_2 e^{-<X_s^0,H_{T-s}(\psi)>} < X_s^0, (H_{T-s}(\psi))^2 > \right\}$$
$$= -e^{-<X_s^0,H_{T-s}(\psi)>} < X_s^0, -\frac{\partial H_{T-s}(\psi)}{\partial (T-s)} + (\Delta_\alpha + Va)H_{T-s}(\psi) - \frac{1}{2}Vm_2(H_{T-s}(\psi))^2 >= 0,$$

lo cual prueba a).

b) Sean $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ y $\psi_j \in D(\Delta_\alpha)$, $j = 0,\ldots,m$. Por a), se tiene que

$$\begin{aligned} E\left[e^{-\sum_{j=0}^m} < X_{t_j}^0, \psi_j >\right] &= E\left\{E\left[e^{-<X_{t_m}^0, H_{t_m-t_m}(\psi_m)>}\Big|\mathcal{F}_{t_{m-1}}^{x_0}\right] e^{\sum_{j=0}^{m-1}<X_{t_j}^0,\psi_1>}\right\} \\ &= E\left\{e^{-<X_{t_{m-1}}^0, H_{t_m-t_{m-1}}(\psi_m)>-\sum_{j=0}^{m-1}<X_{t_j}^0,\psi_j>}\right\} \\ &= E\left\{e^{-<X_{t_{m-1}}^0, H_{t_m-t_{m-1}}(\psi_m)>-\sum_{j=0}^{m-2}<X_{t_j}^0,\psi_j>}\right\} \\ &\vdots \\ &= E\left\{e^{-<X_0^0,\Psi>}\right\}, \end{aligned}$$

donde

$$\Psi = \psi_0 + H_{t_1}(\psi_1 + H_{t_2-t_1}(\cdots + H_{t_m-t_{m-1}}(\psi_m)\cdots) \in D(\Delta_\alpha).$$

Así, se ha probado el resultado para $\Psi \in D(\Delta_\alpha)$. Usando que $D(\Delta_\alpha)$ es denso en $C_p^+(\mathbb{R}^d)$ se sigue el resultado.

∎

Proposición 26. *Si X es un proceso en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$ que es punto de acumulación de $\{X^n\}_{n\geq 1}$, entonces X tiene una versión X^0 en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$, la cual es la única solución del problema de martingala (5.39) y $X^n \Rightarrow X^0$ en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$.*

Demostración. Por el Lema 5 se sigue que X tiene una versión en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^d)$ que se denotará por X^0. Por el teorema de convergencia dominada, $\forall \varphi \in C_p^+(\mathbb{R}^d)$ se obtiene que

$$\begin{aligned} E\left[e^{-<X_0^0,\varphi>}\right] &= \lim_{n\to\infty} E\left[e^{-<X_0^n,\varphi>}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{<n\lambda, e^{-\varphi/n}-1>} = e^{-<\lambda,\varphi>}, \end{aligned}$$

por lo tanto $X_0^0 = \delta_\lambda$ c.s. lo cual cumple con la condición de que $M_0 = f(< X_0^0, \varphi(0) >) = f(< \lambda, \varphi >)$. Resta ver que M_t dada por (5.39) es martingala, pues por el Lema 6, inciso b), se sigue que X es el único punto de acumulación de $\{X^n\}$ ya que $X = X^0$ en distribución.

Sea $T > 0$ y $C(X) = \{t \geq 0 : P[X_t = X_{t-}] = 1\}$. Si $n_1 < n_2 < \cdots$ es tal que $X^{n_k} \Rightarrow X$ en $D(\mathbb{R}^+, \dot{\mathbb{R}}^d)$, entonces $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_l \leq t \leq t+s \leq T$, $t_i \in C(X)$, $t, t+s \in C(X)$,

$$\begin{aligned} (X_{t_1}^{n_k}, \ldots, X_{t_l}^{n_k}, X_t^{n_k}, X_{t+s}^{n_k}) &\Rightarrow (X_{t_1}, \ldots, X_{t_l}, X_t, X_{t+s}) \\ &\overset{d}{=} (X_{t_1}^0, \ldots, X_{t_l}^0, X_t^0, X_{t+s}^0). \end{aligned} \tag{5.40}$$

Para probar que el proceso

$$\begin{aligned} M_t := f(< X_t^0, \varphi(t) >) - \int_0^t \Bigg[& f'(< X_s^0, \varphi(s) >) < X_s^0, \frac{\partial \varphi(s)}{\partial s} (\Delta_\alpha + Va)\varphi(s) > \\ & + \frac{1}{2} V m_2 f''(< X_s^0, \varphi(s) >) < X_s^0, \varphi^2(s) > \Bigg] ds \end{aligned}$$

es martingala, por la Proposición 9, es suficiente ver que

$$E\left[\left(f(< X_{t+s}^0, \varphi(t+s) >) - f(< X_t^0, \varphi(t) >) - \int_t^{t+s} g(< X_u^0, \varphi(u) >) du\right) \prod_{i=1}^l h_i(X_{t_i}^0)\right] = 0 \tag{5.41}$$

para cualequiera $0 \leq t_1 < \cdots < t_l \leq t < t+s$ y $h_1, \ldots, h_n \in C_p(\mathbb{R}^d)$, donde $g = Af$ está dada por

$$\begin{aligned} Af(< \mu, \varphi(s) >) = f'(< \mu, \varphi(s) >) < \mu, \frac{\partial \varphi(s)}{\partial s} > & \\ + f'(< \mu, \varphi(s) >) < \mu, \Delta_\alpha \varphi(s) > & \\ + Vaf'(< \mu, \varphi(s) >) < \mu, \varphi(s) > & \\ + \frac{1}{2} V m_2 f''(< \mu, \varphi(s) >) < \mu, \varphi^2(s) > . & \end{aligned}$$

Para probar que se cumple (5.41), sean $h_i \in C_p(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$, $i = 1, 2, \ldots$. Por el Lema 4 resulta

$$\lim_{k\to\infty} E\left[\left(f(< X_{t+s}^{n_k}, \varphi(t+s) >) - f(< X_t^{n_k}, \varphi(t) >) - \int_t^{t+s} g(< X_u^{n_k}, \varphi(u) >) du\right) \prod_{i=1}^l h_i(X_{t_i}^{n_k})\right] = 0,$$

y por (5.40) se sigue que

$$E\left[\left(f(< X_{t+s}^0, \varphi(t+s) >) - f(< X_t^0, \varphi(t) >) - \int_t^{t+s} g(< X_s^0, \varphi(t) >) du\right) \prod_{i=1}^l h_i(X_{t_i}^0)\right] = 0. \tag{5.42}$$

Debido a la continuidad por la derecha de las trayectorias de X^0 y al teorema de convergencia dominada, (5.42) se cumple $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots \leq t_l \leq t \leq t+s$, lo cual prueba (5.41). ∎

En resumen, se ha probado lo siguiente:

1. Si X es punto de acumulación débil de $\{X^n\}$ en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$ y si $d < 2p$ entonces X tiene una versión X^0 en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$.

