



Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

Diseño Robusto en Sistemas de Control

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Especialidad en

Probabilidad y Estadística

P r e s e n t a

Francisco Manuel Rodríguez

Huerta

Director de Tesis:

Dr. Jorge Domínguez Y Domínguez

Guanajuato, Gto.. Septiembre de 2012



Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

Diseño Robusto en Sistemas de Control

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Especialidad en

Probabilidad y Estadística

P r e s e n t a

Francisco Manuel Rodríguez Huerta

Miembros del jurado:

Dr. Rogelio Ramos Quiroga

Presidente

Dr. Román de la Vara Salazar

Secretario

Dr. Jorge Domínguez Y Domínguez

Vocal

Guanajuato, Gto.. Septiembre de 2012

Índice

1. Introducción	1
1.1. Diseño de experimentos	1
1.2. Diseño robusto de parámetros	1
1.3. Teoría de control	1
1.4. Objetivos planteados	1
1.5. Estructura de la tesis	2
2. Conceptos Básicos y Diseño Robusto	3
2.1. Calidad	3
2.2. Costos	3
2.3. Función de pérdida de calidad	3
2.3.1. La falacia de la fracción defectuosa	4
2.3.2. Función de pérdida cuadrática y sus variaciones	4
2.4. Diseños experimentales	4
2.4.1. Diseño factorial 2^k	5
2.4.2. Diseño factorial fraccionado 2^{k-p}	8
2.4.3. Diseño factorial completo y factorial fraccionado de tres niveles	11
2.5. Diseño robusto de parámetro	13
2.5.1. Principio fundamental	13
2.5.2. Herramientas usadas en diseño robusto	14
2.5.3. Factores de ruido - Causas de variación	14
2.5.4. Clasificación de factores	14
2.5.5. Explotando la no linealidad	15
2.5.6. Optimización del diseño de producto y proceso	16
2.5.7. El rol de varias actividades de control de calidad	17
2.5.8. Estrategias de experimentación y modelado	17
2.5.9. Razón señal a ruido	19
2.6. Diseño robusto de parámetro para sistemas señal-respuesta	22
2.6.1. Sistemas de señal-respuesta y su clasificación	22
2.6.2. Medidas de desempeño para la optimización de diseño de parámetro	24
2.6.3. Estrategias de modelado y análisis	24
2.7. Definición de los sistemas de control	25
2.8. Ejemplos de sistemas de control	26
3. Diseño Robusto de Parámetros con Control Feed-Forward	28
3.1. Sistemas de medición	28
3.1.1. Sin control	28
3.1.2. Con control	30
3.1.3. Diseño de experimentos	32
3.1.4. Estimación	33
3.2. Sistemas de respuesta simple	34
3.3. Sistemas de objetivos múltiples	39
4. Ejemplos	42
4.1. Un experimento de moldeo por inyección	42
4.1.1. Análisis PMM	48
4.1.2. Análisis RFM	48
4.2. Proceso de chapado de oro	52
5. Resultados y conclusiones	60
6. Apéndice	62

Agradecimientos

Al Dr. Jorge Domínguez, que aceptó ser mi asesor de tesis y proporcionó el tema que se desarrollo en esta tesina.

A los Drs, Rogelio Ramos y Román de la Vara, que aceptaron ser mi sinodales y revisar el trabajo que realicé durante el último semestre de la maestría.

A mis padres que han sido un gran apoyo durante toda mi vida, y que siempre han apoyado las decisiones que he tomado.

A los profesores que han estado involucrados en mi crecimiento académico durante el transcurso de la maestría.

A los compañeros y amigos que con los que he compartido mi estancia en la escuela y en Guanajuato.

A CONACYT que me brindo apoyo económico para poder realizar mis estudios de maestría.

A CIMAT por darme la oportunidad de realizar una maestría y también me brindó apoyo para terminar mis estudios.

Resumen

Esta tesis aborda un tema de interés actual en el área de diseño robusto, en el cual se fusionan el diseño robusto de parámetros y la estrategia de control Feed-Forward. La importancia de estudiar este tema es que se tienen dos etapas para hacer el proceso insensible a distintos factores de ruido. Una de ellas es el uso del diseño robusto, el cual consiste en hacer un proceso lo más robusto posible, con la primicia de que no incrementa los costos de producción. Debido a que en ocasiones el diseño robusto por sí solo no es capaz de reducir factores de ruido que son muy fuertes, es inevitable usar un sistema de control para compensar esos efectos de ruido. Entonces, otra etapa es el uso de una ley de control. El aplicar una ley de control genera costos, y es por esto que usar solamente la ley de control sin investigar las oportunidades de robustez puede ser muy costoso. Por lo tanto la estrategia antes mencionada es una buena estrategia para tener un equilibrio entre costos y eficiencia. Un ejemplo para ver la importancia de este tema de estudio es el siguiente:

En Taguchi et al. (2000, cap. 4) se reportó el estudio sobre la mejora de la precisión de un sensor de oxígeno desechable utilizado para la cirugía a corazón abierto. El sensor es usado para medir la concentración de oxígeno en la sangre. Existen distintos factores de control y distintos factores de ruido. Entre los factores de ruido; la temperatura sanguínea es uno de ellos, pues varía de operación a operación. Es posible medir continuamente la temperatura sanguínea y dar una corrección Feed-Forward usando un algoritmo en el software de monitoreo. Este experimento es diferente del usual diseño de experimentos de parámetro robusto, porque no se hace el esfuerzo por desensibilizar el efecto de la temperatura sanguínea sobre las mediciones. El objetivo es: **establecer los niveles de los factores de control tal que la medición de la concentración de oxígeno sea robusta al ruido** (diseño robusto), después de haber **compensado por el efecto de la temperatura sanguínea** (control Feed-Forward).

El primer paso para desarrollar este tema es estudiar los diseños experimentales, ya que son de gran utilidad para identificar la relación que existe entre los factores que intervienen en el sistema o proceso con las características resultantes de dicho sistema o proceso. También es posible identificar si existen interacciones de los factores que afectan las características resultantes. En el diseño robusto, las interacciones entre factores de control y factores de ruido son muy importantes, debido a que a partir de ellas se podrían controlar los factores de ruido. Los diseños experimentales que serán de interés son los que tienen la propiedad de ser diseños ortogonales. En este trabajo se presentan a manera de resumen los diseños 2^k , 2^{k-p} , 3^k , y 3^{k-p} , los cuales tienen la propiedad de ser diseños ortogonales.

El diseño robusto es muy importante en lo referente a la ingeniería en general, pues su objetivo principal es diseñar un sistema o proceso tal que su desempeño sea insensible a variables no controlables (factores de ruido). Para lograr esto, se tiene la tarea de identificar los factores de ruido que afectan a dicho sistema o proceso. Luego de haber identificado factores de control y factores de ruido, es muy útil identificar un diseño experimental que incorpore ambos tipos de factores y que además permita identificar los factores de ruido a manera que puedan ser controlados a partir de los factores de control. Es por esto que las interacciones entre factores de ruido y factores de control son muy importantes, pues permiten reducir el ruido manipulando los factores de control. Un ejemplo claro de ver esto es el siguiente: sea y la respuesta al tiempo t del modelo

$$y_t = 5 + 3x_1 - q_t - 0,5r_t + x_2r_t + \varepsilon_t, \quad (1)$$

donde (x_1, x_2) son factores de control, (q, r) son factores de ruido y ε es un error aleatorio causado por otros factores de ruido. Para tener un valor objetivo igual a 5, la solución del diseño robusto sería $x_1 = 0$ y $x_2 = 0,5$. Esto permite eliminar la variación causada por el factor de ruido r .

De la ecuación (1) y de la solución del diseño robusto, se observa que el factor de ruido q no ha sido reducido o eliminado. En este caso, es inevitable el uso de una estrategia de control que pueda compensar el efecto causado por q . En este caso, la estrategia de control es hacer $x_{1t} = \frac{1}{3}q_t$, con lo que se elimina la variación causada por el factor q . Existen distintas estrategias de control para compensar efectos de ruido como lo son: Feedback y Feed-Forward. En este trabajo se considerará la estrategia de control Feed-Forward, en la cual, se considera que uno a varios factores de ruido son medibles durante el proceso y uno o varios factores de control son ajustables durante el proceso dependiendo de la medición de los factores de ruido.

Supóngase que para el modelo (1) se tiene que $var(\varepsilon) = (1 + x_1x_2)^2$, entonces la estrategia entre el diseño robusto y la ley de control no funcionará bien. Esto se debe a la dependencia del diseño robusto con la ley de control y viceversa. En tales casos, la metodología no puede ser disociada en dos etapas y llegar a la solución óptima.

Para ilustrar la teoría estudiada, se presentan dos ejemplos. El primer ejemplo es un experimento de moldeo por inyección, al cual se aplica la teoría del diseño robusto de parámetros en sistemas medición. Hay dos tipos de estrategias de análisis y modelado que se plantean en este trabajo, en donde la primera se enfoca en la medida de desempeño y la segunda en la función de respuesta. A partir de los resultados obtenidos de realizar ambos análisis, se identifican las ventajas y desventajas que existen entre las dos estrategias de análisis y modelado. El segundo ejemplo es un proceso de chapado de oro, el cual es un problema de respuesta simple y nuevamente se aplica el diseño robusto de parámetros, donde se incluye un sistema de control Feed-Forward para compensar la variación identificada. Los resultados obtenidos de estos ejemplos muestran claramente el objetivo del diseño robusto de parámetros y la inclusión de una estrategia de control Feed-Forward.

1. Introducción

1.1. Diseño de experimentos

En todo proceso a realizar, es necesario identificar los factores que serán manipulados para llevar a cabo dicho proceso (se usará solamente proceso para hacer referencia a sistema o proceso). También es necesario identificar cuál o cuáles son las características de interés de dicho proceso, las cuales serán llamadas respuestas. Una vez identificados los factores y las respuestas, se determinan los posibles niveles para los factores y se determina el tipo de respuesta que es de interés.

Como primer paso en el estudio a realizar, es necesario indagar en la teoría de los diseños de experimentos. Esto será útil para definir las configuraciones de los niveles de los factores, llamadas tratamientos, que proporcionan los mejores resultados para la respuesta de interés. Pero para poder encontrar el mejor tratamiento, es necesario identificar qué tipo de factores se tienen, los niveles de cada factor y la cantidad de factores, ya que esta información será de utilidad para seleccionar el diseño experimental más adecuado.

1.2. Diseño robusto de parámetros

Existen varios enfoques para estudiar la variación y a partir de esto llevar a cabo las estrategias para mejorar la calidad de productos y procesos. Entre estos, un enfoque particular que es rentable es el diseño robusto introducido por Taguchi. El objetivo principal de un diseño robusto es hacer que un proceso sea insensible a los factores de ruido. Un primer paso para lograr esto, es identificar factores de control y factores de ruido que estén involucrados en el proceso. Luego, el diseño robusto de parámetros intenta hacer los procesos insensibles al ruido a través de la elección apropiada de los niveles para los factores de control. El diseño robusto de parámetros ha sido reconocido como una herramienta importante para la mejora de calidad, que por lo general es una herramienta que no incrementa los costos al elegir los niveles adecuados de los factores de control.

El diseño robusto de parámetros puede ser bien aplicado a los sistemas señal-respuesta (sistemas con característica dinámica). Esto se debe a que, además de la relación de un factor señal y la respuesta, el proceso depende tanto de factores de control como de factores de ruido.

1.3. Teoría de control

El objetivo usual de la teoría de control es calcular las soluciones para la acción correctiva adecuada desde el controlador que resultan en la estabilidad del sistema, es decir, que el sistema se mantenga en el punto de ajuste y no oscilar alrededor de él.

Un sistema de control puede ser pensado como un conjunto de cuatro funciones: medir, comparar, calcular y corregir.

Dentro del diseño robusto se plantea el diseño de parámetros en sistemas de control. En este caso se plantea una estrategia a partir del sistema de control para construir una herramienta de medición para identificar qué factores son significativos, además de considerar un mecanismo para evaluar la mejora de los procesos. Hay dos tipos de control usados en conjunción con el diseño robusto, que son: control Feedback y control Feed-Forward. En el caso de estudio, se estudiará el control Feed-Forward.

1.4. Objetivos planteados

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar de manera detallada el diseño robusto de parámetros con control Feed-Forward (ver referencia [1]). En este documento de estudio, el diseño robusto se enfoca en los sistemas señal-respuesta que abarca: sistemas de medición, sistemas de respuesta simple y sistemas de objetivos múltiples. Una parte del desarrollo de este documento implica el desarrollo matemático del procedimiento para obtener la media y la varianza que se presenta.

Se tienen objetivos computacionales, los cuales incluyen programación para optimizar y para simular. En la parte de optimización se desarrollarán los algoritmos mostrados en el documento de estudio para obtener la

mejor configuración de los factores. La parte de simulación servirá para validar la aplicación de la metodología del diseño robusto en sistemas de control.

El lenguaje de programación para realizar optimizaciones y simulaciones es R. Este lenguaje también permite hacer todo un análisis completo de los ejemplos que se tomarán para aplicar la metodología estudiada. Los ejemplos también servirán para verificar que los métodos de optimización desarrollados funcionen adecuadamente.

Generar conocimiento en el área de diseño robusto y sistemas de control, es interesante por ser una herramienta que mejora la calidad manteniendo los costos bajos.

1.5. Estructura de la tesis

El segundo capítulo de esta tesis se encarga de reunir los elementos base para entender y desarrollar detalladamente el documento de estudio. Estos elementos básicos incluyen la definición y explicación de conceptos como calidad y costo. Se muestra un estudio un poco más detallado de los diseños experimentales, diseño robusto y sistemas de control. En lo referente al diseño robusto, se presentan dos secciones. La sección 2.5 se enfoca en presentar los conceptos básicos y mostrar las estrategias de experimentación y modelado. En la sección 2.6 se establece el diseño robusto para los sistemas señal-respuesta, donde se describen los sistemas de medición, sistemas de respuesta simple y sistemas de objetivos múltiples. Posteriormente, se presentan las medidas de desempeño que son utilizadas para llevar a cabo la optimización del diseño de parámetros. También se muestran algunas de las estrategias de modelado y análisis para el diseño de parámetros.

El tercer capítulo está dedicado a incluir la característica de control Feed-Forward en el diseño robusto de parámetros, lo cual es el tema principal de esta tesis. La característica de control se introduce en los sistemas señal-respuesta, y para cada uno de ellos, se determina una medida de desempeño adecuada.

Una vez estudiada y entendida la teoría, se procede a aplicar estos conocimientos en distintos ejemplos. En el capítulo 4 se desarrollan detalladamente dos ejemplos. El primero corresponde a un experimento de moldeo por inyección, en el cual se desarrolla la teoría mostrada en la sección 2.5. Para este ejemplo se aplica el modelado de medida de desempeño (PMM) y el modelado de la función respuesta (RFM). Esto será de utilidad para identificar ventajas y desventajas de ambas estrategias de modelado, y por último dar una posible solución al experimento. El segundo ejemplo involucra un proceso de chapado de oro, en el cual se puede aplicar la característica de control Feed-Forward y desarrollar la teoría del capítulo 3. Para este ejemplo, se aplica únicamente el modelado de la función respuesta, se muestran los gráficos que se describen y se aplica una ley de control como se menciona en el capítulo 3. También se observa la diferencia entre usar y no usar una ley de control.

Por último se presentan los resultados y conclusiones a las que se llega después de haber estudiado y aplicado la teoría del diseño robusto. En especial los resultados obtenidos en el capítulo 3, donde se establecen las medidas de desempeño (PM) sobre las cuales se hace la optimización. Para esto se ha usado la metodología de la esperanza y varianza condicional, y en el caso de los sistemas de medición se construye de manera natural la razón señal a ruido propuesta por Taguchi. El punto es que la razón señal a ruido así construida, tiene un fundamento matemático que surge del modelo que hay detrás del sistema de medición. Para los otros casos de estudio del capítulo 3, la medida de desempeño se obtiene a partir de la función de pérdida cuadrática. Estos resultados permiten tener una generalización del diseño robusto de parámetros. Como se verá descrito a lo largo del capítulo 3.

2. Conceptos Básicos y Diseño Robusto

En este capítulo se recolecta y presentan a manera de resumen los conceptos base para tener conocimiento de los temas: diseño de experimentos, diseño robusto y sistemas de control. El conocer estos temas, generará conocimiento para comprender el documento de estudio, el cual conjunta estos temas para obtener una herramienta más efectiva para disminuir los efectos causados por variables no controladas.