2. X^0 resuelve el problema de la martingala (5.39).

3. Por el Lema 6, inciso b), $X \overset{d}{=} X^0$, es decir, X^0 es único.

4. $X \overset{d}{=} X^0$ es el superproceso de Dawson-Watanabe con $X_0^0 = \lambda$, ya que por el Lema 6, inciso a),

$$R_s^t = e^{-<X_s^0, H_{t-s}(\varphi)>}, \quad 0 \le s \le t,$$

es martingala y entonces

$$\begin{aligned} E\left[e^{-<X_t^0,\varphi>}\right] &= E\left[e^{-<X_t^0, H_{t-t}(\varphi)>}\right] \\ &= E\left[e^{-<X_0^0, H_t(\varphi)>}\right] = e^{<\lambda, H_t(\varphi)>} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_t(\varphi)}{\partial t} &= (\Delta_\alpha + Va)H_t(\varphi) - \frac{1}{2}Vm_2 H_t^2(\varphi), \quad t > 0, \\ H_0(\varphi) &= \varphi. \end{aligned}$$

5.3. (d, α, β, b)-Superproceso

El (d, α, β, b)-superproceso se obtiene como un límite de difusión de $MR^\alpha R$ tales que la ley de ramificación y reescalamiento difieren a los utilizados para el proceso de Dawson-Watanabe. Los parámetros de este superproceso indican lo siguiente: d, la dimensión del espacio euclideano sobre el cual se desplazan las partículas, α es el exponente del movimiento estable simétrico de cada partícula, b determina si el proceso es crítico, subcrítico o supercrítico, y β es el parámetro de la función generadora de probabilidades asociada a la dinámica de ramificación, y cuya expresión es

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k q_k = s + b(s-1) + c(1-s)^{1+\beta}, \tag{5.43}$$

donde $s \in [0,1]$, $b \in (-1, c]$, $c \in \left(0, \frac{1+b}{1+\beta}\right]$, y $\beta \in (0,1]$.

Observaciones:

1. El valor medio de ésta dinámica de ramificación es $m = 1 + b$, y tiene segundo momento finito si, y sólo si, $\beta = 1$, en cuyo caso, el segundo momento factorial es $m_2 = 2c$.

2. Por lo anterior, si $b = 0$ se tiene una ley de ramificación crítica.

3. El parámetro de Malthus para esta ley es Vb.

4. Las condiciones sobre b y c permiten garantizar que F es una función generadora.

5. F así definida está en el dominio de atracción normal de una ley estable de exponente $1+\beta$, por lo que para $\beta < 1$, solamente se tienen momento finitos de orden menor que $1+\beta$.

6. Si $\alpha = 2$ y $\beta = 1$ se obtiene un movimiento browniano ramificado con ramificación binaria crítica.

Si $N = \{N_t, t \geq 0\}$ es el movimiento α-estable ramificado con ley de ramificación (5.43), entonces el funcional de transición de Laplace está dado por

$$\mathbb{E}\left[e^{-<N_t,\varphi>}|N_0 = \mu\right] = e^{<\mu,\log(1-v_\varphi(t))>}, \qquad \varphi \in C_p^+(\mathbb{R}^d),\, \mu \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d).$$

donde v_φ es la solución de evolución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= (\Delta_\alpha + Vb)v - Vcv^{1+\beta}, \\ v(x,0) &= 1 - e^{-\varphi(x)}, \qquad \varphi \in C_p^+(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

En este caso, el límite de difusión que lleva al superproceso X, utiliza el proceso reescalado N^n donde

$$\begin{aligned} V_n &= Vn^\beta, \\ b_n &= bn^{-\beta}. \end{aligned}$$

De manera similar al superproceso de Dawson-Watanbabe, se prueba que $X^n = \left\{X_t^n = \frac{1}{n}N_t^n,\, t \geq 0\right\}$ converge débilmente a X, el (d,α,β,b)-superproceso.

Definición 37. *Sea $X = \{X_t,\, t \geq 0\}$ un proceso de Markov homogéneo con trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d))$. Entonces X es un (d,α,β,b)-superproceso si su funcional de Laplace está dado por*

$$\mathbb{E}\left[e^{-<X(t),\varphi>}|X(0) = \mu\right] = e^{-<\mu,u_\varphi(t)>}, \qquad \varphi \in C_p^+(\mathbb{R}^d),\, \mu \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d),$$

donde u_φ resuelve

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= (\Delta_\alpha + Vb)u - Vcu^{1+\beta} \\ u(x,0) &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Para este superproceso se tienen resultados similares a los establecidos para el superproceso de Dawson-Watanabe.

5.4. Movimiento α-estable Ramificado con Inmigración

Una variante del superproceso de Dawson-Watanabe, es el superproceso en el cual se considera el efecto de inmigración. En esta sección se introduce, a *grosso modo*, el movimiento α-estable ramificado con inmigración. Se enuncia un resultado análogo al Lema 6 y otros tres resultados contrapartes de los establecidos para el caso sin inmigración. Debido a que la técnica de las demostraciones es similar, no se incluyen en esta sección.

El ***movimiento α-estable ramificado con inmigración*** es un MR^α en el que inmigran partículas en el sistema según un campo aleatorio de Poisson en espacio tiempo, con medida de intensidad

$$\beta\Lambda_C = \beta\mathbb{I}_C\Lambda_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+},$$

donde $\beta \geq 0$ y $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$. Una vez en el sistema, cada partícula inmigrante evoluciona independientemente siguiendo la dinámica del movimiento α-estable ramificado.

El caso más simple de inmigración corresponde a $C = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, y más generalmente, a

$$C = D \times \mathbb{R}^+,\, D \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d).$$

En este caso se obtiene un proceso de Markov homogéneo en el tiempo, es decir tanto N como $X^n = \frac{1}{n}N^n$ son procesos homogéneos de Markov.
Para un $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ general, sea I_t la medida aleatoria determinada por las posiciones de las partículas que han inmigrado hasta el tiempo t; se consideran las posiciones de las partículas al inmigrar, antes de los efectos de migración y ramificación. Entonces $\{I_t\}$ es proceso de Markov en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$ cuyo generador infinitesimal está dado por

$$\mathcal{G}f(I_t) =< \lambda_{C_t}, f(I_t + \delta_{\cdot} - f(I_t)) >,$$

donde λ_{C_t} es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ restringida a $\mathfrak{B}(C_t)$, y

$$C_t = \{y \in \mathbb{R}^d : (y,t) \in C\},$$

es decir C_t es la t-sección de C.

Observación: Nótese que $\mathcal{G}$ depende de t. En particular $\{I_t\}$ no es temporalmente homogéneo, ni tampoco los procesos N y X^n (correspondientes al MR^α con inmigración).