2.1. Calidad

Todo proceso está diseñado para proporcionar un producto o servicio, y es indispensable que dicho producto o servicio reúna ciertas características, y una de ellas es la calidad. Pero ¿qué es la calidad?. La palabra calidad tiene diferentes significados para diferentes personas, y es necesario proporcionar una definición para fines de este trabajo. Primero, definir el significado de *la calidad ideal* que puede servir como un punto de referencia para medir el *nivel de calidad* de un producto. La calidad ideal que un consumidor puede esperar es que cada producto entregue el desempeño adecuado cada vez que el producto es usado, bajo todas las condiciones de funcionamiento previstas, y a través de su vida prevista, sin efectos secundarios dañinos. Nótese que los conceptos de confiabilidad y confianza son parte de esta definición de calidad. En situaciones específicas, puede ser imposible producir un producto con la calidad ideal. Siguiendo a Taguchi, *la calidad de un producto será medida en términos de la pérdida total para la sociedad debido a la variación funcional y efectos secundarios dañinos.*

2.2. Costos

Otra característica que se presenta en los procesos es el costo, pues cuando se desea tener buena calidad, se tiene un costo asociado. Por lo general, se quiere la entrega de un producto de alta calidad a un bajo costo, lo cual es un problema interdisciplinario que abarca ingeniería, economía, estadística y administración. Las tres categorías del costo que deben considerarse en la entrega de un producto son:

1. *Costo de operación.*

Consiste en el costo de la energía necesaria para operar el producto, control del medio ambiente, mantenimiento, inventario de repuestos y unidades, etcétera.

2. *Costo de fabricación.*

Elementos importantes del costo de fabricación son equipamiento, maquinaria, materias primas, mano de obra, desechos, etcétera.

3. *Costo de investigación y desarrollo.*

El tiempo que toma el desarrollar un nuevo producto más el aporte de los recursos de ingeniería y laboratorio que necesita son los principales elementos del costo de investigación y desarrollo.

2.3. Función de pérdida de calidad

Los conceptos de calidad y costo son muy importantes, pues la ingeniería de calidad se enfoca en reducir tanto la pérdida de calidad, como el costo incurrido después de la venta del producto, y el costo de manufactura por unidad. Para reducir la pérdida de calidad, se hace uso de una función que mida la pérdida de calidad. Entonces, el objetivo será minimizar esta función de pérdida. Primero se habla de la falacia acerca de una medida para la pérdida de calidad, y después se muestra otra medida para la pérdida de calidad que es de gran uso.

2.3.1. La falacia de la fracción defectuosa

La fracción de defectuosos es a menudo una medida incompleta y engañosa de la calidad. Esta medida sugiere que todos los productos que se encuentran dentro de los límites de especificación son igual de buenos, mientras que aquellos que están fuera de los límites de especificación son malos. Sin embargo, en la práctica la calidad se vuelve progresivamente peor cuando la respuesta del producto se desvía del valor objetivo.

2.3.2. Función de pérdida cuadrática y sus variaciones

La función de pérdida cuadrática es una función simple y significativa para aproximar la pérdida de calidad en la mayoría de situaciones. Las tres variaciones más comunes de la función de pérdida cuadrática son:

1. *Lo nominal es mejor:*

$$L(y) = \frac{A_0}{\Delta_0^2}(y - m)^2.$$

2. *Lo más pequeño es mejor:*

$$L(y) = \frac{A_0}{\Delta_0^2}y^2.$$

3. *Lo más grande es mejor:*

$$L(y) = A_0\Delta_0^2\left(\frac{1}{y}\right)^2.$$

En las formulas anteriores, Δ_0 es el límite funcional y A_0 es la pérdida incurrida en el límite funcional. Los valores objetivos de las respuestas para los tres casos son m , 0 y ∞ , respectivamente.

2.4. Diseños experimentales

El diseño experimental es un conjunto de conocimientos y técnicas que conducen a los mejores experimentos, la eficiencia en el análisis de los datos, y hacer las conexiones entre las conclusiones y los objetivos originales de la investigación. La experimentación se realiza para entender y/o mejorar un proceso.

La Figura 2.1 se muestra un diagrama donde los factores de control X son la información de entrada de un proceso, y como resultado del proceso se obtiene el valor Y . Esta sección está enfocada en mostrar los diseños factoriales 2^k , 2^{k-p} , 3^k y 3^{k-p} , que son diseños con la propiedad de ser ortogonales. Que al aplicarlos o realizarlos buscan obtener una o varias respuestas apropiadas para el proceso.

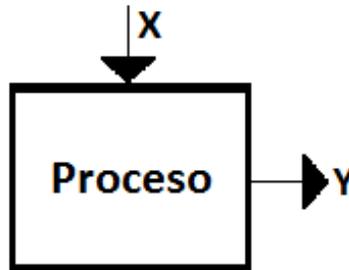


Figura 2.1: Factores de control X y variable de respuesta Y de un proceso.

2.4.1. Diseño factorial 2^k

Considérese una clase de diseño en la que se tienen k factores con dos niveles cada uno. Dado que esta clase de diseños requiere de $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^k$ observaciones, se hace referencia a ellos como diseños factoriales 2^k . Siendo que cada factor solo tiene dos niveles, ellos serán usados para estudiar el efecto lineal de la respuesta sobre el rango de los niveles elegidos de los factores. También se definirán los efectos factoriales, que incluyen efectos principales y efectos de interacción de diferente orden.

El problema lo nominal es mejor y la función de pérdida cuadrática Cuando en los requerimientos del diseño de ingeniería se establece un valor nominal u objetivo, se hace referencia al problema de que lo nominal es mejor. Primero, se debe definir una medida cuantitativa de pérdida ocasionada por la desviación del valor nominal. Supóngase que y es una variable aleatoria que representa la respuesta o característica de calidad del experimento, y t denota el valor del objetivo deseado. Es conveniente medir la pérdida de calidad de la desviación que hay entre y y t usando la función de pérdida cuadrática

$$L(y, t) = c(y - t)^2,$$

donde la constante c es determinada por otras consideraciones tales como el costo o pérdida financiera. La pérdida esperada $E[L(y, t)]$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} E[L(y, t)] &= E[c(y - t)^2] \\ &= cE[(y - E(y) + E(y) - t)^2] \\ &= cE[(y - E(y))^2 + 2(y - E(y))(E(y) - t) + (E(y) - t)^2] \\ &= cE[(y - E(y))^2] + 2cE[(y - E(y))(E(y) - t)] + cE[(E(y) - t)^2] \\ &= cVar(y) + 2c(E(y) - E(y))(E(y) - t) + c(E(y) - t)^2 \\ &= cVar(y) + c(E(y) - t)^2, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $E(y)$ y $Var(y)$ son la media y la varianza de y respectivamente. De (2), la pérdida esperada puede ser minimizada o reducida seleccionando los niveles de algunos factores que minimicen la varianza $Var(y)$ y otros factores que muevan la media $E(y)$ más cerca del valor objetivo t . A menudo, los dos grupos de factores asociados con minimizar $Var(y)$ y mover $E(y)$ son mutuamente excluyentes. En esta situación la selección de los niveles puede hacerse usando el siguiente procedimiento:

Procedimiento de dos pasos para el problema de lo nominal es mejor

- (i) *Seleccionar los niveles de algunos factores que minimicen $Var(y)$.*
- (ii) *Seleccionar el nivel de un factor que no esté en (i) que mueva $E(y)$ más cerca de t .*

Un factor en el paso (ii) es llamado **factor de ajuste** si este tiene un efecto significativo en la media $E(y)$ pero no en la varianza $Var(y)$. La existencia de un factor de ajuste hace posible el uso del procedimiento de dos pasos para minimizar la pérdida cuadrática. De otra forma, tanto la media como la varianza cambiarán cuando se ajuste el nivel del factor en el paso (ii), que a su vez puede requerir que el nivel del factor identificado en el paso (i) sea cambiado nuevamente con el fin de reducir la varianza; en este caso, varias iteraciones entre los pasos (i) y (ii) pueden ser necesarias. Por lo tanto, es claro que sin la existencia de un factor de ajuste, el procedimiento de dos pasos no sería efectivo.

La principal ventaja técnica para emplear la función de pérdida cuadrática es la descomposición (2), que permite realizar fácilmente la optimización del diseño en dos pasos. La función de pérdida cuadrática es muy usada por el hecho de que a menudo provee una aproximación razonable a la pérdida de calidad real. El paso (ii) del procedimiento de dos pasos en (3) es más fácil de implementar, y a menudo se puede usar conocimiento físico o análisis de datos para identificar un factor de ajuste que tenga gran influencia sobre $E(y)$.

Los problemas de “lo más grande es mejor” y “lo más pequeño es mejor” Cuando no se tiene un valor nominal u objetivo y lo que se desea es maximizar o minimizar la respuesta, se tienen los problemas de “lo más grande es mejor” y “lo más pequeño es mejor” respectivamente. A diferencia del procedimiento de dos pasos en (3), en el problema de lo más grande es mejor, usualmente es difícil encontrar un factor que pueda incrementar fácilmente $E(y)$. Si tal factor se pudiera identificar inmediatamente, sería usado por el diseñador para resolver el problema. En tal caso, no habría la necesidad de realizar estadísticamente un diseño experimental. Debido a que incrementar el valor de la media es considerado una tarea más difícil que minimizar la varianza, el primer paso debe ser incrementar el valor de la media. Por lo tanto, la recomendación es invertir el orden del procedimiento de dos pasos en (3) para el problema de lo más grande es mejor.

Procedimiento de dos pasos para el problema de lo más grande es mejor

- (i) Encontrar la configuración de factores que maximicen $E(y)$. (4)
- (ii) Encontrar la otra configuración de factores que minimicen $Var(y)$.

El razonamiento para el problema de lo más pequeño es mejor es similar al de lo más grande es mejor, por lo tanto, el procedimiento de dos pasos es idéntico al anterior:

Procedimiento de dos pasos para el problema de lo más pequeño es mejor

- (i) Encontrar la configuración de factores que minimicen $E(y)$. (5)
- (ii) Encontrar la otra configuración de factores que minimicen $Var(y)$.

En el caso de lo más pequeño es mejor, el cero puede ser considerado como el valor objetivo. Por lo tanto, se considera el problema de minimizar $\sum_i (y_i - 0)^2 = \sum_i y_i^2$, esto es, modelar $\sum_i y_i^2$ como una función de los factores y encontrar la configuración de los factores que minimizan $\sum_i y_i^2$.

Para que cualquiera de los procedimientos de dos pasos sea efectivo, el factor empleado en el paso (ii) debe tener un efecto significativo sobre la característica considerada en el paso (ii) pero no en la característica considerada en el paso (i). Sin embargo, estos requisitos pueden no cumplirse en algunos experimentos. En estas situaciones, una alternativa es analizar \bar{y} y $\ln s^2$ por separado e identificar efectos significativos y la configuración de factores óptima para considerar conjuntamente sus efectos sobre las características a ser optimizadas.

Discusión general del diseño factorial de dos niveles El diseño factorial 2^k consiste de todas las 2^k combinaciones de los k factores que toman dos niveles. Cada combinación de los niveles de los factores es llamada tratamiento. A un tratamiento también se le hace referencia como una corrida. Para cada factor cuantitativo se denotará el nivel bajo con $-$ y el nivel alto con $+$. Cuando se trata de factores cualitativos no importa el orden.

Para llevar a cabo el experimento, una matriz de planeación debe ser usada para mostrar el diseño experimental en términos de los niveles actuales de los factores. Esta matriz de planeación evita cualquier confusión o malentendido en los factores experimentales y de los niveles que deben ser ajustados para cada corrida experimental.

Una variable es llamada *variable al acecho* si sus valores cambian durante el experimento y tiene un efecto significativo en la respuesta, pero no es identificado por el experimentador como potencialmente importante y por lo tanto no es incluida en la matriz de planeación.

Dependiendo del experimento, puede haber factores en los cuales el cambio de un nivel a otro es difícil debido a distintas razones. Por ejemplo, la temperatura en un horno puede ser un factor que no se puede cambiar más de una vez al día debido a un largo tiempo de estabilización. Aún así, se puede llevar a cabo la aleatorización de los otros niveles de factores para cada nivel del factor de cambio difícil. A esto se hace referencia como aleatorización restringida.

Dos propiedades importantes de los diseños 2^k son: *balance* y *ortogonalidad*. El balance significa que cada nivel del factor aparece en el mismo número de corridas. Se dice que dos factores son ortogonales si todas las combinaciones de sus niveles aparecen en el mismo número de corridas. Un diseño es llamado ortogonal si todos los pares de sus factores son ortogonales.

El experimento puede ser replicado, lo cual significa que el plan experimental es llevado a cabo dos o más veces. Cada vez que el experimento es llevado a cabo, el orden de las corridas debe ser aleatorizado. A un experimento no replicado también se le dice que tiene una sola réplica. Experimentos no replicados se realizan a menudo cuando las corridas son caras. La replicación también es innecesaria para los experimentos en computadora, porque corridas repetidas en computadora con la misma entrada proporcionan el mismo resultado.

Efectos factoriales y gráficas Como resultado de un diseño 2^k , se obtienen los efectos factoriales. Los efectos factoriales son útiles para identificar el impacto que tienen los factores y las interacciones de factores en las respuestas obtenidas. Los efectos factoriales se dividen en efectos principales (factores individuales) y efectos de interacción (interacción de dos o más factores). Se tienen principios fundamentales para los efectos factoriales y también se tienen gráficos para observar el impacto de los efectos factoriales en las respuestas.

Efectos principales Para evitar confusión en las definiciones que siguen, se usará una notación genérica z_i para denotar la observación de la i -ésima corrida. Para medir el efecto promedio de un factor, por ejemplo un factor llamado A , se calcula la diferencia entre el valor promedio z_i de todas las observaciones en el experimento con el nivel alto (+) de A y el valor promedio z_i de todas las observaciones en el experimento con el nivel bajo (-) de A . A esta diferencia se le llama **efecto principal** de A . Notacionalmente, se usarán $A+$ y $A-$ para representar los niveles alto y bajo de A , respectivamente. Se considera

$$ME(A) = \bar{z}(A+) - \bar{z}(A-)$$

para representar el efecto principal de A , donde $\bar{z}(A+)$ es el promedio de los valores observados z_i en $A+$ y $\bar{z}(A-)$ es el promedio de los valores observados z_i en $A-$.

Debido a la simetría y ortogonalidad de los diseños 2^k , $\bar{z}(A+)$ y $\bar{z}(A-)$ se calculan sobre todas las combinaciones de niveles de los otros factores. Esta propiedad permite que los efectos principales tengan una interpretación científica relevante más allá del experimento actual. Esto es, un efecto significativo del factor A es probable que se mantenga en otros experimentos o investigaciones que involucran a los mismos factores y rangos de niveles. Las gráficas de efectos principales muestran los valores de \bar{z} para cada uno de los factores, y sirve como herramienta visual para determinar factores significativos.

Efectos de interacción Para medir el efecto conjunto de dos factores, llamados A y B , el efecto de interacción $A \times B$ puede definirse en tres formas equivalentes:

$$\begin{aligned} INT(A, B) &= \frac{1}{2} \{ \bar{z}(B+ | A+) - \bar{z}(B- | A+) \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ \bar{z}(B+ | A-) - \bar{z}(B- | A-) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \bar{z}(A+ | B+) - \bar{z}(A- | B+) \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ \bar{z}(A+ | B-) - \bar{z}(A- | B-) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \bar{z}(A+ | B+) + \bar{z}(A- | B-) \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ \bar{z}(A+ | B-) + \bar{z}(A- | B+) \}, \end{aligned}$$

donde $\bar{z}(A+ | B+)$ denota el promedio de los valores z_i de A y B en sus niveles +. Sea

$$ME(B|A+) = \bar{z}(B+ | A+) - \bar{z}(B- | A+)$$

el efecto principal condicional de B dado el nivel + de A , entonces se puede escribir la interacción como

$$\begin{aligned} INT(A, B) &= \frac{1}{2} \{ ME(B|A+) - ME(B|A-) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ ME(A|B+) - ME(A|B-) \}. \end{aligned}$$

Un efecto de interacción grande, indica una gran diferencia entre $ME(B|A+)$ y $ME(B|A-)$ o entre $ME(A|B+)$ y $ME(A|B-)$; es decir, el efecto de un factor depende del nivel del otro factor, lo cual explica el uso del término “interacción”. Las gráficas de efectos de interacción muestran los valores de \bar{z} para las cuatro combinaciones de las interacciones de los dos factores, y sirve como herramienta visual para determinar interacciones significativas.

Si existe más de dos factores, pueden existir interacciones de orden mayor, las cuales pueden calcularse de manera similar a la interacción de dos factores.

Principios fundamentales para efectos factoriales Los siguientes principios son importantes para tener un mejor conocimiento acerca de la importancia de los distintos efectos factoriales.

- **Principio de ordenamiento jerárquico**

- (i) Efectos de orden bajo tienen mayor probabilidad de ser importantes que los efectos de orden alto.
- (ii) Efectos del mismo orden tienen probabilidades semejantes de ser importantes.

- **Principio de escasez de efectos**

El número de efectos relativamente importantes en un experimento factorial es pequeño.

- **Principio del efecto de herencia**

Con el fin de que una interacción sea significativa, al menos uno de sus factores padre debe ser significativo.

Gráficas Normal y Semi-Normal Hay varios métodos para identificar qué efectos factoriales son significativos, uno de ellos es por medio de las gráficas “Normal” y “Semi-Normal”.

Supóngase que los efectos factoriales estimados son $\hat{\theta}_i$, y que $\theta_{(1)} \leq \dots \leq \theta_{(I)}$ son los valores ordenados de los I efectos factoriales estimados. Entonces, la gráfica de probabilidad Normal corresponde a la gráfica de las coordenadas $(\hat{\theta}_{(i)}, \Phi^{-1}([i - 0,5]/I))$, $i = 1, 2, \dots, I$. La interpretación de esta gráfica se da de la siguiente forma. Se supone que los efectos estimados siguen una distribución normal con media igual a los efectos. Bajo la hipótesis nula de que todos los efectos son cero, las medias de todos los efectos estimados son cero. Entonces, los efectos estimados deben estar cerca de la línea recta igual a cero. Cuando algún efecto estimado esta muy alejado de esta línea igual a cero, se considera que es un efecto significativo. Si el efecto estimado cae muy por debajo de la línea recta, se dice que es un efecto negativo, mientras que si cae muy por arriba, se dice que es un efecto positivo. Este tipo de gráfico se muestra en la Figura 2.2, donde se muestra la línea recta igual a cero y los valores estimados de los efectos factoriales.

Otro método gráfico relacionado es el de la gráfica de probabilidad Semi-Normal. En este caso se consideran los efectos factoriales estimados sin signo $|\hat{\theta}_{(i)}|$ y su ordenamiento como $|\hat{\theta}_{(1)}| \leq \dots \leq |\hat{\theta}_{(I)}|$. Siendo que el valor absoluto de una variable aleatoria normal es una variable aleatoria Semi-Normal, la gráfica de probabilidad Semi-Normal corresponde a las coordenadas $(\Phi^{-1}(0,5 + 0,5[i - 0,5]/I), |\hat{\theta}_{(i)}|)$, $i = 1, 2, \dots, I$. La interpretación de esta gráfica es similar a la de las gráficas Normales, con la diferencia de que en este caso no se sabe si los efectos son positivos o negativos. La ventaja que se tiene con esta gráfica es que evita confusiones para identificar los factores significativos. Esta ventaja se ilustrará en uno de los ejemplos que se muestran al final. La Figura 2.3 muestra el ejemplo de una gráfica Semi-Normal.

2.4.2. Diseño factorial fraccionado 2^{k-p}

Cuando el número de factores k es grande, un diseño factorial completo 2^k es raramente usado debido a que requiere de 2^k corridas. Por razones económicas, comúnmente se usa un subconjunto o fracción de un diseño factorial completo, el cual lleva por nombre diseño factorial fraccionado. Las fracciones “óptimas” se eligen de acuerdo a los criterios de *resolución* y de *mínima aberración*. Una consecuencia del uso de diseños factoriales fraccionados es la estructura alias de los efectos factoriales.

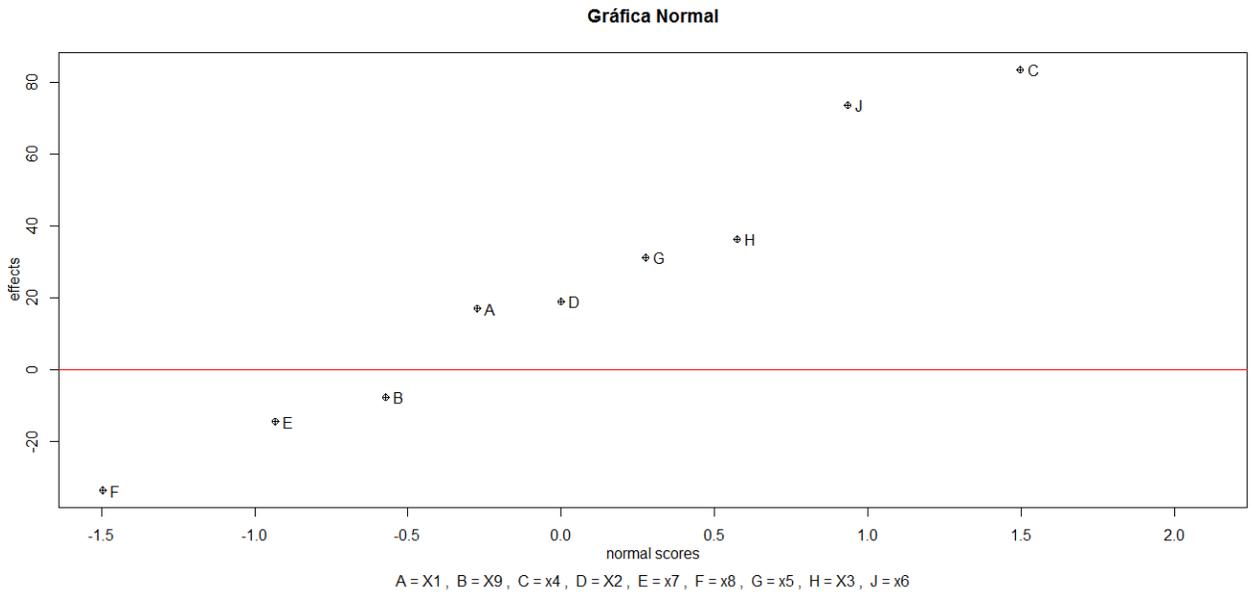


Figura 2.2: Ejemplo de gráfica Normal para los efectos principales.

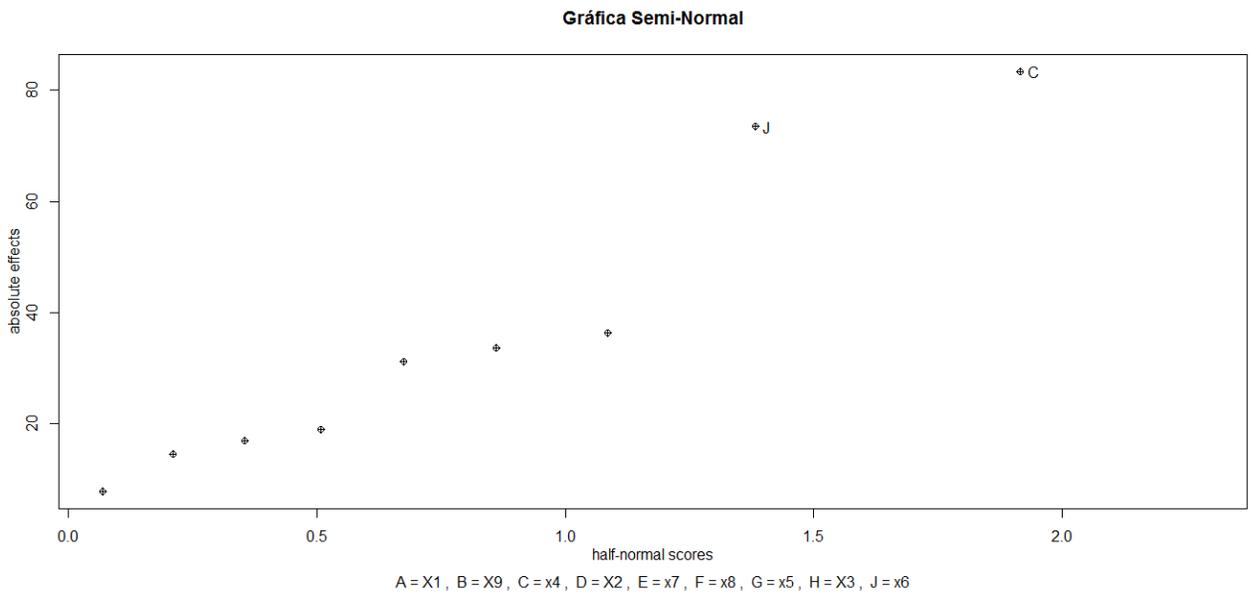


Figura 2.3: Ejemplo de gráfica Semi-Normal para los efectos principales.

Efecto alias y los criterios de resolución y mínima aberración De acuerdo con el principio de ordenamiento jerárquico, las interacciones de tres o más factores son usualmente no significativas. Por lo tanto, el uso de un diseño factorial completo es un desperdicio. Un enfoque más económico es usar una fracción del diseño factorial completo, que permita estimar los efectos de orden inferior.

Para definir lo que es la estructura alias, supóngase que se tiene un experimento con 5 factores: A , B , C , D y E . Un diseño factorial completo para estos 5 factores requeriría de 32 corridas, pero supóngase que solo se pueden estudiar 16 corridas. A este diseño con 16 corridas se le llama diseño 2^{5-1} , donde 5 denota el número de factores y 2^{-1} denota la fracción de corridas a utilizar. Un elemento clave es el cómo elegir esta fracción. Supóngase que el factor D es asignado a una columna que es igual al producto de las columnas A , B y C . En este caso, la columna para D es usada para estimar el efecto de D y también para el efecto de interacción entre A , B y C , es decir,

$$\bar{y}(D+) - \bar{y}(D-) = \bar{y}(ABC+) - \bar{y}(ABC-),$$

los datos de los cuales un diseño no es capaz de distinguir el estimador de D del estimador de ABC . Se dice que el efecto principal D tiene por alias la interacción ABC . La relación alias se denota por

$$D = ABC \text{ o } I = ABCD,$$

donde I denota la columna con todas sus entradas +; es decir, el producto de las cuatro columnas A , B , C y D es +. El efecto alias es un precio que se debe pagar por elegir un diseño más pequeño.

La ecuación $I = ABCD$ es llamada la **relación de definición** del diseño 2^{5-1} . Se dice que el diseño tiene una resolución IV porque la relación de definición consiste de la palabra $ABCD$, que tiene longitud 4. Multiplicando de ambos lados de la relación de definición por las columnas de los distintos factores, se obtienen todas las relaciones alias.

Se dirá que un efecto principal o interacción de dos factores es **claro** si ninguno de sus alias son efectos principales o interacción de dos factores y **fuertemente claro** si ninguno de sus alias es efecto principal, interacción de dos factores o interacción de tres factores.

Un plan alternativo es definir la columna E como el producto de las columnas A , B , C y D , es decir, $E = ABCD$, o equivalentemente $I = ABCDE$. El Cuadro 2.1 muestra los diseños para las dos relaciones de definición. En este caso, como la palabra $ABCDE$ en esta relación de definición tiene longitud 5, es llamado diseño de resolución V. Tradicionalmente, un diseño con mayor resolución es favorable. De la relación de definición $I = ABCDE$, cada efecto principal tiene alias con interacción de cuatro factores. Por lo tanto, los cinco factores principales son fuertemente claros. Similarmente, las diez interacciones de dos factores son claras debido a que cada una de ellas tiene alias con interacciones de tres factores. Decidir cuál de los dos planes es mejor depende de que interacciones se consideren más importantes.

Generalmente, se define un diseño 2^{k-p} como un diseño factorial fraccionado con k factores, cada uno de dos niveles, que consiste de 2^{k-p} corridas. Por lo tanto, esto es una fracción 2^{-p} del diseño factorial completo 2^k , en el cual la fracción es determinada por p palabras que definen, donde cada palabra consiste de las letras que son los nombres de los factores denotados por 1, 2, ..., k o A , B , El número de letras en una palabra es su *longitud de palabra* y el grupo formado por las p palabras que definen es llamado el **subgrupo de contraste de definición**. El grupo consiste de $2^p - 1$ palabras más la identidad I .

Un diseño 2^{k-p} puede generarse de la siguiente forma. Primero, sean 1, 2, ..., $k - p$ las $k - p$ columnas independientes de +’s y -’s (niveles de los factores) que generan las 2^{k-p} corridas en el diseño. Las p columnas restantes, $k - p + 1, \dots, k$, se pueden generar como la interacción de las primeras $k - p$ columnas. La elección de esas p columnas determina el subgrupo de contraste de definición del diseño.

Para un diseño 2^{k-p} , se A_i el número de palabras de longitud i en su subgrupo de contraste de definición. El vector

$$W = (A_3, \dots, A_k)$$

es llamado el patrón de longitud de palabra del diseño. La resolución de un diseño 2^{k-p} se define como el r más pequeño tal que $A_r \geq 1$, esto es, la longitud de la palabra más corta en el subgrupo de contraste de definición. El criterio de **máxima resolución** elige el diseño 2^{k-p} con máxima resolución. Si la resolución del diseño es R , el diseño se puede denotar por 2_{R}^{k-p} .

- Reglas para los diseños de resolución IV y V

- (i) *En cualquier diseño de resolución IV, los efectos principales son claros.*
- (ii) *En cualquier diseño de resolución V, los efectos principales son fuertemente claros y las interacciones de dos factores son claras.*
- (iii) *Entre los diseños de resolución IV con k y p dados, esos con el mayor número de interacciones de dos factores claras son los mejores.*

■ **Principio de mínima aberración**

Para cualesquiera dos diseños 2^{k-p} llamados d_1 y d_2 , sea r el entero más pequeño tal que $A_r(d_1) \neq A_r(d_2)$. Entonces, se dice que d_1 tiene *menos aberración* que d_2 si $A_r(d_1) < A_r(d_2)$. Si no hay diseño con menos aberración que d_1 , entonces d_1 tiene la mínima aberración.

$I = ABCD$					$I = ABCDE$				
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
-	+	+	-	-	-	+	+	+	-
+	+	+	+	-	+	+	+	-	-
-	-	+	+	-	-	-	+	-	-
+	-	+	-	-	+	-	+	+	-
-	+	-	+	-	-	+	-	-	-
+	+	-	-	-	+	+	-	+	-
-	-	-	-	-	-	-	-	+	-
+	-	-	+	-	+	-	-	-	-
-	+	+	-	+	-	+	+	-	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
-	-	+	+	+	-	-	+	+	+
+	-	+	-	+	+	-	+	-	+
-	+	-	+	+	-	+	-	+	+
+	+	-	-	+	+	+	-	-	+
-	-	-	-	+	-	-	-	-	+
+	-	-	+	+	+	-	-	+	+

Cuadro 2.1: Diseños para las relaciones de definición

2.4.3. Diseño factorial completo y factorial fraccionado de tres niveles

En ocasiones, hay consideraciones prácticas en las cuales es más deseable estudiar factores con más de dos niveles. En esta subsección se considerarán experimentos con factores de tres niveles. La estructura matemática de los diseños para dos niveles tiene una extensión natural a los diseños de tres factores. La principal diferencia es que cada factor de tres niveles tiene dos grados de libertad y hay dos sistemas de parametrización de los efectos de interacción en diseños de tres niveles: el *sistema de componentes ortogonales* y el *sistema lineal-cuadrático*. Los métodos de análisis inician con el uso de gráficas de efectos principales y gráficas de efectos de interacción, luego se sigue un análisis más formal como el análisis de varianza y graficas Semi-Normales.

Diseños factoriales completos 3^k Las tres razones más importantes para considerar factores de tres niveles son las siguientes:

1. Un factor cuantitativo como la temperatura puede afectar la respuesta de una manera no-monótona. Dos niveles de temperatura no permitirán detectar la relación curvilínea de la temperatura y la respuesta. Es por esto que se requieren más de dos niveles, para identificar dicha curvatura.
2. Un factor cualitativo puede tener varios niveles, tales como tres tipos de máquina que construyen una pieza, o tres proveedores del mismo componente. Si los tres tipos de máquinas se utilizan en la

producción actual, las tres deben ser comparadas en el estudio. A diferencia de la situación cuantitativa, la respuesta en un nivel del factor cualitativo puede no ser usada para inferir acerca de la respuesta en otro nivel. Por lo tanto, no pueden compararse los tres tipos de máquinas basados en un estudio de solo dos tipos de máquinas. Además, puede llevar más tiempo y ser más costoso un estudio con solo dos tipos de máquinas en un experimento de dos niveles y después agregar el tercer tipo en un experimento de seguimiento.

3. Si x_0 es la configuración nominal o actual de un producto o proceso, es común estudiar x_0 y dos configuraciones alrededor de x_0 . Esto es adecuado si la meta es mejorar el desempeño del producto o proceso con el cambio de x_0 , donde una configuración baja o alta podría identificar este potencial. Sería menor el tiempo consumido al considerar las configuraciones alta y baja en un experimento simple.