No obstante, todo proceso markoviano que no es temporalmente homogéneo puede hacerse markoviano homogéneo agrandando su espacio fase. Lo que se hará aquí es incluir a t como una variable de estado para hacer de $\{I_t\}$ un proceso homogéneo de Markov. Entonces en lugar del movimiento α-estable ramificado X^n se considerará el proceso

$$Y^n = \{(X_t^n, t), t \geq 0\},$$

que sí es homogéneo de Markov, con generador infinitesimal L^n dado por

$$L^n g(\mu,t) = \frac{\partial}{\partial t} g(\mu,t) + \mathcal{A}_t^n g(\mu,t), \quad \mu \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d),\ t \geq 0,$$

para $g \in D(L^n)$, donde $\mathcal{A}_t^n$, valuado en una función cilíndrica H de la forma

$$H : \mu \longmapsto f(<\mu,\varphi>), \quad \varphi \in C_p(\mathbb{R}^d),\ f \in C^3(\mathbb{R}^d),$$

está dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_t^n f(<\mu,\varphi>) &= f'(<\mu,\varphi>) <\mu, \Delta_\alpha\varphi> \\
&+ \frac{1}{n}\frac{1}{2} f''(<\mu,\varphi>) <\mu, \Delta_\alpha\varphi^2 - 2\varphi\Delta_\alpha\varphi> \\
&+ n^2 V <\mu, \sum_{j=0}^{\infty} q_j^{(n)} \left[f(<\mu,\varphi> + n^{-j}(j-1)\varphi) - f(<\mu,\varphi>) \right] \\
&+ n\beta < \Lambda_{C_t}, f(<\mu,\varphi> + n^{-1}\varphi(\cdot)) > - f(<\mu,\varphi>) > + \circ(n^{-1}), \quad n \to \infty,
\end{aligned}$$

donde Λ_{C_t} es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ restringida a la t-sección C_t de C.
Nótese que al hacer el reescalamiento tenemos alta densidad también en el termino de inmigración, es decir reescalamos también Λ_C.

Usando un desarrollo en serie de Taylor para la función f, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_t f(<\mu,\varphi>) &:= \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_t^n f(<\mu,\varphi>) \\
&= f'(<\mu,\varphi>) <\mu, \Delta_\alpha\varphi> + Vaf'(<\mu,\varphi>) <\mu,\varphi> \\
&+ \frac{1}{2} V m_2 f''(<\mu,\varphi>) <\mu,\varphi^2> + \beta < \Lambda_{C_t}, \varphi > f''(<\mu,\varphi>).
\end{aligned}$$

Teorema 30. *Si X es punto de acumulación débil de $\{X^n\}$ en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$, entonces $\forall f \in C_b^3(\mathbb{R})$, $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ tal que $\varphi(\cdot, s) \in D(\Delta_\alpha)$ $\forall s \geq 0$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial s} \in C_p(\mathbb{R}^d)$,*

$$M_t \equiv f(< X(t), \varphi >) - \int_0^t \left[f'(< X_s, \varphi(s) >) < X_s, \frac{\partial}{\partial s}\varphi(s) > + \mathcal{A}_s f(< X_s, \varphi(s) >) \right] ds, \quad t \geq 0$$

es martingala respecto a $\mathcal{F}^X$.

De manera análoga al caso sin inmigración, se tiene el siguiente

Corolario 6. $\forall \varphi \in K_p(\mathbb{R}^d)$,

$$< X_t, \varphi > - \int_0^t [< X_s, (\Delta_\alpha + Va)\varphi > + < \beta \Lambda_{C_s}, \varphi >] \, ds, \quad t \geq 0,$$

es martingala local. Más aún, si $H(t)$ es la única solución al problema con valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(t)}{\partial t} &= (\Delta_\alpha + Va)H(t) - \frac{1}{2} V m_2 (H(t))^2, \quad t \geq 0 \\ H(0) &= \varphi \in D(\Delta_\alpha) \end{aligned} \tag{5.44}$$

y si $T > 0$, entonces

$$R_t^T := \exp\{- < X_t, H(T-t) > + \beta < \Lambda_{C \wedge t}, H(T - \cdot) >\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

es martingala local respecto a la filtración $\mathcal{F}^X$, donde $C \wedge t = \{(x,s) \in C; s \leq t\}$ y

$$\Lambda_{C \wedge t} = \mathbb{I}_{C \wedge t} \Lambda_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+}$$

Nótese que $\forall \varphi \in K_p(\mathbb{R}^d)$ y $t \geq 0$,

$$E\left[e^{-<X_t, \varphi>}\right] = e^{-\gamma < \lambda, H(t) > - \beta < \Lambda_{C \wedge t}, H(t - \cdot)>}$$

Proposición 27. *$\{X^n\}_{n \geq 1}$ es relativamente compacto en $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$ y además $\forall t \geq 0$, $X_t(\{\tau_d\}) = 0$ c.s.*

Nota: Usando lar martingala R_t^T se puede probar que cualquier proceso que satisface el problema de la martingala del teorema anterior tiene las mismas distribuciones de dimensión finita y por tanto es único (en distribución).

Teorema 31. *X es un proceso de Markov con valores en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$, el cual posee una versión continua que resuelve el siguiente problema de martingala: $\forall \varphi \in K_p(\mathbb{R}^d)$,*

$$< X_t, \varphi > - \int_0^t [< X_s, (\Delta_\alpha + Va)\varphi > + < \beta \Lambda_{C_s}, \varphi >] \, ds, \quad t \geq 0$$

es martingala con valor inicial $< X_0, \varphi > = < \lambda, \varphi >$ y proceso creciente

$$\langle X \rangle_t := V m_2 \int_0^t < X_s, \varphi^2 > ds, \quad t \geq 0.$$

En particular, debido a la continuidad del proceso creciente, se sigue que X_t tiene una versión continua. El caso de $\{X_t\}$ correspondiente a ramificación con variación finita es el único para el cual $\langle X \rangle_t$ es continuo. Si $\alpha < 2$, entonces Δ_α es un proceso de saltos puros sin embargo la continuidad del proceso X depende de la ramificación.

Capítulo 6

Comportamiento Asintótico

El propósito de éste capítulo es enunciar el teorema básico sobre *persistencia* de superprocesos. En términos generales, la *persistencia* está relacionada a la existencia de una distribución de equilibrio no trivial de X_t, cuando $t \to \infty$. Para el (d, α, β, b)-superproceso (caracterizado en el capítulo anterior) se probará que para dimensiones $d \geq \frac{\alpha}{\beta}$, el proceso *persiste*, y para dimensiones menores, se extingue. La prueba aquí expuesta corresponde a la de Yong-Jin Wang [54]. La ventaja de tal prueba radica en que no hace uso de las herramientas probabilísticas *usuales* en este tipo de resultados (específicamente las distribuciones de Palm, ver [28]) y en su lugar utiliza métodos analíticos (incluso más simples a los usados en [8]).