En este caso, los tres niveles de los factores se denotarán por 0, 1, y 2. Para ilustrar un poco el diseño 3^k , se consideran 3 factores A , B y C , cada uno con tres niveles. Sean x_A , x_B y x_C los niveles correspondientes a los factores A , B y C , respectivamente. La descomposición de la interacción $A \times B$ tiene dos componentes denotados por AB y AB^2 , donde AB representa los contrastes entre los valores respuesta de x_A y x_B que satisfacen

$$x_A + x_B = 0, 1, 2(\text{mod } 3),$$

y AB^2 representa los contrastes entre los valores respuesta de x_A y x_B que satisfacen

$$x_A + 2x_B = 0, 1, 2(\text{mod } 3).$$

La descomposición de la interacción $A \times B \times C$ se define de manera similar. Los cuatro componentes son ABC , ABC^2 , AB^2C y AB^2C^2 , que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_A + x_B + x_C &= 0, 1, 2(\text{mod } 3) , \\ x_A + x_B + 2x_C &= 0, 1, 2(\text{mod } 3) , \\ x_A + 2x_B + x_C &= 0, 1, 2(\text{mod } 3) , \\ x_A + 2x_B + 2x_C &= 0, 1, 2(\text{mod } 3) . \end{aligned}$$

Debido a que AB y AB^2 son componentes ortogonales de $A \times B$, y ABC , ABC^2 , AB^2C y AB^2C^2 son componentes ortogonales de $A \times B \times C$, se hace referencia a este sistema de parametrización como el **sistema de componentes ortogonales**.

En general se tienen k factores de tres niveles, y el diseño se denota por 3^k .

Diseños factoriales fraccionados 3^{k-p} Al igual que en los diseños factoriales fraccionados 2^{k-p} , la principal justificación de los diseños factoriales fraccionados 3^{k-p} es economizar en el tamaño de corridas. Y en acuerdo con el principio de ordenamiento jerárquico, habrá interacciones de orden muy grande que difícilmente serán interpretables y que usualmente serán insignificantes.

Retomando el ejemplo de los tres factores A , B y C , supóngase que se tiene otro factor D y en lugar de emplear un diseño 3^4 se emplea un tercio de esta fracción. Entonces la columna del factor D se elige igual la columna A + la columna B + la columna C (mod 3). Esta relación puede representarse por

$$D = ABC.$$

Si x_A, \dots, x_D se usan para representar las cuatro columnas, entonces $x_D = x_A + x_B + x_C(\text{mod } 3)$, o equivalentemente

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 0(\text{mod } 3) \tag{6}$$

que puede representarse por

$$I = ABCD^2. \tag{7}$$

En este caso, la columna I denota la identidad que en este caso es una columna de 0's. La relación en (7) es llamada la relación de definición del diseño 3^{4-1} . Los efectos alias se pueden determinar a partir de la

relación de definición (6) o la definición (7). Se puede ver que por ejemplo $A = BCD^2 = AB^2C^2D$, es decir, A tiene dos alias, BCD^2 y AB^2C^2D .

En este caso, las definiciones de claro y fuertemente claro para los efectos principales permanecen igual a como se definieron antes. En el caso de interacciones de dos factores, por ejemplo $A \times B$, la interacción es clara si sus dos componentes AB y AB^2 son claros, y es fuertemente clara si sus dos componentes son fuertemente claros.

En general, un diseño 3^{k-p} es un diseño factorial fraccionado con k factores y 3^{k-p} corridas. El plan factorial está definido por p generadores independientes. Por ejemplo, el diseño 3^{5-2} con $D = AB$, $E = AB^2C$ tiene 27 corridas y cinco factores. De este plan experimental se puede llegar a

$$I = ABD^2 = AB^2CE^2 = AC^2DE = BCDE^2.$$

Entonces, el subgrupo de contraste de definición tiene cuatro palabras de longitudes 3, 4, 4 y 4. El subgrupo de contraste de definición se define igual que para los diseños factoriales fraccionados de dos niveles, al igual que los criterios de resolución y mínima aberración.

2.5. Diseño robusto de parámetro

El diseño robusto es una metodología de la estadística/ingeniería, la cual tiene como objetivo reducir la variación en el desempeño de un sistema a través de la elección de la configuración de los factores de control que hacen al sistema menos sensible al ruido. Las variables de entrada en un sistema se dividen en dos categorías: factores de control (X) y factores de ruido (Z). En la realización de un diseño experimental de parámetro, la configuración de los factores de ruido varía sistemáticamente para representar su variación en condiciones normales. Los diseños factoriales fraccionados o arreglos ortogonales son empleados para llevar a cabo el experimento. En esta sección se discuten varios conceptos del diseño robusto, así como los tipos de estrategias de experimentación y los tipos de estrategias de modelado y análisis. En la Figura 2.4 se muestra un diagrama con los factores de control y de ruido que son las variables de entrada de un proceso, y la variable respuesta que resulta de tal proceso.

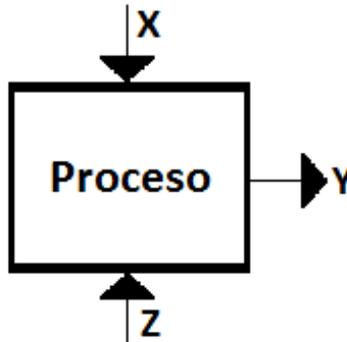


Figura 2.4: Factores de control X y factores de ruido Z que influyen en la respuesta Y de un proceso.

2.5.1. Principio fundamental

El principio fundamental del diseño robusto es mejorar la calidad de un producto minimizando el efecto de las causas de variación sin eliminar dichas causas. Esto se logra optimizando los diseños de producto y proceso para hacer el desempeño mínimamente sensible a varias causas de variación. A esto se le llama *diseño de parámetro*. Sin embargo, el diseño de parámetro por si solo no siempre lleva a una calidad lo suficientemente alta. Una mejora adicional puede obtenerse mediante el control económicamente justificable de las causas de variación, por lo general mediante el uso de equipos más costosos, los componentes de mayor calidad, mejores controles ambientales, etc., todo lo cual conduce a costos más altos de producción u operación, o ambos. Los

beneficios de la mejora de calidad deben justificar el costo agregado del producto. Para obtener una mejora adicional, en este trabajo se propone una estrategia de control Feed-Forward que se mencionará más adelante.

2.5.2. Herramientas usadas en diseño robusto

En el diseño robusto se tienen dos tareas importantes a realizar:

1. *Medición de la calidad durante el diseño/desarrollo.*

Se requiere un indicador de calidad para el cual se pueda evaluar el efecto de cambiar un diseño de parámetro particular en el desempeño de un producto. Se pueden identificar dos herramientas para medir la calidad, y son: la razón señal a ruido (SN) y la medida de desempeño (PM).

2. *Experimentación eficiente para encontrar información confiable acerca del diseño de parámetros.*

Es crítico obtener información confiable acerca del diseño de parámetros de modo que cambios de diseño durante la fabricación y el uso del cliente puedan ser evitados. También, la información debe obtenerse con el mínimo de tiempo y recursos. Para lograr esto, se propone el uso de arreglos ortogonales.

2.5.3. Factores de ruido - Causas de variación

Toda característica de calidad varía debido a diferentes causas de variación, dichas causas de variación son conocidas como factores de ruido y pueden clasificarse como:

1. *Externas.*

El medio ambiente en el cual el producto es utilizado y la carga a la cual es sometido son las dos fuentes externas importantes de variación en el desempeño de un producto.

2. *Variación unidad a unidad.*

La variación que es inevitable en el proceso de manufactura lleva a la variación de los parámetros del producto de unidad a unidad.

3. *Deterioro.*

Cuando un producto es vendido, todas sus características funcionales deben estar en el objetivo. Conforme el tiempo pasa, los valores de los componentes individuales pueden cambiar llevando al deterioro de un producto de alto desempeño.

2.5.4. Clasificación de factores

La característica de calidad o la respuesta de un proceso es una variable aleatoria que será denotada por y . Los factores que influyen en el proceso se pueden clasificar en las siguientes tres clases:

1. *Factores señal (M).*

Son los factores establecidos por el usuario u operador del proceso para expresar el valor deseado para la respuesta del producto. Los factores de señal son seleccionados por el ingeniero de diseño basado en los conocimientos de ingeniería del producto en desarrollo. Algunas veces dos o más factores son usados en combinación para expresar la respuesta deseada. Este caso particular se conoce como diseño robusto de parámetros para sistemas de señal-respuesta o sistemas de característica dinámica. Este tema se discutirá en la siguiente sección. En el caso de que el factor señal sea constante, se considera que es un problema estático.

2. Factores de ruido (Z).

Algunos de los factores que influyen en el proceso pueden no ser controlados por el diseñador, y son llamados factores de ruido. Algunos otros factores cuyos ajustes son difíciles de controlar en campo o que tienen un alto costo para ser controlados también son considerados factores de ruido. Los niveles de los factores de ruido cambian de una unidad a otra, de un medio ambiente a otro, y de una realización a otra. Únicamente las características estadísticas de los factores de ruido pueden ser conocidas o especificadas, pero los valores actuales en ocasiones específicas pueden no ser conocidos. Los factores de ruido causan que la respuesta y sufra una desviación del objetivo planteado por el factor señal M y que lleva a la pérdida de calidad.

3. Factores de control (X).

Los factores que pueden ser especificados y manipulados libremente por el diseñador son conocidos como factores de control. De hecho, es responsabilidad del diseñador determinar los mejores valores para estos factores. Cada factor de control puede tomar múltiples valores, llamados niveles. Cuando los niveles de ciertos factores de control son modificados, el costo de fabricación no cambia; sin embargo, existen otros factores de control que cuando sus niveles son modificados, el costo de fabricación sí cambia. Se hará referencia a los factores de control que afectan el costo de fabricación como *factores de tolerancia*, mientras que los otros factores de control serán llamados simplemente factores de control.

Identificar variables de respuestas, factores de señal, factores de ruido y factores de control que influyen en un proceso son tareas muy importantes. En la planeación de un proyecto de diseño robusto, también es importante identificar los factores de control y los factores de tolerancia. El mejor ajuste de los factores de control es determinado a través del diseño de parámetro, mientras que el mejor ajuste para los factores de tolerancia es determinado a través del diseño de tolerancia. En el trabajo aquí presentado no se investiga el diseño de tolerancia.

Los proyectos de diseño robusto pueden ser clasificados sobre la base de la naturaleza del factor señal y la característica de calidad.

2.5.5. Explotando la no linealidad

Como ya se ha mencionado antes, el principio fundamental del diseño robusto es mejorar la calidad minimizando los efectos de los factores de ruido. Es por esto que es importante identificar los factores de ruido que influyen en el proceso. Para productos o procesos que tienen múltiples funciones, diferentes factores de ruido pueden afectar diferentes características de calidad.

Usualmente, la característica de calidad del producto está relacionada con varios factores de control y factores de ruido a través de una función no lineal complicada. La relación entre la dependencia de la respuesta y con los factores de control X y factores de ruido Z puede describirse por medio de una función como:

$$y = f(X, Z).$$

Es posible encontrar muchas combinaciones de los valores de los parámetros del producto que pueden dar un valor objetivo deseado de la característica de calidad del producto bajo condiciones nominales de ruido. Sin embargo, debido a la no linealidad, estas diferentes combinaciones de parámetros del producto pueden dar variaciones bastante diferentes en la característica de calidad, incluso cuando las variaciones del factor de ruido sean las mismas. La meta principal del diseño robusto es explotar la no linealidad para encontrar una combinación de los valores de los parámetros del producto que generan la menor variación en el valor de la característica de calidad alrededor del valor objetivo deseado.

Con el objetivo de minimizar el costo total, que consiste del costo por unidad fabricada y la pérdida de calidad, es necesario primero llevar a cabo el diseño de parámetro. Después, durante el diseño de tolerancia, se deben ajustar las tolerancias para alcanzar un balance económico entre la reducción de la pérdida de calidad y el incremento en el costo de fabricación.

Ingenieros y administradores, sin darse cuenta de los beneficios del diseño robusto de productos y la metodología del diseño robusto, tienden a utilizar partes, componentes y procesos de manufactura más costosos para mejorar la calidad sin antes obtener el mayor beneficio del diseño de parámetro. Como resultado,

ellos pierden la oportunidad de mejorar la calidad sin incrementar el costo de manufactura. Esto lleva a un concepto erróneo de que mayor calidad siempre significa mayor costo de fabricación por unidad.

2.5.6. Optimización del diseño de producto y proceso

Diseñar un producto o proceso de manufactura es una actividad complicada. El resultado de una actividad es un conjunto de planos y especificaciones escritas que determinan como hacer un producto en particular. Tres elementos esenciales de estos planos y especificaciones son: (a) arquitectura del sistema, (b) valores nominales para todos los factores del sistema, y (c) la tolerancia o variación permitida en cada parámetro. La optimización de un diseño de producto o proceso significa determinar la mejor arquitectura, los mejores valores de los factores, y las mejores tolerancias.

Considérese la estrategia de minimizar el costo de manufactura mientras se entrega un nivel de calidad específico. El problema de ingeniería de la optimización del diseño de producto o proceso para reflejar esta estrategia es difícil y confuso. Primero, la relación entre numerosos factores y la respuesta es a menudo desconocida y debe ser observada experimentalmente. En segundo lugar, durante el diseño del producto o proceso, las magnitudes de las variaciones de los factores de ruido y los costos de distintos niveles de materiales, componentes, y tolerancias no son conocidos. Por ejemplo, durante el diseño de producto, las variaciones exactas de manufactura no son conocidas a menos de que los procesos existentes sean usados. Por lo tanto, no es posible escribir una función objetivo simple que abarque todos los costos. Considerando estas dificultades, la siguiente estrategia tienen un atractivo intuitivo y consiste de tres pasos: (1) Diseño de concepto, (2) Diseño de parámetro, y (3) Diseño de tolerancia. Estos pasos son descritos a continuación.

1. *Diseño de concepto.*

En este paso, el diseñador examina una variedad de arquitecturas y tecnologías para lograr la función deseada del producto y seleccionar los más adecuados para el producto. Esto juega un papel importante para reducir la sensibilidad a los factores de ruido, al igual que en la reducción del costo de manufactura.

2. *Diseño de parámetro.*

En el diseño de parámetro se determina la mejor configuración para los factores de control que no afectan el costo de manufactura, que es, la configuración que minimiza la pérdida de calidad. Entonces, es necesario minimizar la sensibilidad de la función del producto o proceso para todos los factores de ruido y también obtener la función media en el objetivo. Si al final del diseño de parámetro la pérdida de calidad se encuentra dentro de especificaciones, se tiene un diseño con el más bajo costo y no es necesario ir al tercer paso. Sin embargo, en la práctica la pérdida de calidad debe reducirse más; por lo tanto, siempre se tiene que ir al tercer paso.

3. *Diseño de tolerancia.*

En el diseño de tolerancia se busca un equilibrio entre la reducción en la pérdida de calidad debido a la variación en el rendimiento y el aumento del costo de manufactura; esto es, de forma selectiva se reducen tolerancias y de forma selectiva se especifican materiales de mayor grado en el orden de su relación costo-eficiencia.

El mejoramiento de calidad a través del diseño de concepto necesita de avances, que son difíciles de programar y por lo tanto pueden llevar un largo tiempo de desarrollo. El diseño de parámetro mejora la calidad sin incrementar el costo por unidad manufacturada. Esto puede ser realizado sistemáticamente usando arreglos ortogonales y razones señal a ruido, que es el camino más barato para mejorar la calidad. El diseño de tolerancia debe ser llevado a cabo solamente después de que el diseño de parámetro se haya hecho; de otra forma, el costo por unidad manufacturada puede resultar innecesariamente grande. La metodología del diseño robusto se enfoca en cómo realizar eficientemente el diseño de parámetro.

Dependiendo de la estrategia de mercado y política corporativa, un proveedor puede adoptar una de muchas estrategias de optimización para volverse el proveedor preferido. Entre ellas, tres estrategias notables son: (1) minimizar el costo de manufactura mientras se entrega la misma calidad que la competencia, (2) minimizar la pérdida de calidad mientras se mantiene el costo de manufactura al igual que el de la competencia, y (3) minimizar la suma de la pérdida de calidad y el costo de manufactura. Sin tener en cuenta de que estrategia de optimización es adoptada, primero se debe realizar el diseño de parámetro.

2.5.7. El rol de varias actividades de control de calidad

El ciclo de vida de un producto tiene cuatro grandes etapas: (1) diseño de producto, (2) diseño del proceso de manufactura, (3) manufactura, y (4) uso del consumidor. Las actividades del control de calidad durante el diseño del producto y proceso son llamados control de calidad fuera de línea, mientras que en manufactura son llamados control de calidad en línea. La garantía y el servicio son las maneras para tratar los problemas de calidad durante el uso del consumidor.

La sensibilidad de un producto a los tres tipos de factores de ruido puede reducirse durante el diseño de producto, entonces se hace del diseño de producto la etapa más importante para mejorar la calidad y reducir el costo de manufactura por unidad. El siguiente paso importante es el diseño de proceso de manufactura a través del cual la variación de unidad a unidad puede ser reducida junto con el costo de manufactura por unidad. Durante la manufactura, la variación de unidad a unidad puede reducirse aún más, pero con menos rentabilidad que durante el diseño de proceso de manufactura.

2.5.8. Estrategias de experimentación y modelado

Con el objetivo de obtener un buen diseño robusto de parámetro, es necesario identificar una estrategia ideal para llevar a cabo el experimento de interés. Después es necesario determinar la mejor manera de modelar los resultados obtenidos de la experimentación previa. A continuación se muestran algunas estrategias para la experimentación y modelación.

Arreglo cruzado Una vez identificados los factores de ruido, estos deben ser variados sistemáticamente en un diseño experimental de parámetros para reflejar la variación del ruido que ocurre en el proceso normal o en condiciones de uso.

Se dice que un **arreglo interno** es una matriz de diseño para los factores de control, y un **arreglo externo** es una matriz de diseño para los factores de ruido. Un arreglo cruzado consiste de todas las combinaciones de niveles entre las combinaciones del arreglo interno y las combinaciones del arreglo externo. En términos matemáticos, un arreglo cruzado es un producto entre el arreglo interno y el arreglo externo. Si N_1 y N_2 denotan los tamaños de corridas de los arreglos interno y externo, respectivamente, entonces $N = N_1 N_2$ es el tamaño de corridas del arreglo cruzado.

Usualmente se eligen arreglos ortogonales para el arreglo interno y para el arreglo externo. Debido a que las combinaciones de niveles de un arreglo ortogonal representan puntos que son razonablemente uniformes sobre la región de los factores de ruido, realizar un experimento basado en un arreglo cruzado puede interpretarse como hacer un Monte Carlo sistemático sobre la variación de ruido. Como el arreglo externo es elegido para representar la variación de ruido, la uniformidad puede ser considerada más importante que la ortogonalidad.

A continuación se presentan dos enfoques para modelar y analizar experimentos con arreglos cruzados.

Modelado de localización y dispersión Las medidas de localización y dispersión se calculan como

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \text{ y } s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \quad (8)$$

respectivamente, donde n_i es el número de repeticiones de ruido para la i -ésima configuración de los factores de control. El objetivo es modelar \bar{y}_i y $\ln s_i^2$ de manera separada en términos de los efectos principales e interacciones de los factores de control.

Una vez identificados los modelos de localización y dispersión, los **factores de localización** se definen como los factores que aparecen en el modelo de localización; de manera similar, los **factores de dispersión** son los factores que aparecen en el modelo de dispersión. A un factor de localización que no es factor de dispersión se le llama **factor de ajuste**. Para el problema de lo nominal es mejor, la mejor configuración de los factores de control puede obtenerse a partir del siguiente procedimiento:

Procedimiento de dos pasos para el problema de lo nominal es mejor

(i) *Seleccionar los niveles de los factores de dispersión que minimizan la dispersión.*

(ii) Seleccionar los niveles de los factores de ajuste que proporcionan la localización en el valor nominal.

Si un factor en el paso (ii) fuera también factor de dispersión, realizar un cambio en este factor cambiaría tanto la localización como la dispersión. Esto puede ocasionar que se logre el valor nominal pero con un incremento en la dispersión, lo cual requiere de un reajuste en los factores de dispersión y una interacción entre los dos pasos.

Para los problemas de lo más grande es mejor y lo más pequeño es mejor, lo mejor es intercambiar los pasos de la siguiente forma:

Procedimiento de dos pasos para los problemas de lo más grande es mejor y lo más pequeño es mejor

(i) Seleccionar los niveles de los factores de localización para maximizar (minimizar) la localización.

(ii) Seleccionar los niveles de los factores de dispersión que no son factores de localización para minimizar la dispersión.

En el formato de arreglo cruzado, \bar{y}_i y s_i^2 se calculan sobre el mismo arreglo externo. Cualquier diferencia entre los valores \bar{y}_i (o s_i^2) pueden atribuirse a la diferencia en las configuraciones de los factores control, que justifica el enfoque de modelación. El Cuadro 2.2 muestra un ejemplo de arreglo cruzado, donde cada x_i es una corrida del arreglo interno y cada z_i es una corrida del arreglo externo. Cada y_{ij} representa las respuestas de realizar el experimento con las corridas x_i y z_j .

		Arreglo Externo				\bar{y}	s^2
		z_1	z_2	\cdots	z_{N_2}		
Arreglo	x_1	y_{11}	y_{12}	\cdots	y_{1N_2}	\bar{y}_1	s_1^2
	x_2	y_{21}	y_{22}	\cdots	y_{2N_2}	\bar{y}_2	s_2^2
Interno	\vdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\vdots	\vdots
	x_{N_1}	y_{N_11}	y_{N_12}	\cdots	$y_{N_1N_2}$	\bar{y}_{N_1}	$s_{N_1}^2$

Cuadro 2.2: Ejemplo de Arreglo Cruzado

Modelado de respuesta La desventaja del enfoque anterior es que al modelar la localización y la dispersión en términos de los factores de control, se pueden disfrazar algunas relaciones importantes entre los factores de control y ruido. En el enfoque de modelado de respuesta, en lugar de calcular la varianza sobre las réplicas de ruido, la respuesta y es modelada como una función tanto de los factores de control como de los factores de ruido. Al modelo ajustado \hat{y} se le llama modelo respuesta. El análisis consiste de dos partes:

(i) Hacer las **gráficas de las interacciones control-ruido** para los efectos de interacción importantes en el modelo respuesta. De las gráficas, la configuración de los factores de control, en la cual y tiene una relación más plana con los factores de ruido, es elegida como la configuración robusta.

(ii) Basados en el modelo ajustado \hat{y} , se calcula $Var(\hat{y})$ con respecto a la variación entre los factores de ruido en \hat{y} . Se llama $Var(\hat{y})$ al modelo de varianza transmitida. Debido a que $Var(\hat{y})$ es una función de los factores de control, esto puede ser utilizado para identificar la configuración de factores de control con la menor varianza transmitida.

Las configuraciones de factores de control determinadas por (i) y (ii) no son necesariamente iguales. En muchas ocasiones, ellas llevan a recomendaciones consistentes o idénticas, pero su equivalencia requiere algunos supuestos sobre los términos en el modelo respuesta.

Arreglo simple y modelado de respuesta Como ya se había visto, el tamaño de corrida de un arreglo cruzado es $N = N_1 N_2$, donde N_1 y N_2 son los tamaños de corrida de los arreglos interno y externo, respectivamente. Si N es grande y el costo de correr el experimento es proporcional a N , el arreglo cruzado puede ser muy costoso. Una alternativa es el uso de un **arreglo simple** que incluya los factores de control y factores de ruido. En este caso, el tamaño de corrida puede ser mucho más pequeño.

Si no se usa un arreglo cruzado, obviamente el modelado de localización y dispersión no puede ser utilizado porque es necesario que las mismas réplicas de ruido sean usadas para cada combinación de factores de control. Entonces, para experimentos con arreglos simples se recomienda el modelado de respuesta.

En el Cuadro 2.3 se muestra la estructura de un arreglo simple, donde se considera que hay k factores de control, m factores de ruido y n corridas. Para un mayor conocimiento acerca de estas estrategias y de sus pros y contras, se recomienda ver la referencia [3].

	Factores de control				Factores de ruido				Respuesta
	C_1	C_2	\cdots	C_k	R_1	R_2	\cdots	R_m	
1									y_1
2	Configuración				Configuración				y_2
\vdots	de niveles				de niveles				\vdots
n									y_n

Cuadro 2.3: Ejemplo de Arreglo Simple

2.5.9. Razón señal a ruido

Se trata de una variación de la modelación localización-dispersión propuesta por Taguchi. Sean μ y σ^2 la media y la varianza de la respuesta en una configuración de los factores de control y defina

$$\eta = \ln \frac{\mu^2}{\sigma^2}. \quad (9)$$

Para esto se supone que un arreglo cruzado se usa para el experimento. El análogo muestral de η es:

$$\hat{\eta}_i = \ln \frac{\bar{y}_i^2}{s_i^2},$$

llamado razón señal a ruido para la configuración de factores de control dados, donde \bar{y}_i y s_i^2 son la media y la varianza muestrales definidos en (8) para la configuración de factores de control i en el Cuadro 2.2.

Razones señal a ruido para problemas estáticos Por simplicidad, supóngase que se tienen n observaciones de la característica de calidad bajo diferentes condiciones de ruido, que serán denotadas por y_1, y_2, \dots, y_n . Además, se tiene que

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \text{ y } \sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2$$

pueden ser considerados como la media y la varianza del experimento.

Problema del tipo lo más pequeño es mejor En este tipo de problemas, la característica de calidad es continua y no negativa. El valor más deseado es cero. Estos problemas se caracterizan por la ausencia de un factor de escala o algún otro factor de ajuste.

Debido a que no hay factor de ajuste en estos problemas, simplemente se debe minimizar la pérdida de calidad sin ajuste, esto es, minimizar

$$\begin{aligned} Q &= k(\text{la media de la característica de calidad al cuadrado}) \\ &= k \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right). \end{aligned}$$

Minimizar Q es equivalente a maximizar η definido por la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} \eta &= -10 \log_{10}(\text{la media de la característica de calidad al cuadrado}) \\ &= -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right), \end{aligned}$$

donde se ignora la constante k y se expresa la pérdida de calidad en la escala decibel. El procedimiento para expresar a η en términos de la media μ y la varianza σ^2 se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \eta &= -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \\ &= -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 + \mu^2 - \mu^2 \right) \\ &= -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i^2 + \mu^2) - \mu^2 \right) \\ &= -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i^2 - 2y_i\mu + \mu^2 + 2y_i\mu) - \mu^2 \right) \\ &= -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 + 2\mu \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \mu^2 \right) \\ &= -10 \log_{10} \left(\frac{n-1}{n} \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 \right] + 2\mu^2 - \mu^2 \right) \\ &= -10 \log_{10} \left(\frac{n-1}{n} \sigma^2 + \mu^2 \right). \end{aligned}$$

Así pues,

$$\eta = -10 \log_{10} \left(\frac{n-1}{n} \sigma^2 + \mu^2 \right). \quad (10)$$

Problema del tipo lo nominal es mejor Al igual que en el problema del tipo lo más pequeño es mejor, la característica de calidad es continua y no negativa. Su valor objetivo es distinto de cero y finito. Para estos problemas cuando la media se hace cero, la varianza también se hace cero. En estos problemas se puede encontrar un factor de escala que puede servir como un factor de ajuste para mover la media asía el objetivo.

Este tipo de problemas ocurren frecuentemente en diseño de ingeniería. La función objetivo a ser maximizada para estos problemas es

$$\eta = 10 \log_{10} \frac{\mu^2}{\sigma^2}. \quad (11)$$

En algunas ocasiones, el factor de escala puede identificarse fácilmente a través de la experiencia en ingeniería. En otras ocasiones, se puede identificar un factor de escala adecuado a través de la experimentación.

La optimización de problemas de lo nominal es mejor puede llevarse a cabo en dos pasos:

1. Maximizar η o minimizar la sensibilidad al ruido. Durante este paso se seleccionan los niveles de los factores de control para maximizar η ignorando la media.

2. Ajustar la media en el objetivo. En este paso se usa el factor de ajuste para llevar la media al objetivo sin cambiar η .

Problema del tipo lo más grande es mejor En este caso, la característica de calidad es continua y no negativa, y lo que se quiere es hacerla lo más grande posible. Tampoco se tiene un factor de ajuste. Este problema puede ser transformado en el problema del tipo lo más pequeño es mejor al considerar el recíproco de la característica de calidad. La función objetivo a maximizar está dada por

$$\begin{aligned}\eta &= -10 \log_{10}(\text{la media del recíproco de la característica de calidad al cuadrado}) \\ &= -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i^2} \right)\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $w_i = 1/y_i$, y sumando y restando la media al cuadrado de los w_i 's denotada por μ_w , se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\eta &= -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i^2 - \mu_w^2 + \mu_w^2 \right) \\ &= -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i^2 - 2\mu_w^2 + \mu_w^2 + \mu_w^2 \right) \\ &= -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i^2 - 2\mu_w \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_w^2 + \mu_w^2 \right) \\ &= -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (w_i^2 - 2\mu_w w_i + \mu_w^2) + \mu_w^2 \right) \\ &= -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (w_i - \mu_w)^2 + \mu_w^2 \right) \\ &= -10 \log_{10} \left(\frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (w_i - \mu_w)^2 + \mu_w^2 \right) \\ &= -10 \log_{10} \left(\frac{n-1}{n} \sigma_w^2 + \mu_w^2 \right),\end{aligned}$$

luego, usando la formula de la propagación del error

$$\sigma_w^2 \doteq \left(\frac{dw}{dy} \right) \sigma^2 = -\frac{1}{y^4} \sigma^2,$$

se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\eta &= -10 \log_{10} \left(\frac{n-1}{n} \sigma_w^2 + \mu_w^2 \right) \\ &= -10 \log_{10} \left(-\frac{n-1}{n} \frac{1}{y^4} \sigma^2 + \mu_w^2 \right)\end{aligned}$$

Luego puedes expresar la varianza de w, por la menos varianza de y entre y^4 ¿por qué?

Limitaciones En el caso de que lo nominal es mejor, tener un $\hat{\eta}$ grande implica tener un s^2 pequeño y/o \bar{y} grande. Por otro lado, un \bar{y} grande no es requerido (se requiere un valor nominal), lo cual plantea inquietudes acerca de lo apropiado de la razón señal a ruido.

En algunas disciplinas la razón señal a ruido es una medida natural, pero en otros problemas esto tiene poco o nada de significado. Típicamente se requiere que el sistema sea un sistema de entrada-salida lineal, de modo que la varianza y la media al cuadrado crezcan o decrezcan en la misma proporción. Debido a esta condición rigurosa, se pierde una justificación física en la mayoría de las situaciones prácticas.

Otro problema que se encuentra con la razón señal a ruido es que se tiene complejidad en la modelación estadística de $\hat{\eta}$. Como ya se ha mencionado, la varianza muestral s^2 suele tener una relación más compleja con los factores de control que con la respuesta original y . Como $\hat{\eta}$ incluye s^2 y \bar{y} , esto puede tener una relación aún más complicada que la que se tiene para s^2 .

Por la discusión anterior, es que no se recomienda el uso de la razón señal a ruido en la optimización del diseño de parámetro.

2.6. Diseño robusto de parámetro para sistemas señal-respuesta

El diseño robusto de parámetro es de aplicación amplia en los denominados sistemas señal-respuesta. Esto se debe a que en muchos procesos, la variable respuesta de interés es muy sensible a un factor de control específico que se denomina factor señal. Debido a la sensibilidad que el factor señal proporciona en la variable respuesta, se puede establecer una relación entre la variable respuesta y el factor señal.

Esta sección se enfoca en introducir el diseño robusto de parámetro en los sistemas señal-respuesta, con el fin de hacer estos sistemas insensibles a los factores de ruido. Lo primero es conocer los sistemas señal-respuesta y sus clasificaciones. El siguiente paso es determinar las medidas de desempeño para llevar a cabo la optimización del diseño de parámetro. La última parte de esta sección se enfoca en proporcionar estrategias de modelado y análisis.

En el capítulo de ejemplos se analizan los datos de un experimento de moldeo por inyección, en el cual se aplica la metodología ilustrada en esta sección. La Figura 2.5 muestra un esquema de los factores que están involucrados en un proceso.

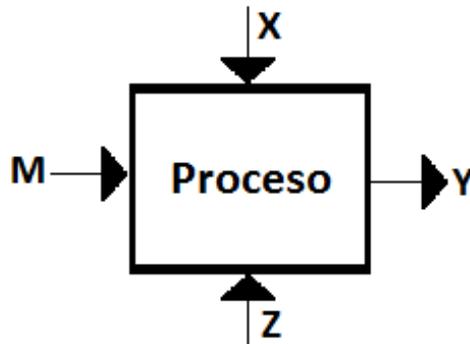


Figura 2.5: Esquema de los factores de control X , factores de ruido Z , factor señal M y variable de respuesta Y involucrados en un proceso.

2.6.1. Sistemas de señal-respuesta y su clasificación

Para los sistemas de señal-respuesta, la característica de calidad es la relación entre la respuesta y y el factor señal M , que puede ser modelada por

$$y = g(M),$$

y el interés radica en la relación señal-respuesta g . Para que M sea un factor señal eficiente, debe tener un efecto significativo sobre y . Típicamente la relación g es una función monótona. Debido a que el comportamiento de g a menudo depende de los factores de control y ruido del sistema, la metodología del diseño de parámetro puede ser aplicada.