6.1. Extinción Local

De [8] se sabe que para procesos de difusión multiplicativos con ramificación de varianza finita, si el movimiento espacial es un movimiento α-estable simétrico en $\mathbb{R}^d$ y el estado inicial es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$, entonces la existencia o no existencia de una distribución límite no degenerada para el MR^α es equivalente a la recurrencia o transitoriedad del movimiento α-estable. Resultados análogos se tienen para sistemas de partículas en los cuales el mecanismo de migración es más general, por ejemplo un proceso Markoviano regular, ver [16].

Debido a que el superbrowniano es un límite reescalado de sistemas de partículas, no resulta extraño que dicho criterio sobre existencia o no existencia de una distribución límite para el superproceso se traslade a la recurrencia o transitoriedad del mecanismo de migración del sistema de partículas sobre el cual se construye. Así, el concepto de *persistencia* está relacionado con el concepto de extinción local siguiente.

Definición 38. *Sea X un proceso con valores en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$. Se dice que X sufre* ***extinción local*** *si para cada subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^d$, existe tiempo aleatorio τ_K finito c.s., tal que*

$$X_t(K) := < X_t, 1_K >= 0, \quad \forall t > \tau_K.$$

En adelante, $\{< Y_t, 1 >, t \geq 0\}$ denotará al proceso de masa de las partículas. Por tanto, que Y presente extinción local indica que la masa total contenida en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$ converge a cero en probabilidad. Se sigue que la extinción local dependerá de tres aspectos básicos:

1. De la transitoriedad del movimiento espacial.

2. Que tan grande es el parámetro de la ley de los tiempos de vida de las partículas.

3. De la tasa de ramificación asociada, es decir el número de partículas generadas en cada ramificación.

Por lo anterior, no es de sorprenderse que los métodos para probar extinción local de superprocesos estén directamente relacionados a la ley de ramificación considerada. Para este capítulo se considerará el mecanismo de ramificación (crítico) utilizado para la construcción del (d,α,β,b)-superproceso del capítulo anterior. Intuitivamente se tiene que el proceso persistirá cuando la movilidad del sistema sea suficientemente grande como para *cubrir* los regiones vacías producidas por la tendencia a la extinción debida a la ramificación crítica.

Para la siguiente sección será necesario tener en cuenta lo siguiente:

1. Se sabe que el proceso α-estable simétrico en $\mathbb{R}^d$ es transitorio si, y sólo si, $d > \alpha$. Por tanto, los procesos α-estables simétricos recurrentes en $\mathbb{R}^d$ son los siguientes:
   a) $d = 2$ y $\alpha = 2$, es decir el movimiento browniano en $\mathbb{R}^2$.
   b) $d = 1$ y $1 \leq \alpha \leq 2$.
2. Lo anterior indica que en dimensiones grandes se tiene una noción de movilidad de partículas expresada por la relación
$$P_t(x) \sim Ct^{-d/\alpha}, \quad t > 1,\ x \in \mathbb{R}^d\ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d),$$
donde B es un conjunto acotado y $C = C(B)$ es una constante que puede depender de B. Aquí $\{P_t,\, t \geq 0\}$ denota la familia de densidades de transición del movimiento α-estable simétrico en $\mathbb{R}^d$.
3. La medida de Lebesgue es invariante para el semigrupo $\{T_t\}$ con generador infinitesimal Δ_α, $0 < \alpha \leq 2$, es decir
$$< \lambda, T_t f >=< \lambda, f >, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d). \tag{6.1}$$

6.2. Persistencia en dimensiones grandes

Sea $X = \{X_t,\, t \geq 0\}$ el (d,α,β,b)-superproceso construido como límite de difusión de $MR^\alpha R$, para los cuales la ley de ramificación tiene función generadora dada por (5.43), donde $\beta \in (0,1]$, $b = 0$ y $c \in (0, 1/(1+\beta)]$, es decir
$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k q_k = s + c(1-s)^{1+\beta}, \quad s \in [0,1].$$
El funcional de Laplace de X está dado por
$$E\left[e^{-<X_t,f>}\Big| X_0 = \mu\right] = e^{-<\mu,v_t f>}, \quad f \in C_p^+(\mathbb{R}^d),\ \mu \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d),$$
y $v_t f = H_t(f)$ es la única solución *mild* de la ecuación diferencial parcial
$$\frac{\partial v_t}{\partial t} = \Delta_\alpha v_t - V v_t^{1+\beta}, \quad v_0 = f,$$
es decir, la solución de la ecuación integral
$$v_t f(x) = T_t f(x) - V \int_0^t T_{t-s}(V_s f)^{1+\beta}(x) ds, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{6.2}$$
con $T_t = e^{\Delta_\alpha t}$.

Observación:

- Si $\beta = 1$, se obtiene el proceso de Dawson-Watanabe con $a = 0$ y con V en lugar de $\frac{1}{2}Vm_2$.

Bajo el supuesto de que N_0 es un campo aleatorio de Poisson con intensidad λ, la medida de Lebesgue, se sigue que $X_0 = \lambda$ c.s. Más aún, debido a la invarianza de λ y la criticalidad del mecanismo de ramificación, N_t y X_t tienen intensidad λ, es decir

$$\mathbb{E}N_t = \mathbb{E}X_t = \lambda, \quad \forall t \geq 0.$$

Además, el Funcional de Laplace es

$$\begin{aligned} E\left[e^{-<X_t,f>}\Big|X_0 = \lambda\right] &= e^{-<\lambda,v_t f>} \\ &= e^{-<\lambda,T_t f - V\int_0^t T_{t-s}(V_s f)^{1+\beta}ds>} \\ &= e^{-<\lambda,f>+V\int_0^t<\lambda,T_{t-s}(v_s f)^{1+\beta}>ds} \\ &= e^{-<\lambda,f>+V\int_0^t<\lambda,(v_s f)^{1+\beta}>ds}. \end{aligned}$$

Haciendo $t \uparrow +\infty$, se sigue que

$$E\left[e^{-<X_t,f>}\Big|X_0 = \lambda\right] \to e^{-<\lambda,f>+V\int_0^\infty<\lambda,(v_s f)^{1+\beta}>ds} =: Ee^{-<X_\infty,f>},$$

donde X_∞ es medida aleatoria de Radon en $\mathbb{R}^d$ y

$$< X_t, f > \overset{D}{\Rightarrow} < X_\infty, f >, \quad t \to \infty.$$

Además,

$$\begin{aligned} E < X_\infty, f > &= E \lim_{t\to\infty} < X_t, f > \\ &\leq \liminf_{t\to\infty} E < X_t, f > \\ &= \liminf_{t\to\infty} < \lambda, T_t f > = < \lambda, f > . \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la desigualdad de Jensen,

$$\begin{aligned} e^{-E<X_\infty,f>} &\leq Ee^{-<X_\infty,f>} \\ &= e^{-<\lambda,f>+V\int_0^\infty<\lambda,(v_s f)^{1+\beta}>ds}, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$< \lambda, f > -V\int_0^\infty < \lambda, (v_s f)^{1+\beta} > ds \leq E < X_\infty, f > . \tag{6.3}$$

Poniendo ϵf en lugar de f en (6.3), con $\epsilon > 0$, resulta

$$< \lambda, f > -\frac{V}{\epsilon}\int_0^\infty < \lambda, (v_s(\epsilon f))^{1+\beta} > ds \leq E < X_\infty, f > \leq < \lambda, f > \tag{6.4}$$

Nótese que si

$$\frac{V}{\epsilon}\int_0^\infty < \lambda, (v_s(\epsilon f))^{1+\beta} > ds \to 0, \quad \epsilon \to 0$$

Entonces $\langle \lambda, f \rangle \leq \mathbb{E}\langle X_\infty, f \rangle \leq \langle \lambda, f \rangle$, $\forall f \in C_p^+(\mathbb{R}^d)$. Lo cual implicaría que X_∞ es no trivial, es decir que la intensidad de X_∞ sería la misma que el estado inicial λ.

Definición 39. *Se dice que X* ***persiste*** *(o que X es persistente) si existe una medida aleatoria X_∞ en $\mathbb{R}^d$, no trivial, tal que $X_t \overset{d}{\Rightarrow} X_\infty$ y $\mathbb{E}X_\infty = \lambda$.*

Teorema 32 (***Dicotomía de persistencia-extinción***). *Sea X el (d,α,β)-superproceso. Entonces el proceso* ***persiste****, o bien, sufre extinción local c.s. cuando $t \to \infty$.*

Dado d, resulta natural preguntarse para que valores de los parámetros α y β, el superproceso X tiene un límite no degenerado.

Teorema 33. *Si $d > \frac{\alpha}{\beta}$, entonces X es persistente, es decir si $X_0 = \lambda$, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$, entonces existe una medida aleatoria X_∞, tal que $X_t \overset{D}{\to} X_\infty$ y $\mathbb{E}X_\infty = \lambda$.*

Para probar este teorema, debido a (6.4) basta mostrar

Lema 7. *Si $d > \frac{\alpha}{\beta}$, entonces*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty < \lambda, (v_s(\varepsilon f))^{1+\beta} > ds = 0.$$

Demostración. Sin perder generalidad, supóngase que $||f||_\infty = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1 < \lambda, (v_s(\epsilon f))^{1+\beta} > ds &\overset{(6,2)}{\leq} \int_0^1 < \lambda, (T_s(\epsilon f))^{1+\beta} > ds \\ &\leq \epsilon^{1+\beta} \int_0^1 < \lambda, T_s f ||f||_\infty^\beta > ds \\ &\leq \epsilon^{1+\beta} < \lambda, f >, \end{aligned} \tag{6.5}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\int_1^\infty < \lambda, (v_s(\epsilon f))^{1+\beta} > ds &\overset{(6,2)}{\leq} \int_1^\infty < \lambda, (T_s(\epsilon f))^{1+\beta} > ds \\ &= \epsilon^{1+\beta} \int_1^\infty ds \int_{\mathbb{R}^d} dx \left(\int_{\mathbb{R}^d} P_s(y-x) f(y)^{\frac{1}{1+\beta}} f(y)^{\frac{\beta}{1+\beta}} dy \right)^{1+\beta} \\ &\overset{D.de Holder}{\leq} \epsilon^{1+\beta} \int_1^\infty ds \int_{\mathbb{R}^d} dx \left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} P_s(y-x)^{1+\beta} f(y) dy \right)^{\frac{1}{1+\beta}} \left(\int f(y) dy \right)^{\frac{\beta}{1+\beta}} \right]^{1+\beta},\end{aligned}$$

donde $\{P_s, s \geq 0\}$ son las densidades de transición α-estables simétricas. Recordar que $\forall s > 0$, $P_s(\cdot)$ es unimodal, radialmente simétrica (es decir, vale lo mismo en todos los puntos que tengan la misma norma) y tiene la propiedad de escala

$$P_{Cr}(z) = C^{-d/\alpha} P_r\left(\frac{z}{C^{1/\alpha}}\right), \quad \forall C > 0,\, z \in \mathbb{R}^d, \quad r > 0. \tag{6.6}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty < \lambda, (v_s(\epsilon f))^{1+\beta} > ds &\leq \epsilon^{1+\beta} \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_1^\infty ds \left[\int_{\mathbb{R}^d} P_s(y-x)^{1+\beta} f(y) dy \right] < \lambda, f >^\beta \\ &= \epsilon^{1+\beta} < \lambda, f >^\beta \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} dx dy f(y) \left[\int_1^\infty P_s(y-x)^{1+\beta} \mathbb{I}_{||x-y|| \leq 1} \right. && (6.7) \\ &\left. + \int_1^\infty P_s(y-x)^{1+\beta} \mathbb{I}_{||y-x||>1} \right]. && (6.8)\end{aligned}$$

Poniendo

$$I_1 := \int_1^\infty P_s(y-x)^{1+\beta} \mathbb{I}_{||x-y|| \leq 1},$$
$$I_2 := \int_1^\infty P_s(y-x)^{1+\beta} \mathbb{I}_{||y-x||>1},$$

tenemos que

$$
\begin{aligned}
I_1 &\overset{(6,6)}{=} \int_1^{\infty} s^{-\frac{d}{\alpha}(\beta+1)} \left(P_1\left(\frac{y-x}{s^{1/\alpha}}\right)\right)^{1+\beta} \mathbb{I}_{||y-x||\leq 1} ds \\
&\leq \int_1^{\infty} s^{-\frac{d(1+\beta)}{\alpha}} (P_1(0))^{1+\beta} \mathbb{I}_{||y-x||\leq 1} ds \\
&= c_1 \frac{\alpha}{d(1+\beta)-\alpha} \mathbb{I}_{||y-x||\leq 1},
\end{aligned}
$$

donde $c_1 := (P_1(0))^{1+\beta}$. Para estimar I_2 hacemos el cambio de variable $s = ||y-x||^{\alpha} t > 1$, resultando

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{||y-x||^{-\alpha}} ||y-x||^{\alpha} ds \left(P_s\left(\frac{y-x}{((y-x)\alpha)^{1/\alpha}}\right)\right)^{1+\beta} \left((||y-x||^{\alpha})^{-d/\alpha}\right)^{1+\beta} \mathbb{I}_{||y-x||>1} \\
&= \int_{||y-x||^{-\alpha}} ds P_s(\varepsilon) \frac{1}{||y-x||^{d(1+\beta)-\alpha}} \mathbb{I}_{||y-x||>1},
\end{aligned}
$$

donde

$$
\varepsilon := \frac{y-x}{((y-x)\alpha)^{1/\alpha}}, \quad ||\varepsilon|| = 1.
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\int_{||y-x||^{-\alpha}}^{\infty} P_s(\varepsilon)^{1+\beta} ds &= \int_{||y-x||^{-\alpha}}^{1} P_s(\varepsilon)^{1+\beta} ds + \int_1^{\infty} P_s(\varepsilon)^{1+\beta} ds \\
&\leq \lim_{\delta \uparrow 0} \int_{\delta}^{1} P_s(\varepsilon)^{1+\beta} ds \leq C_2,
\end{aligned}
$$