Si la relación señal-respuesta en una aplicación dada no es reconocida y es tratada como una respuesta simple, puede resultar una severa pérdida en la eficiencia.

Los **sistemas multi-objetivo** son un tipo de sistemas de señal-respuesta, cuya función requiere que el valor de una respuesta sea ajustado cambiando el nivel de un factor señal. Un ejemplo de esto es el experimento de moldeo por inyección que se mostrará más adelante.

Los **sistemas de medición** son otro tipo de sistemas señal-respuesta, que son procesos usados para obtener un estimador de alguna cantidad de interés para una unidad o muestra dada. Esto incluye el muestreo, preparación y calibración de la muestra, así como el proceso actual de medición. La cantidad real de la cantidad presentada puede considerarse como una señal de entrada M que el sistema convierte en un valor de medición o respuesta y . La precisión con la cual M puede ser estimado basados en y es determinada por la relación señal-respuesta $y = g(M)$.

Un tercer tipo de sistema señal-respuesta involucra un sistema de control, que puede usar un control Feed-Forward o Feedback. En este trabajo se considera el uso del control Feed-Forward, y se muestra en el siguiente capítulo.

Calibración de sistemas de medición Antes de usar el sistema de medición para estimar la cantidad desconocida de interés, es necesario calibrarlo. Un sistema de calibración simple se puede describir por un modelo de regresión lineal simple

$$y = \alpha + \beta M + \varepsilon \quad (12)$$

con $E(\varepsilon) = 0$ y $var(\varepsilon) = \sigma^2$. Supóngase que hay p normas para las cuales los valores verdaderos de M son conocidos. Sean m_j que denotan sus valores y y_j los correspondientes valores medidos de y . Los estimadores de mínimos cuadrados para α , β y σ^2 son

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{S_{ym}}{S_{mm}}, \quad \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{m}, \\ s^2 &= (p-2)^{-1} \sum_{j=1}^p \left[y_j - \bar{y} - \hat{\beta}(m_j - \bar{m}) \right]^2, \end{aligned} \quad (13)$$

donde

$$S_{mm} = \sum_{j=1}^p (m_j - \bar{m})^2, \quad S_{ym} = \sum_{j=1}^p (y_j - \bar{y})(m_j - \bar{m}), \quad \bar{m} = p^{-1} \sum_{j=1}^p m_j$$

Estos estimadores llevan a la calibración en línea

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta}M, \quad (14)$$

que puede ser usada para estimar el valor desconocido de M para una muestra. Supóngase que su valor medido es y_0 . Calculando y_0 con (14), $y_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}M$, lo que lleva a

$$\hat{M} = \frac{y_0 - \hat{\alpha}}{\hat{\beta}},$$

que estima el valor desconocido de M para la muestra. Para obtener un intervalo de confianza para M , nótese que para un valor específico m_0 de M , el intervalo de predicción de $(1 - \alpha) \times 100\%$ para y está dado por

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta}m_0 \pm t_{p-2, \alpha/2} s \sqrt{1 + \frac{1}{p} + \frac{(m_0 - \bar{m})^2}{S_{mm}}}, \quad (15)$$

donde s^2 se da en (13). Invertiendo esta relación, un intervalo de confianza de $(1 - \alpha) \times 100\%$ para m_0 , llamado *intervalo de Fieller*, puede obtenerse usando el conjunto de valores de M para cada valor medido y_0 que está en el intervalo de predicción de $(1 - \alpha) \times 100\%$ dado en (15). Por lo tanto el intervalo de Fieller para el valor desconocido M consiste de todos los valores m que satisfacen

$$(y_0 - \hat{\alpha} - \hat{\beta}m)^2 \leq (t_{p-2, \alpha/2})^2 s^2 \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{(m - \bar{m})^2}{S_{mm}} \right).$$

2.6.2. Medidas de desempeño para la optimización de diseño de parámetro

Es importante identificar medidas de desempeño que evalúan la conveniencia de la relación señal-respuesta dada para la aplicación prevista. Mediante la optimización de la medida elegida, las configuraciones de factores de control que logran los objetivos deseados pueden ser identificadas.

Dos aspectos muy importantes de los sistemas señal-respuesta son la dispersión y sensibilidad. En el caso del modelo de regresión lineal en (12), la dispersión y sensibilidad se miden con σ^2 y β , respectivamente.

Una medida de desempeño, que convierte a β y σ^2 en una medida simple, es

$$\omega = \ln(\beta^2/\sigma^2).$$

El análogo muestral es

$$\hat{\omega} = \ln\left(\hat{\beta}^2/s^2\right), \quad (16)$$

donde $\hat{\beta}$ y s^2 están dados en (13), es llamada la razón señal a ruido (SN) para sistemas señal-respuesta, o en la terminología de Taguchi la razón SN dinámica. El $\hat{\omega}$ calculado para cada combinación de factores de control en el experimento puede ser ajustado usando un modelo de regresión en los factores control. Al modelo ajustado se le hace referencia como modelo razón SN dinámico. Si el experimento también incluye factores de ruido, el $\hat{\beta}$ y s^2 estimados en (16) deben basarse en las observaciones sobre todos los niveles de los factores de ruido y señal para la combinación de factores de control dada.

Como un diseño de parámetro para un sistema de respuesta simple, el segundo elemento clave en el enfoque de Taguchi es la noción del factor de ajuste. En el contexto presente, un factor de ajuste es un factor control que tiene un efecto significativo en $\hat{\beta}$ pero no en $\hat{\omega}$. Taguchi propuso el siguiente procedimiento de dos pasos para la optimización del diseño de parámetro:

Procedimiento de dos pasos de Taguchi para sistemas señal-respuesta

- (i) *Seleccionar los niveles de los factores de control significativos en el modelo razón SN dinámico para maximizar $\hat{\omega}$.*
- (ii) *Seleccionar el nivel de un factor de ajuste para llevar la pendiente al objetivo.*

En algunas situaciones, existe la necesidad de modificar el paso (ii) para incluir otro factor de ajuste para llevar el intercepto al objetivo.

Cuando el intercepto es cero, el procedimiento de dos pasos de Taguchi puede justificarse si la siguiente relación se mantiene:

$$Var(y) \propto \beta^2,$$

o más precisamente, si la relación señal-respuesta puede representarse por el modelo

$$y = \beta(\mathbf{x}_1, x_2) [M + \varepsilon(\mathbf{x}_1)],$$

donde $E(\varepsilon) = 0$ y $Var(\varepsilon) = Q(\mathbf{x}_1)$.

2.6.3. Estrategias de modelado y análisis

Modelación de la medida de desempeño (PMM)

- (i) *Para cada combinación de factores de control en el experimento, calcular el valor PM basado en los valores respuesta para varias combinaciones de los niveles de los factores señal y de ruido*
- (ii) *Modelar los valores PM en (i) como una función de los factores de control. Las configuraciones preferidas para los factores de control son entonces determinadas del ajuste del modelo.*

La modelación en el paso (ii) puede emplear cualquier técnica de análisis.

La modelación de la medida de desempeño puede ser ilustrada usando la razón SN dinámica como la PM. Considerar un experimento factorial que involucra tres factores de control de dos niveles (C_1, C_2, C_3), dos factores de ruido de dos niveles (N_1, N_2), y un factor señal de cuatro niveles (M). Para cada una de las ocho distintas combinaciones de los factores de control, hay 16 observaciones correspondientes a las combinaciones de los factores de ruido y el factor señal. Estas 16 observaciones son usadas para ajustar una regresión lineal, y los parámetros estimados son usados para estimar la PM, en este caso $\widehat{PM} = \ln(\hat{\beta}^2/s^2)$. Las ocho \widehat{PM} s son entonces tratadas como las observaciones de un experimento 2^3 con C_1, C_2 , y C_3 como sus factores; técnicas de análisis estándar pueden ser aplicadas.

La medida de desempeño aparece como la cantidad a ser optimizada en el primer paso del procedimiento de dos pasos antes considerado.

Modelación de la función respuesta (RFM) Este tipo de modelación trata la relación señal-respuesta como la respuesta y modela esta relación como una función de los factores de control y ruido. La medida de desempeño especificada es evaluada respecto a los modelos ajustados con el fin de seleccionar el ajuste preferido de los factores de control. Esto es una extensión del enfoque de modelado de respuesta para sistemas de respuesta simple.

Para una relación lineal señal-respuesta, RFM puede ser establecido como el siguiente procedimiento de dos etapas:

- (i) *Para cada combinación de factores control/ruido en el experimento, ajustar un modelo de regresión a los valores respuesta sobre los niveles del factor señal. Para cada combinación se denotan los estimadores por $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i$ y s_i^2 .*
- (ii) *Obtener por separado modelos de regresión para $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i$ y $\log s_i^2$ como función de los factores de control y ruido. La medida de desempeño elegida puede ser evaluada con respecto a estos modelos y la configuración preferida de los factores de control puede ser determinada.*

El modelado y análisis en los pasos (i) y (ii) pueden emplear cualquier técnica. Si la estructura de error del problema es más complicada, el modelado en el paso (ii) requerirá un análisis más elaborado.

En general, el procedimiento PMM no es preferido debido a que a menudo puede oscurecer información útil presente en los datos. El enfoque PMM únicamente proporciona información sobre como los factores de control afectan el desempeño total del sistema. Cualquier información en los datos sobre como especificar factores de control afecta la forma del sistema señal respuesta, o la interacción con factores de ruido específicos se pierde. Este es el tipo de información que puede ser valiosa en sugerir direcciones para investigaciones futuras. El enfoque RFM no sufre de esta deficiencia. La modelación inicial de la respuesta a menudo proporcionará información útil sobre el sistema. La medida de desempeño es entonces aplicada a este modelo para identificar la configuración preferida de los factores de control. Las ventajas del enfoque RFM se mostrarán claramente en el capítulo 4, con el ejemplo del moldeo por inyección.

2.7. Definición de los sistemas de control

Antes de comenzar una discusión acerca de los sistemas de control, se comenzará por dar la definición de algunos conceptos básicos.

Variable controlada y señal control o variable manipulada. La variable controlada es la cantidad o condición que es medida y controlada. La señal control o variable manipulada es la cantidad o condición que es variada por el controlador para afectar el valor de la variable controlada. Normalmente la variable controlada es la salida del sistema. Control significa medir el valor de la variable controlada del sistema y aplicar la señal control al sistema para corregir o limitar una desviación del valor medido de un valor deseado.

Plantas. Una planta puede ser una pieza del equipo, tal vez un conjunto de piezas de la maquina funcionando juntas, donde su propósito consiste en realizar una operación particular. Cualquier objeto físico a ser controlado será llamado planta.

Procesos. El diccionario Merriam-Webster define un proceso como una operación natural, progresivamente continua o desarrollo marcado por una serie de cambios graduales que suceden de una forma relativamente fija y conducen a un resultado o fin determinado; o una operación artificial o voluntaria, progresivamente continua que consiste de una serie de acciones controladas o movimientos sistemáticos dirigidos hacia un resultado o fin determinado. Cualquier operación a ser controlada será llamada proceso.

Sistemas. Un sistema es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan cierto objetivo. Un sistema no necesariamente es físico. El concepto de sistema puede ser aplicado a fenómenos abstractos y dinámicos tales como los que se encuentran en economía. La palabra sistema debe, por lo tanto, interpretarse que implica sistemas físicos, biológicos, económicos, y similares.

Perturbaciones. Una perturbación es una señal que tiende a afectar de manera adversa el valor de la salida de un sistema. Si una perturbación es generada dentro del sistema, es llamada interna, mientras que una perturbación externa es generada fuera del sistema y es un valor de entrada en un sistema.

Control Feedback. El control Feedback se refiere a una operación que, en la presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida del sistema y alguna entrada de referencia y lo hace sobre la base de esta diferencia. Aquí sólo perturbaciones impredecibles son especificadas, ya que las perturbaciones predecibles o conocidas siempre pueden ser compensadas dentro del sistema.

Control Feed-Forward. Es una operación que tiene como objetivo enviar información acerca de errores o problemas que se presentan entre un paso y otro en un proceso, esto con el fin de reducir la variación. También puede interpretarse como la medición de las propiedades de los materiales de entrada o informar a la etapa posterior del proceso sobre los problemas descubiertos en la etapa anterior, con esto, la variación que hay de unidad a unidad puede reducirse.

2.8. Ejemplos de sistemas de control

Sistema de control de velocidad. El principio básico del regulador de velocidad de Watt para un motor se ilustra en el diagrama de la Figura 2.6. La cantidad de combustible admitida en el motor es ajustada de acuerdo a la diferencia de velocidad deseada y la velocidad actual del motor.

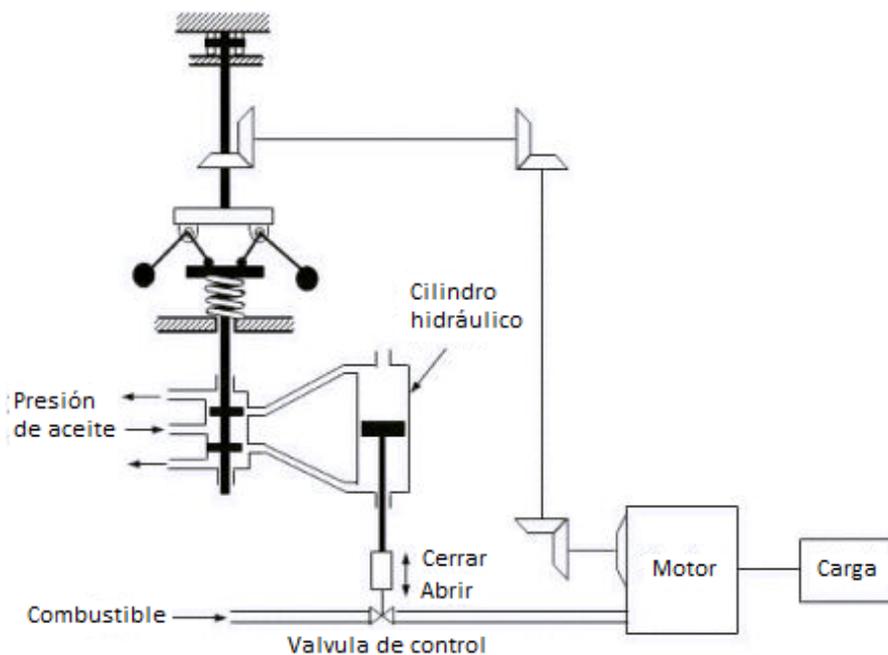


Figura 2.6: Sistema de control de velocidad

La secuencia de acciones se puede establecer de la siguiente manera: El regulador de velocidad es ajustado

tal que, a la velocidad deseada, sin presión de combustible fluirá en cada lado del cilindro de potencia. Si la velocidad actual está por debajo del nivel deseado debido a una perturbación, entonces la disminución de la fuerza centrífuga del regulador de velocidad hace que la válvula de control se mueva hacia abajo, proporcionando más combustible, y la velocidad del motor incrementa hasta que el valor deseado es alcanzado. De otro modo, si la velocidad del motor incrementa sobre el valor deseado, entonces el incremento en la fuerza centrífuga del regulador causa que la válvula de control se mueva hacia arriba. Esto disminuye el suministro de combustible, y la velocidad del motor disminuye hasta que el valor deseado se alcanza.

En este sistema de control de velocidad, la planta (sistema controlado) es el motor y la variable controlada es la velocidad del motor. La diferencia entre la velocidad deseada y la velocidad actual es el error señal. La señal control (cantidad de combustible) aplicada a la planta (motor) es el accionamiento de señal. La entrada externa de perturbar la variable control es la perturbación. Un cambio inesperado en la carga es una perturbación.

Sistema de control de temperatura. En la Figura 2.7 se muestra el diagrama del control de temperatura de un horno eléctrico. La temperatura en el horno eléctrico es medida con un termómetro, que es un dispositivo análogo. La temperatura análoga es convertida a temperatura digital por un convertidor A/D. La temperatura digital es alimentada a un controlador a través de un interfaz. La temperatura digital es comparada con la temperatura de entrada programada, y si hay alguna discrepancia (error), el controlador envía una señal al calentador, a través de un interfaz, amplificador, y el relé, para llevar la temperatura del horno a un nivel deseado.