donde $C_2 > 0$ y se ha usado que $P_s(\varepsilon)$ es acotada para $\varepsilon \in (0,1)$ y que $||\varepsilon|| = 1$. Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\infty} P_s(\varepsilon)^{1+\beta} ds &\overset{(6,6)}{=} \int_1^{\infty} s^{-d(1+\beta)/\alpha} \left(P_1 \frac{y-x}{s^{1/\alpha}}\right)^{1+\beta} ds \\
&\leq C_1 \int_1^{\infty} s^{-d(1+\beta)/\alpha} ds \\
&\leq C_1 \frac{\alpha}{d(1+\beta)-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\int_{||y-x||^{-\alpha}}^{\infty} P_s(\varepsilon)^{1+\beta} ds \leq C_1 \frac{\alpha}{d(1+\beta)-\alpha} + C_2,
$$

y sustituyendo esto último en I_2 obtenemos

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\infty} < \lambda, (v_s(\epsilon f))^{1+\beta} > ds &\leq \epsilon^{1+\beta} < \lambda, f >^{\beta} \Bigg[C_1 \frac{\alpha}{d(1+\beta)-\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} dx dy f(y) \mathbb{I}_{||y-x||\leq 1} \\
&\quad + \left(C_1 \frac{\alpha}{d(1+\beta)\alpha} + C_2\right) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} dx dy f(y) \frac{1}{||y-x||^{d(1+\beta)-\alpha}} \mathbb{I}_{||y-x||>1} \Bigg] \\
&= \epsilon^{1+\beta} < \lambda, f >^{\beta} \Bigg[C_1 \frac{\alpha}{d(1+\beta)-\alpha} Vol(B_1(0)) < \lambda, f > \\
&\quad + \left(C_1 \frac{\alpha}{d(1+\beta)-\alpha} + C_2\right) \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{||y-x||>1} \frac{dx}{||y-x||^{d(1+\beta)-\alpha}}\right) f(y) dy.
\end{aligned}
$$

Observando que

$$
\int_{||y-x||>1} \frac{dx}{||y-x||^{d(1+\beta)-\alpha}} := K_2(d) < \infty
$$

debido a que $d > \frac{\alpha}{\beta}$, y haciendo $\epsilon \downarrow 0$ obtenemos la prueba del lema y por lo tanto que $d > \frac{\alpha}{\beta}$ implica persistencia.

■

Observaciones:

1. Para este caso, $d_c = \alpha/\beta$ es llamada la ***dimensión crítica***, de modo que para $d > d_c$, el proceso X_t converge en distribución a un límite no trivial y en caso contrario, sufre extinción local.

2. Como se explica en [26], la interpretación para el resultado anterior está relacionada con contrarrestar la extinción para lograr la persistencia de acuerdo a lo siguiente: el parámetro α representa la *movilidad* de las partículas, de modo que si éste disminuye, entonces aumenta la movilidad de las partículas. El parámetro β representa la *fertilidad* de las partículas. Si β disminuye, entonces aumenta el número de partículas producidas, pero por criticalidad, también aumenta la posibilidad de muerte. Por lo tanto, para una dimensión d específica, si β disminuye, la extinción local del proceso deja regiones vacías, pero si α disminuye lo suficiente y mantiene la relación $d > \frac{\alpha}{\beta}$, la probabilidad de que las partículas lleguen a las regiones vacías desde otras regiones antes de morir aumenta.

6.3. Resumen

En este capítulo se ha probado el resultado de persistencia en dimensiones grandes para el (d,α,β,b)-superproceso, para el caso en el que $b = 0$. Este resultado se estableció en el Teorema 33. La prueba corresponde a la dada en [54] y por la expresión (6.4), se reduce a la prueba del Lema 7.

Notas Adicionales

Resultados de persistencia para modelos de ramificación con masa total finita fueron considerados por Jirina, y el caso de masa total infinito se debe a Dawson (1977).

Los resultados sobre *persistencia* no sólo han sido estudiados para el caso de superprocesos. En los primeros estudios al respecto, Kallenberg introdujo el uso de distribuciones Palm para probar *persistencia* en procesos de ramificación en tiempo discreto. Dicha metodología fue extendida al caso continuo en [27], y al caso multitipo en [29].

Como fue mencionado, los métodos para probar resultados de *persistencia* dependen de la dinámica de ramificación considerada, por ejemplo, en [27], la dinámica considerada fue tal que su función generadora es de la forma

$$F(s) = s + \frac{1}{2}(1-s)^{1+\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1.$$

Con este dinámica de ramificación, en [27], se extienden los resultados de persistencia al caso de procesos de ramificación con valores medidas continuos, y se prueba por dos técnicas: el uso de distribuciones de Palm y utilizando la fórmula de Feynman-Kac.

En [55], se establecen criterios sobre el comportamiento asintótico de superprocesos construidos con mecanismos de ramificación generales (Teorema 3.1), a saber

$$F(s) = bs + cs^2 + \int_0^\infty (e^{-su} - 1 + su)\,\mu(du), \tag{6.9}$$

donde $c \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$ y μ una medida en $\mathbb{R}^+$ tal que $\int_0^\infty u \wedge u^2 \mu(du) < \infty$. Para el caso de medidas iniciales finitas, el Teorema 2.1 de [55], establece los criterios para determinar extinción o no del superproceso en consideración. Los resultados sobre existencia de distribuciones límites o *estados* *de equilibrio* de superprocesos sobre espacios de medidas infinitas, con medida inicial la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$, son dados en el Teorema 3.1 del mismo artículo. En resumen, este resultado establece que

i) Si $b > 0$, o bien si $b = 0$ y $d < 3$, el superproceso tiene un estado de equilibrio cero, es decir $X_t \Rightarrow 0$, cuando $t \to \infty$.

ii) Si $b < 0$, o bien, $b = 0$ y $d \geq 3$, el superproceso tiene un estado de equilibrio distinto de cero. Mas aún, si $b = 0$ y $d \geq 3$, existe una medida aleatoria no trivial X_∞, tal que $X_t \Rightarrow X_\infty$ cuando $t \to \infty$ y $\mathbb{E}X_\infty = \lambda$.

La dimensión crítica para sistemas de partículas y sus correspondientes límites de difusión, como por ejemplo para el MR^α y para el superproceso de Dawson-Watanabe, coinciden debido a que se sabe que ambos están relacionados mediante una representación de Cox. Así, si N es un movimiento browniano ramificado y X su límite de difusión, entonces N_t es una medida aleatoria de Cox dirigida por X_t, es decir N_t es una medida aleatoria de Poisson doblemente estocástica, con medida de intensidad X_t:

$$L_{N_t}(\varphi) = L_{X_t}(1 - e^{-\varphi}), \quad \varphi \in C_K(\mathbb{R}^d).$$

Apéndice

.1. Semigrupos de Markov

Definición 40. *Sea* $(L, ||\cdot||)$ *un espacio de Banach. Una familia de operadores lineales y acotados* $T_t : L \to L$, $t > 0$, *se llama* ***semigrupo*** *de operadores en* L *si*

a) $T_{t+s} = T_t T_s$, $s, t \geq 0$,

b) $T_0 = I_d$.