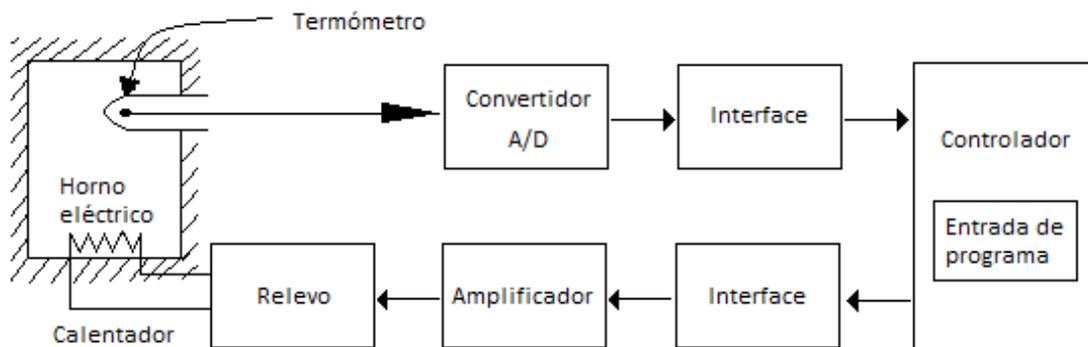


Figura 2.7: Sistema de control de temperatura.

3. Diseño Robusto de Parámetros con Control Feed-Forward

Este capítulo retoma el diseño robusto de parámetros enfocado a los sistemas señal-respuesta, con la diferencia de que ahora se introduce el control Feed-Forward. También se retoma información antes mostrada acerca de los diseños experimentales y la forma de realizar las estimaciones.

3.1. Sistemas de medición

En esta sección primero se explica el diseño de parámetro robusto sin control, luego se introduce la característica de control con el fin de hacer comparaciones. Más detalles acerca de sistemas de medición sin control han sido dados por Miller y Wu (1996) y Wu y Hamada (2000, cap. 11).

3.1.1. Sin control

Sean M el valor verdadero de la variable, Y el valor medido, X el conjunto de factores control, y Z el conjunto de factores de ruido. Supóngase que Y y M son variables no negativas. Sea $Y = f(X, Z, M)$. Supóngase que no es necesaria la corrección de cero en el sistema de medición, esto es, $Y = 0$ cuando $M = 0$. Entonces la relación citada en la rango de operación de M puede ser aproximada por

$$Y = \beta(X, Z)M. \quad (17)$$

Si la relación es no lineal, entonces agregando un intercepto se mejorará el ajuste pero se complicará la optimización. El uso del intercepto será discutido al final de esta subsección.

Lo primero que se hace es partir a Z en $\{N, U\}$, donde N es el conjunto de factores de ruido observables y U es el conjunto de factores de ruido no observables en el experimento. Sea $E[\beta(X, Z)|N] = \beta(X, N)$ y $var[\beta(X, Z)|N] = V(X, N)$. Como U es no observable, se puede usar un modelo con ruido aditivo

$$Y = \beta(X, N)M + \varepsilon, \quad (18)$$

donde $E(\varepsilon|N) = 0$ y $var(\varepsilon|N) = V(X, N)M^2$. Por el momento, supongase que las funciones β y V son conocidas y se derivan las medidas de desempeño para la optimización. En la práctica, estas funciones son desconocidas y deben ser estimadas a partir de datos mediante la realización de experimentos. Partiendo del modelo aditivo se tiene que

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[\beta(X, N)M] + E(\varepsilon) \\ &= E[\beta(X, N)]M + E(E(\varepsilon|N)) \\ &= E[\beta(X, N)]M, \end{aligned}$$

de donde se concluye que para un valor observado de Y , M puede estimarse como:

$$\hat{M} = \frac{Y}{E[\beta(X, N)]}. \quad (19)$$

Considérese $E[\beta(X, N)] = \beta(X)$. Entonces la variación en el estimador es

$$\begin{aligned} var(\hat{M}) &= var\left[\frac{Y}{E[\beta(X, N)]}\right] \\ &= var\left[\frac{Y}{\beta(X)}\right] \\ &= \frac{var(Y)}{\beta^2(X)}. \end{aligned}$$

La varianza de Y se puede obtener a partir de la ley de varianza total (la cual se enuncia y demuestra en el

Apéndice). Entonces,

$$\begin{aligned}
\text{var}(Y) &= E[\text{var}(Y|N)] + \text{var}[E(Y|N)] \\
&= E[\text{var}(\beta(X, N)M + \varepsilon|N)] + \text{var}[E(\beta(X, N)M + \varepsilon|N)] \\
&= E[\text{var}(\beta(X, N)M|N) + \text{var}(\varepsilon|N) + 2\text{cov}(\beta(X, N)M, \varepsilon|N)] + \text{var}[E(\beta(X, N)|N)M] \\
&= E[\text{var}(\varepsilon|N)] + \text{var}[\beta(X, N)M] \\
&= E[V(X, N)M^2] + \text{var}[\beta(X, N)]M^2 \\
&= (E[V(X, N)] + \text{var}[\beta(X, N)])M^2 \\
&= \sigma^2(X)M^2,
\end{aligned}$$

donde $\sigma^2(X) = E[V(X, N)] + \text{var}[\beta(X, N)]$. Entonces,

$$\text{var}(\hat{M}) = \frac{\sigma^2(X)M^2}{\beta^2(X)}.$$

El objetivo es encontrar $X \in D$ que minimice la varianza de \hat{M} , donde D es la región factible para X . Esto puede lograrse maximizando la razón señal a ruido (SN), dada por

$$SN(X) = \frac{\beta^2(X)}{\sigma^2(X)}. \quad (20)$$

Nótese que $\text{var}(\hat{M})$ es una función de M . En este caso particular, maximizar la razón SN minimizará la varianza para todo valor de M . Para algunos otros modelos, esto no necesariamente es el caso, y se debe promediar $\text{var}(\hat{M})$ a través de la distribución de M para obtener la medida de desempeño. Esta propuesta puede resumirse de la siguiente forma:

1. Encontrar $X^* \in D$ que maximice $SN(X)$ en (20).
2. Estimar $\hat{M} = Y/\beta(X^*)$.

Se ha señalado que la razón SN de (20) es diferente de la razón SN de Taguchi (9), debido a que los supuestos del modelo subyacente son diferentes. El modelo (18) permite que de manera natural, la medida de desempeño buscada sea la razón SN (20).

Ahora considérese un modelo con intercepto. Sea

$$Y = \beta_0(X) + \beta_1(X, N)M + \varepsilon,$$

donde $E(\varepsilon|N) = 0$ y $\text{var}(\varepsilon|N) = V(X, N)M^2$. Considérese nuevamente el supuesto de que la relación verdadera entre Y y M pasa a través del origen. El $\beta_0(X)$ es introducido para obtener un mejor ajuste al modelo verdadero en el rango operativo de M . Considerando la esperanza de Y se tiene que

$$\begin{aligned}
E[Y] &= E[\beta_0(X)] + E[\beta_1(X, N)]M + E[\varepsilon] \\
&= \beta_0(X) + \beta_1(X)M + E[E(\varepsilon|N)] \\
&= \beta_0(X) + \beta_1(X)M,
\end{aligned}$$

donde $E[\beta_1(X, N)] = \beta_1(X)$. De aquí que un estimador razonable para M es

$$\hat{M} = \text{máx} \left\{ 0, \frac{Y - \beta_0(X)}{\beta_1(X)} \right\},$$

pues se considera que M es un valor positivo. Por la no linealidad en el estimador, es difícil obtener una expresión explícita para la medida de desempeño. Pero si $P(Y \leq \beta_0(X))$ es pequeña en el rango operativo de

M , entonces el estimador puede tomarse como $\hat{M} = (Y - \beta_0(X))/\beta_1(X)$. Ahora la varianza de \hat{M} se obtiene como

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{M}) &= \text{var}\left(\frac{Y - \beta_0(X)}{\beta_1(X)}\right) \\ &= \frac{\text{var}(Y)}{\beta_1^2(X)}, \end{aligned}$$

y como se hizo en el caso sin intercepto es fácil ver que

$$\begin{aligned} \text{var}(Y) &= E[\text{var}(Y|N)] + \text{var}[E(Y|N)] \\ &= E[\text{var}(\varepsilon|N)] + \text{var}[E(\beta_0(X)|N) + E(\beta_1(X, N)M|N)] \\ &= E[V(X, N)M^2] + \text{var}[\beta_0(X) + \beta_1(X, N)M] \\ &= E[V(X, N)M^2] + \text{var}[\beta_1(X, N)]M^2 \\ &= (E[V(X, N)] + \text{var}[\beta_1(X, N)])M^2 \\ &= \sigma_1^2(X)M^2, \end{aligned}$$

donde $\sigma_1^2(X) = E[V(X, N)] + \text{var}[\beta_1(X, N)]$. Y entonces

$$\text{var}(\hat{M}) = \frac{\sigma_1^2(X)M^2}{\beta_1^2(X)},$$

la cual proporciona una razón SN semejante a la de (20) con $\beta(X)$ reemplazada por $\beta_1(X)$. La Figura (3.1) muestra un esquema de los factores que entran en un sistema de medición, considerando la división de los factores de ruido en observables y no observables.

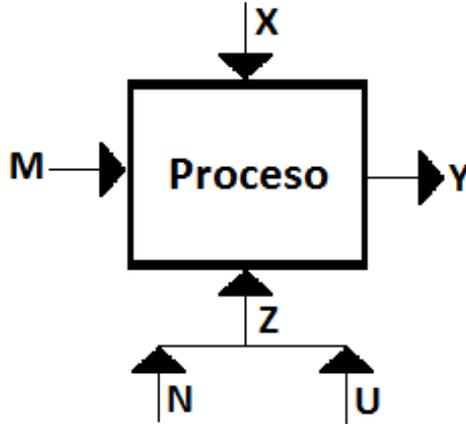


Figura 3.1: Esquema de factores que influyen en la variable respuesta de un sistema de medición, considerando la división de los factores de ruido en observables N y no observables U .

3.1.2. Con control

En ocasiones, no puede ser posible compensar todo lo referente al ruido observable N en la operación usual del sistema. Para compensar se divide N en $\{Q, R\}$, donde Q es el conjunto de factores de ruido on-line y R es el conjunto de factores de ruido off-line. Los factores de ruido on-line pueden ser fácilmente medidos y compensados durante la operación del sistema. Debe ser que estos efectos tengan un gran efecto en la respuesta; de otra manera, no valdría la pena aplicar una estrategia de compensación en ellos. En el ejemplo del sensor de oxígeno que se mencionó en un principio, Q es la temperatura sanguínea. Los factores de ruido

off-line son sistemáticamente variados en el experimento pero no son observables durante la operación del sistema. El uso de factores de ruido off-line mejora la eficiencia del diseño experimental de parámetro.

Considérese el mismo modelo que en (18),

$$Y = \beta(X, Q, R)M + \varepsilon, \quad (21)$$

donde $E(\varepsilon|Q, R) = 0$ y $var(\varepsilon|Q, R) = V(X, Q, R)M^2$. Como Q es medible durante el proceso, una corrección Feed-Forward es aplicada dependiendo de los valores de Q . Un sistema de medición con control se muestra gráficamente en la Figura 3.2. El control Feedback no es posible en sistemas de medición, porque el valor verdadero de la variable no es conocido durante la operación usual del sistema.

Sea $E[\beta(X, Q, R)|Q] = \beta(X, Q)$, y supóngase que $\beta(X, Q) > 0$ con probabilidad 1. Entonces de un valor observado de Y , M puede ser estimado como

$$\hat{M} = \frac{Y}{\beta(X, Q)}. \quad (22)$$

Nótese que a diferencia de (19), a la pendiente de (22) se le permite cambiar con los valores del ruido on-line. Para obtener la medida de desempeño para la optimización, la varianza de \hat{M} debe ser calculada. Esto se hace de la siguiente forma. Primero, note que \hat{M} es un estimador insesgado de M , porque

$$E(\hat{M}|Q) = \frac{E(Y|Q)}{\beta(X, Q)} = \frac{E[\beta(X, Q, R)|Q]M}{\beta(X, Q)} = M. \quad (23)$$

Para un valor dado de Q , la varianza es

$$var(\hat{M}|Q) = \frac{var(Y|Q)}{\beta^2(X, Q)} = \frac{\sigma^2(X, Q)M^2}{\beta^2(X, Q)}, \quad (24)$$

que se obtiene del siguiente resultado

$$\begin{aligned} var(Y|Q) &= E[var(Y|Q, R)|Q] + var[E(Y|Q, R)|Q] \\ &= E[V(X, Q, R)M^2|Q] + var[\beta(X, Q, R)M|Q] \\ &= \sigma^2(X, Q)M^2, \end{aligned}$$

donde $\sigma^2(X, Q) = E[V(X, Q, R)|Q] + var[\beta(X, Q, R)|Q]$.

Usando (23) y (24),

$$\begin{aligned} var(\hat{M}) &= E[var(\hat{M}|Q)] + var[E(\hat{M}|Q)] \\ &= E\left[\frac{\sigma^2(X, Q)M^2}{\beta^2(X, Q)}\right] + var(M) \\ &= E\left[\frac{\sigma^2(X, Q)}{\beta^2(X, Q)}\right]M^2. \end{aligned}$$

Llámesese $SN(X, Q) = \beta^2(X, Q)/\sigma^2(X, Q)$ la razón SN para un valor dado de Q . Entonces, la varianza de \hat{M} puede ser minimizada al minimizar $E\{1/SN(X, Q)\}$ para todo valor de M . Una medida de desempeño equivalente a maximizar es

$$\begin{aligned} PM(X) &= 1/E\{1/SN(X, Q)\} \\ &= 1/E\left\{\frac{E[V(X, Q, R)|Q] + var[\beta(X, Q, R)|Q]}{E^2[\beta(X, Q, R)|Q]}\right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Esta propuesta puede resumirse de la siguiente forma:

1. Encontrar $X^* \in D$ que maximice $PM(X)$ en (25).
2. Estimar $\hat{M} = Y/\beta(X^*, Q)$.

La razón SN en (20) se puede escribir como

$$SN(X) = \frac{E^2 [\beta (X, Q, R)]}{E [V (X, Q, R)] + var [\beta (X, Q, R)]}.$$

Comparando con (25), se observa que las medidas de desempeño para la optimización con y sin control son diferentes.

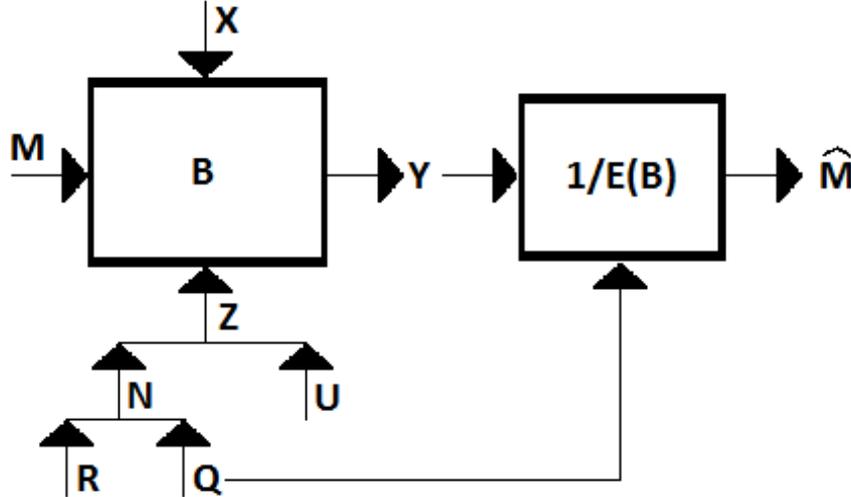


Figura 3.2: Esquema de factores que influyen en la variable respuesta de un sistema de medición, considerando la división de los factores de ruido en observables N y no observables U , con la característica de control.