El semigrupo $\{T_t, t \geq 0\}$ *se dice* ***fuertemente continuo*** *(o semigrupo* $\mathcal{C}_0$*) si* $\forall f \in L$,

$$\lim_{t \downarrow 0} ||T_t f - f|| = 0.$$

Definición 41. *El* ***generador fuerte*** A *de* $\{T_t (:= T(t)), t \geq 0\}$ *es*

$$A = \left\{ (f, g) \in L \times L : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t} = g \right\};$$

es decir

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t}, \qquad \forall f \in D(A)$$

donde

$$D(A) = \left\{ f \in L : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t} \ \textit{existe} \right\}.$$

Para $[a, b] \subset (-\infty, \infty)$ denotamos

$$C([a, b]) = \{ f : [a, b] \to L : f \text{ es continua} \}$$

Si $u : [a, b] \to L$, se dice que u es $\mathcal{R}$−integrable en $[a, b]$ si

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} u(s_k)(t_k - t_{k-1})$$

existe, donde $a \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq b$, y $\max_k |t_k - t_{k-1}| = \delta_k$, $t_{k-1} \leq s_k \leq t_k$. En este caso definimos

$$\int_a^b u(s) ds = \lim_{\delta \downarrow 0} \sum_{k=1}^{n} u(s_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Si u es $\mathcal{R}$-integrable en $[a, b]$, $\forall b > 0$ y $\lim_{b \to \infty} \int_a^b u(s) ds$ existe, la integral impropia se define como

$$\int_0^\infty u(s) ds = \lim_{b \to \infty} \int_a^b u(s) ds.$$

Definición 42. *Un* ***semigrupo de Feller*** *es una familia* $\{T_t, t \geq 0\}$ *de operadores lineales positivos en* C_0 *tal que* *a)* $T_t f \in C_0$

b) Si $f \in C_0$ *y* $0 \le f \le 1$ *entonces* $0 \le T_t f \le 1$

c) $T_0 = I$ *y* $T_{t+s} = T_t T_s$*, para toda* $s, t \ge 0$

d) Para cada $f \in C_0$*,* $\lim_{t\to 0^+} \|T_t f - f\| = 0$

Propiedades de Semigrupos

Sea $\{T(t), t \ge 0\}$ un semigrupo fuertemente continuo en $(L, \|\cdot\|)$ con generador A. Entonces

a) Si $f \in L$ y $t \ge 0$, se cumple $\int_0^t T(s) f ds \in \mathrm{Dom}(A)$ y $T(t)f - f = A\int_0^t T(s) f ds$.

b) Si $f \in \mathrm{Dom}(A)$ y $t \ge 0$, entonces $T(t)f \in \mathrm{Dom}(A)$ y

$$\frac{d}{dt} T(t)f = AT(t)f = T(t)Af, \tag{10}$$

$$T(t)f - f = \int_0^t AT(s) f ds = \int_0^t T(s) A f ds.$$

Cuando $\{T(t), t \ge 0\}$ es el semigrupo de un proceso de Markov, las identidades en (10) se conocen como las ecuaciones de Kolmogorov hacía atrás y adelante, respectivamente.

c) Sean $\{T(t), t \ge 0\}$ y $\{S(t), t \ge 0\}$ semigrupos en $(L, \|\cdot\|)$ fuertemente continuos con generadores A y B respectivamente. Si $A = B$ entonces $T(s) = S(s)$, $\forall s \ge 0$. Es decir, los generadores determinan al semigrupo.

d) (*Teorema de Trotter-Kato*) Sean $\{T(t), t \ge 0\}$, $\{S(t), t \ge 0\}$ y $\{U(t), t \ge 0\}$ semigrupos fuertemente continuos en $(L, \|\cdot\|)$, con generadores respectivos A, B y $A + B$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left[T\left(\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n f = U(t)f, \qquad \forall f \in L,$$

$\forall t$ uniformemente en compactos. En el caso del MBR, este teorema permite determinar el generador de la dinámica del proceso como la suma de los generadores de difusión (desplazamiento) y el de ramificación.

e) (*Teorema de la Fórmula Exponencial*) Si $A : L \to L$ acotado, entonces $T(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$. En general si $\{T(t), t \ge 0\}$ es fuertemente continuo y A su generador, entonces $\forall f \in L$,

$$\left[I - \left(\frac{t}{n}\right) A \right]^{-n} f \longrightarrow T(t)f, \quad n \to \infty,$$

$\forall t \ge 0$ uniformemente en intervalos acotados.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y $\{X(t), t \ge 0\}$ un proceso E−valuado de Markov respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$, (donde (E, d) es métrico con σ-álgebra de Borel $\mathfrak{B}(E)$). Entonces $\forall f : E \to \mathbb{R}$ medible y acotada se tiene que

$$\mathbb{E}[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[f(X_{t+s})|X_t]$$

Definición 43. *Sea* $\{T(t), t \ge 0\}$ *un semigrupo en* $L \subset \mathcal{B}_b(E)$*, donde* $\mathcal{B}_b(E)$ *es el espacio de funciones* $f : E \to \mathbb{R}$*) medibles y acotadas. Entonces* $\{T(t), t \ge 0\}$ *es el semigrupo asociado al proceso* $\{X(t), t \ge 0\}$ *si*

$$\mathbb{E}[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t] = T(s)f(X_t), \ c.s. \quad t \ge 0, f \in L.$$

Bibliografía

[1] Billingsley, P. (1999) *Convergence of Probability Measures*. 2nd ed. John Wiley, New York.

[2] Blumenthal, R. M., Getoor, R. K. (2007) *Markov Processes and Potential Theory* Dover Publications, Inc. Mineola, New York.

[3] Breiman, L. (1992) *Probability*, Society for Industrial and Applied Mathematics

[4] Chung, K. L. (1983) *A course in Probability Theory*, Academic Press, 2nd ed.

[5] Cox, J. T., Durrett, R., Perkins, E. A. (2000) *Rescaled voter models converge to super-Brownian motion*. Ann. Probab., 28: 185-234

[6] Cox, J. T., Klenke, A. (2003) *Rescaled Interating Diffusions Converge to super-Brownian Motion*, Ann. Appl. Probab., 12, 501-514.

[7] Dawson, D. A. (1975) *Stochastic evolution equations and related measure processes.* J. Multivariate Anal. 5, 1-52.

[8] Dawson, D. A. (1977) *The critical measure diffusion process*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 40, no. 2, 125-145.

[9] Dawson, D. A. (1993) *Measure-valued Markov Processes*, Ecole d'été de probabilités de Saint Flour XXI. Lecture Notes in Math. 1541 1-260. Springer, Berlin

[10] Dawson, D.A. y Gorostiza, L. G. (1990) *Generalized Solutions of a Class of Nuclear-Space-Valued Stochastic Evolution Equations*, Appl Math Optim 22: 241-263.

[11] Dellacherie, C. Meyer, P. A. (1978) *Probabilities and Potential* Mathematics Studies, Vol. 2, North-Holland Publishing Company, Amsterdam and New York, 1978

[12] Derbez, E., Slade, G. (1997) *Lattice trees and super-Brownian motion.*Canad. Math. Bull., 40: 19-38.

[13] Derbez, E., Slade, G. (1998) *The scaling limit of lattice trees in high dimensions*. Commun. Math. Phys., 193: 69-104

[14] Dynkin, E. B. *Superprocesses and partial differential equations*, Ann. Probab. 21 (1993), no. 3, 1185-1262.

[15] Dynkin, E. B.; Kuznetsov, S. E. *Nonlinear parabolic P.D.E. and additive functionals of superdiffusions*. Ann. Probab. 25 (1997), no. 2, 662-701.

[16] Etheridge, A. M.(1993) *Asymptotic Behaviour of Measure-Valued Critical Branching Processes*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 118, No. 4, pp. 1251-1261

[17] Etheridge, A. M. (2000) *An Introduction to Superprocesses.* University Lecture Series 20 (AMS, Providence, RI.)

[18] Ethier, S. N., Kurtz, T. G. (1986) *Markov Processes: Characterization and Convergence* Wiley, New York.

[19] Ethier, S.N., Kurtz, T. G. (1993) *Fleming-Viot processes in population genetics*, SIAM J. Control Optim. 31, pp. 345-386.

[20] Ethier, S. N.; Kurtz, T. G. *The infinitely-many-alleles model with selection as a measure-valued diffusion. Stochastic methods in biology* , (Nagoya, 1985), 72-86, Lecture Notes in Biomath., 70, Springer, Berlin, 1987.

[21] Feller, W. (1951) *Diffusion processes in genectics*, Proc. of Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley and Los Angeles,, 227-246.

[22] Feller, W. (1971) *An introduction to Probability Theory and its Applications* Vol 2. 1ra ed. Wiley, New York.

[23] Fernandez, Begoña. *Teoremas Límites de Alta Densidad para Campos Aleatorios Ramificados.* Aportaciones Matemáticas, SMM 1986.

[24] Fleming, W. H. (1975) *Diffusion Processes in Population Biology* Advances in Applied Probability, Vol. 7, pp. 100-105.

[25] Fleming, W. H.; Viot, M. (1979) *Some Measure-Valued Markov Processes in Population Genetics Theory.* Indiana University Mathematics Journal, Vol. 28, No. 5.

[26] Gorostiza, L. G., (2000) *Ramificación y Superprocesos*; Departamento de Matemáticas, CINVESTAV.

[27] Gorostiza, L. G., Wakolbinger, A. (1991) *Persistence criteria for a class of critical branching particle systems in continuous time.* Ann. Probab. 19, 266-288.

[28] Gorostiza, L. G., Wakolbinger, A.(1992) *Convergence to Equilibrium of Critical Branching Particle Systems and Superprocesses, and Related Nonlinear Partial Differential Equations* Acta Applicandae Mathematicae 27: 269-291.

[29] Gorostiza, L. G., Roelly, S. y Wakolbinger, A. (1992) *Persistence of critical multitype particle and measure branching processes.* Probab. Theory Relat. Fields 92, 313-335.

[30] Henry, D. (1944) *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Springer, Berlin, Lecture Notes in Mathematics.

[31] Ikeda, N.; Nagasawa, M; Watanabe, S. *Branching Markov Processes I.* J. Math. Kyoto Univ. 8-2 (1968) 233-278.

[32] Iscoe, I. (1986) *A Weighted Occupation Time for a Class of Measured-Valued Branching Processes* Probab. Th. Rel. Fields 71, pp. 85-116.

[33] Janicki, A., Weron A. (1994) *Simulation and chaotic behavior of α-estable stochastic processes* A series of Monographs and Textbooks.

[34] Jaggers, P. (1971) *Aspects of Random Measures and Point Processes*, Gothenburg University.

[35] Jirina, M. (1964) *Branching processes with measure-valued states.* Trans. Third Prague Conf. Information Theory, Statist. Decisión Functions, Random Processes 333-357. publ. House Czech. Acad. Sci., Prague.

[36] Joffe, A., Ney, P. (1978) *Branching Processes*, Advances in probability and related topics; v. 5 . New York: Marcel Dekker

[37] Kallenberg, O. (1983) *Random Measures*, Akademie-Verlag and Academic Press, Berlin and London.

[38] Kallenberg, Olav (1986) *Random Measures*, 4th ed. (187 pp). Akademie-Verlag and Academic Press, Berlin and London.

[39] Karatzas, I. y Shreve, S. E (1991) *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Volume 113 in the series "Graduate Texts in Mathematics", SpringerVerlag, New York, Heidelberg & Berlin.

[40] Kurtz, Thomas G. (1981) *Approximation of population processes*, volume 36 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pa.,

[41] Le Gall, Jean-François *Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations.* Lectures in Mathematics ETH Zürich.

[42] Li Z. (2010) *Measure-Valued Branching Markov Processes* Springer, Berlin.

[43] Moyal, J.E. (1957) *Discontinuous Markoff Processes* Acta. Math., 98, pp. 221-264.

[44] Moyal, J.E. (1962) *The general theory of stochastic population processes.* Acta Math., Stockh. 108, 1-31.

[45] Moyal, J.E. (1964) *Multiplicative Population Processes.* J. Appl. Prob. 1, 267-283.

[46] Pazy, A. (1983). Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, Berlin.

[47] Pollard, D. (1977) *Induced Weak Convergence and Random Measures* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 37, pp. 321-328.

[48] Resnick, Sidney I. *A probability Path*, Birkhäuser, Boston 1999

[49] Roelly-Copolleta, S. (1986) *A criterion of convergece of Measure-Valued Processes: Application to Measure Branching Processes*, Stochastics 17, 43-65.

[50] Strock, D. W. , Varadhan, S. R. S. (1969) *Diffusion processes with continuous coefficients I* Comunications on pure and applied mathematics,vol. XXII, 345-400.

[51] Strock, D. W. , Varadhan, S. R. S. (1969) *Diffusion processes with continuous coefficients II* Comunications on pure and applied mathematics,vol. XXII, 479-530.

[52] Strock, D. W. , Varadhan, S. R. S. (1972) *Diffusion Processes* Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob., Vol 3 (Univ. of Calif. Press), 361-368.

[53] Watanabe, S. (1968) *A limit theorem of branching processes and continuous state branching processes*, J. Math. Kyoto Univ. 8 141-167.

[54] Yong-Jin Wang (1997) *A proof of the persistence criterion for a class of superprocesses*, J. Appl. Prob. 34, 559-563.

[55] Yong-Jin Wang (1998) *Criterion on the limits of superprocesses*, Science in China (Serie A), Vol. 41, No. 8.

Índice Analítico