3.1.3. Diseño de experimentos

Todo el enfoque puede ser considerado como evaluar el rendimiento de un sistema de control a diferentes niveles de las configuraciones de los factores de control y eligiendo una configuración que optimiza la medida de desempeño del sistema. Entonces un arreglo ortogonal entre X y los otros factores es intuitivamente atractivo. Sea $D(a)$ el diseño para los factores a , y sea $D(a) \otimes D(b)$ el arreglo cruzado entre dos conjuntos de factores a y b . Entonces el arreglo cruzado para el diseño robusto de parámetro de los sistemas de medición con control está dado por

$$D(X) \otimes D(R) \otimes D(Q) \otimes D(M) \quad (26)$$

Si el modelo (21) es verdadero, entonces M necesita no ser variado en el experimento, y las funciones β y V pueden ser estimadas a partir de los datos tras conducir el experimento con algún valor fijo de M . Sin embargo, usando un diseño para M con al menos dos niveles permitirá verificar esta hipótesis de modelado y de explorar, posiblemente, modelos más elaborados. El caso estudiado de Taguchi et al. (2000) sigue el diseño de experimentos en (26). Debido al cruce de varios factores, tales experimentos son mucho más grandes que los experimentos usuales sin un sistema de control. Una aproximación para reducir el número de corridas es usar la composición técnica de algunos factores de ruido. Un ejemplo de composición de factores de ruido se muestra en el ejemplo de moldeo por inyección. Como el ruido en línea tiene un significado especial en experimentos con sistemas de control, la composición debe ser aplicada solo en R y no en Q . Otra aproximación para reducir el número de corridas es usar arreglos simples en lugar de arreglos cruzados. Aquí, aparte de los efectos principales, el interés radica en la interacción entre los factores de control y los ruidos off-line. Por lo tanto, el diseño en (26) puede reducirse a

$$D(X, R, Q) \otimes D(M) \quad (27)$$

El criterio de diseño puede requerir algunas modificaciones para el uso en sistemas de control, debido a la presencia de dos tipos de factores de ruido. Entre las interacciones de dos factores, las interacciones control x ruido off-line son las más importantes, las interacciones control x ruido on-line y las interacciones control x control son las segundas y terceras más importantes, y las interacciones entre los factores de ruido son las menos importantes. Las interacciones de tres factores control x control x ruido off-line deben tener la misma importancia que las interacciones control x control, pues estas también pueden ser controladas para reducir los efectos de los ruidos off-line. El experimento debe ser diseñado de tal forma que los efectos principales sean al menos estimables. Esta tarea es más desafiante en sistemas de control debido a los diferentes tipos de factores.

Si el experimentador no está seguro de qué factores de ruido han de ser compensados antes de conducir el experimento, entonces (26) debe ser usado para el experimento. Esto habilitará al experimentador para identificar los ruidos on-line del conjunto de factores de ruido considerados en el experimento. Cuando los factores de ruido son del tipo de ruido interno (es decir, variaciones alrededor del valor nominal del factor), se necesita que no sean incluidos en el experimento. Esto puede reducir el tamaño de corridas del experimento considerablemente. El ejemplo de chapado de oro que se presenta en el capítulo 4 es de este tipo.

3.1.4. Estimación

Sea y_{ijklp} el valor medido de la característica en X_i , Q_j , R_k , y M_l , y la réplica p . Sea $Y_l = Y/M$. Considere el modelo (21). Supóngase que los errores son independientes y siguen una distribución normal. Entonces $y_{ijklp} = \beta(X_i, Q_j, R_k) + \varepsilon_{ijklp}$, donde $\varepsilon_{ijklp} \sim N(0, V(X_i, Q_j, R_k))$. Luego, se expresan $\beta(X, Q, R)$ y $\log V(X, Q, R)$ como modelos lineales en X , Q , y R . Un algoritmo iterativo para obtener los estimadores de máxima verosimilitud (MLEs) es de la siguiente forma:

1. Inicializar $\hat{\beta}(X_i, Q_j, R_k) = \bar{y}_{ijk..} = \frac{1}{LP} \sum_{l=1}^L \sum_{p=1}^P y_{ijklp}$.
2. Calcular $s_{ijk}^2 = \frac{1}{LP} \sum_{l=1}^L \sum_{p=1}^P \left\{ y_{ijklp} - \hat{\beta}(X_i, Q_j, R_k) \right\}^2$, donde $\hat{\beta}(X_i, Q_j, R_k)$ es el valor predicho de β en X_i , Q_j , y R_k . Usando s_{ijk}^2 como respuesta, estimar los parámetros en $\log V(X, Q, R)$ usando un modelo lineal generalizado gamma (GLM) con función liga log.
3. Ajustar $y_{ijklp} \sim \beta(X_i, Q_j, R_k)$ usando mínimos cuadrados ponderados con pesos $1/\hat{V}(X_i, Q_j, R_k)$, donde $\hat{V}(X_i, Q_j, R_k)$ es el valor predicho de V en X_i , Q_j , y R_k .
4. Repetir los pasos 2 y 3 hasta la convergencia.

Este algoritmo proporciona los estimadores de máxima verosimilitud de las funciones $\beta(X, Q, R)$ y $V(X, Q, R)$. Conectándolos en (25), se obtiene el estimador de máxima verosimilitud de la medida de desempeño. Si $LP = 1$, entonces el algoritmo necesita algunas modificaciones. Para este caso se comenzará con el paso 3 inicializando con $\hat{V}(X_i, Q_j, R_k) = 1$.

Si se tienen dudas sobre el modelo de la media, entonces es mejor omitir las iteraciones entre los pasos 2 y 3. Al hacerlo, se puede evitar transmitir cualquier error de modelado en el modelo de la media a la varianza del modelo. En el enfoque de máxima verosimilitud es conocido que subestima la función varianza, debido a que esto no se ajusta para la pérdida de grados de libertad para la estimación de la función de la media. Supóngase que n es el número de parámetros en $\beta(X, Q, R)$. Entonces el s_{ijk}^2 en el paso 2 puede ser inflado por el factor $IJKLP/(IJKLP - n)$ para reducir el sesgo. Este método produce un estimador restringido aproximado de máxima verosimilitud (ver McCullagh y Nelder 1989, sec. 10.5). Si la distribución de ε es desconocida, entonces se puede usar una extensión del criterio de cuasi-verosimilitud para estimar los parámetros por la especificación apropiada de las funciones liga y varianza.

El enfoque de modelado usado hasta ahora es precisamente el modelado *de la función respuesta* que se presentó en una subsección del capítulo anterior. El procedimiento de estimación para el modelado de la *me-*

didada de desempeño que también se presentó en una subsección del capítulo anterior, se discute a continuación. Mediante la absorción de R en U , el modelo en (18) puede reducirse a

$$Y = \beta(X, Q)M + \varepsilon \quad (28)$$

donde $E(\varepsilon|Q) = 0$ y $var(\varepsilon|Q) = \sigma^2(X, Q)M^2$. En contraste con el modelado de respuesta, aquí β y $\log \sigma^2$ no se expresan como modelos lineales en X y Q . En su lugar, son estimados directamente en cada combinación de X_i y Q_j . Para enfatizar esta diferencia, $\hat{\beta}(X_i, Q_j)$ es denotado por $\hat{\beta}_{ij}$ y $\hat{\sigma}^2(X_i, Q_j)$ por $\hat{\sigma}_{ij}^2$. Entonces

$$\hat{\beta}_{ij} = \bar{y}_{ij\dots} \text{ y } \hat{\sigma}_{ij}^2 = \frac{1}{LKP} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \sum_{p=1}^P (y'_{ijklp} - \hat{\beta}_{ij})^2,$$

y $S\hat{N}_{ij} = \hat{\beta}_{ij}^2 / \hat{\sigma}_{ij}^2$. Si los niveles de Q en el experimento pueden ser considerados como una muestra representativa de su distribución, entonces la medida de desempeño en (25) puede ser estimada como

$$P\hat{M}_i = \left(\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{1}{S\hat{N}_{ij}} \right)^{-1}. \quad (29)$$

Esto muestra que *la medida de desempeño para la optimización en un sistema de medición con control es la media armónica de las razones estimadas SN en cada uno de los niveles de los factores de ruido on-line*. El $\log PM$ puede ser expresado como un modelo lineal en X y estimar usando mínimos cuadrados ordinarios. Nótese que si se intenta usar el modelado de la medida de desempeño, entonces no se debe usar el diseño experimental en (27). El modelado de la medida de desempeño requiere cruce de los factores de ruido on-line con los otros factores; por lo tanto, el diseño en (26) o un diseño del tipo $D(X, R) \otimes D(Q) \otimes D(M)$ debe ser usado.

El modelo en (28) hace sentido solo si R tiene niveles aleatorios en el experimento, que no es el caso en la mayoría de los diseños experimentales robustos de parámetro. Por lo tanto, el modelado de la medida de desempeño no será tan eficiente estadísticamente como en el enfoque del modelado de respuesta. Además, el modelado de la medida de desempeño requiere un diseño de arreglo cruzado para el experimento, mientras que el modelado de la respuesta puede ser usado con cualquier tipo de diseño. Aunque el enfoque de modelado de la respuesta parece mejor, el modelado de la medida de desempeño tiene algunas ventajas en sistemas de control. El modelado de la respuesta requiere del modelado explícito de Q , y entonces cada error de modelado será transmitido a (25) y puede afectar el resultado. En el modelado de la medida de desempeño, $P\hat{M}_i$ en (29) puede ser estimado sin el modelado explícito de los ruidos on-line y entonces es insensible a las imprecisiones de la modelación. Una vez que la solución óptima X^* es obtenida, más datos pueden ser recolectados, manteniendo X fijo en X^* , y la respuesta puede ser modelada con respecto a Q para obtener una ley de control. Este enfoque es usado particularmente cuando β tiene una relación no lineal con Q .

3.2. Sistemas de respuesta simple

Supóngase que la característica de calidad de interés tiene un objetivo simple. En la literatura de diseño de parámetro, tal variable es conocida como la característica de lo nominal es mejor. El diseño robusto de parámetro con tal característica se conoce como diseño estático de parámetro (Taguchi 1987) o diseño de parámetro en sistemas de respuesta simple (Miller y Wu 1996). Como un ejemplo, considérese el ejemplo del proceso de blanqueo de grado de rayón de pulpa con hipoclorito. En este proceso de blanqueo, la pulpa es tratada con una solución de hipoclorito para reducir la viscosidad de la pulpa hasta un nivel deseado. Hay varios factores de control en el proceso, incluyendo el pH de la pulpa, temperatura de reacción, y tiempo de reacción. Los factores de ruido incluyen la consistencia de la pulpa, brillo de la pulpa, contenido de lignina, y otros. También, hay una gran variación en la viscosidad de la pulpa de entrada que es incontrolable en la etapa de blanqueo de hipoclorito. Si la viscosidad de entrada es alta, entonces la viscosidad de salida también será alta a menos que alguna acción correctiva sea tomada en el proceso. Es un ejercicio fútil intentar hacer el proceso robusto contra este factor de ruido particular, y el uso de un sistema de control es inevitable. Usualmente, la tasa de dosis de la solución de hipoclorito es ajustada para obtener la viscosidad requerida

como salida del proceso. La dosis puede ser ajustada dependiendo de los valores de la viscosidad de entrada o los valores de la viscosidad de salida, correspondiendo a los esquemas de control Feed-Forward y Feedback respectivamente. En este trabajo solo se considera el caso Feed-Forward; la Figura 3.3 muestra los factores involucrados en el sistema de respuesta simple, en el cual se indica la corrección Feed-Forward que se hace en el factor de ruido on-line Q .

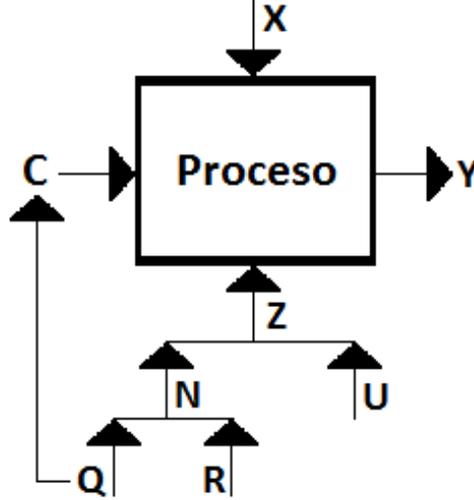


Figura 3.3: Esquema de factores que influyen en la variable respuesta de un sistema de respuesta simple, donde Q es el factor de ruido medible durante el proceso y C es la variable controlada en la que se aplica el control Feed-Forward.

Sea Y la respuesta de salida de la característica de calidad, y sea C la variable control. Una variable control es un factor de control seleccionado para ser ajustado continuamente para compensar por el efecto del ruido. Se trata de un factor de control que es fácil de ajustar durante el proceso y que tiene un gran impacto en la repuesta de salida. Los otros factores de control (X), una vez que sus niveles son elegidos, permanecen fijos durante la operación del proceso.

Considérese el modelo

$$Y = f(X, Q, R, C) + \varepsilon \quad (30)$$

donde ε es el error causado por los factores de ruido no observables (U), con $E(\varepsilon|Q, R) = 0$ y $var(\varepsilon|Q, R) = V(X, Q, R, C)$. La relación mencionada debe ser vista como la relación estado-estacionario entre los factores de entrada y la respuesta de salida, y por lo tanto la indexación de las variables con el tiempo t es evitada. Como se hizo para los sistemas de medición, supóngase que las funciones f y V son conocidas y derivan la medida de desempeño. En la práctica, estas funciones son estimadas a partir de los datos y están conectadas para obtener el estimador de la medida de desempeño. El diseño de experimentos es similar al que se discutió en la sección anterior, con la diferencia de que M es reemplazada por C .

Sea T el valor objetivo de la característica de calidad. Supóngase que un función de pérdida cuadrática es usada para medir la calidad de la respuesta de salida, esto es $L = (Y - T)^2$. Entonces la pérdida esperada para Q y R dados es

$$\begin{aligned} E(L|Q, R) &= E((Y - T)^2|Q, R) \\ &= E((f(X, Q, R, C) + \varepsilon - T)^2|Q, R) \\ &= E((f(X, Q, R, C) - T)^2 + 2\varepsilon(f(X, Q, R, C) - T) + \varepsilon^2|Q, R) \\ &= E((f(X, Q, R, C) - T)^2|Q, R) + E(2\varepsilon(f(X, Q, R, C) - T)|Q, R) + E(\varepsilon^2|Q, R) \\ &= (f(X, Q, R, C) - T)^2 + 2(f(X, Q, R, C) - T)E(\varepsilon|Q, R) + var(\varepsilon|Q, R) \\ &= (f(X, Q, R, C) - T)^2 + V(X, Q, R, C) \end{aligned}$$

Basados en el valor observado de Q , el valor de C puede ser ajustado para minimizar la pérdida esperada

promedio sobre la distribución de R dado Q . Esto proporciona la ley de control,

$$C^* = \arg \min_C E[E(L|Q, R)|Q] = \arg \min_C E(L|Q). \quad (31)$$

Entonces C^* es una función de X y Q . Sea $C^* = h(X, Q)$. Por consideraciones de costos o limitaciones del sistema, se puede pedir que el valor de C esté entre C_L y C_H . En tales casos, la optimización precedente se debe hacer restringiendo C en $[C_L, C_H]$. Ahora bien, Q es un conjunto de factores de ruido, y sus variaciones durante la operación del proceso son incontrolables. Por lo que X debe ser seleccionado para minimizar la pérdida esperada en $C = C^*$ tomado sobre la distribución de Q . Entonces el objetivo es encontrar un $X \in D$ que minimice

$$\begin{aligned} PM(X) &= E(L^*) = E[E(L^*|Q)] \\ &= E\{E[E(L^*|Q, R)|Q]\} \\ &= E\left\{E\left[(f(X, Q, R, h(X, Q)) - T)^2|Q\right]\right\} + E\{E[V(X, Q, R, h(X, Q))|Q]\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Se nombra $PM(X)$ una medida de desempeño independiente de control (PerMIC). Esta es una extensión de un concepto de medida de desempeño independiente de ajuste (PerMIA) a sistemas de control (ver Leon, Shoemaker, y Kacker 1987 y Leon y Wu 1992 para detalles de PerMIA). El PerMIC puede ser comparado con un PerMIA tratando a C como un parámetro de ajuste. Ambos son diferentes debido a la presencia de factores de ruido on-line. Es fácil mostrar que

$$E(L^*) = E\left\{\min_C E(L|Q)\right\} \leq \min_C E\{E(L|Q)\} = E(L_0^*),$$

donde $E(L_0^*)$ es la mínima pérdida esperada sin control. Aquí $E(L^*)$ es un PerMIA. La desigualdad precedente muestra que al instituir un sistema de control se mejorará el desempeño de un sistema. Pero el uso de un sistema de control es benéfico si la reducción en la pérdida de calidad $E(L_0^*) - E(L^*)$ es más grande que el costo de implementar el sistema de control. La propuesta se puede resumir de la siguiente forma:

1. Encontrar $X^* \in D$ que minimiza $PM(X)$ en (32).
2. Ajustar C usando la ley de control $C = h(X^*, Q)$.

Para la implementación en línea, la ley de control se escribe como $C_t = h(X^*, Q_t)$. Esta ley de control se obtiene asumiendo el modelo en (30). Por lo tanto, la ley de control es significativa solo si el proceso se encuentra en un estado de control estadístico. Si el proceso va fuera de control debido a algunas causas especiales, esta ley de control puede no ser válida. Por lo tanto, técnicas de control estadístico de procesos deben ser usadas para verificar la estabilidad de los procesos y tomar acciones correctivas (ver Montgomery 2001).

Para simplificar los cálculos en (31), C puede ser ajustado para que la media de Y alcance el objetivo. En ingeniería, tal estrategia de ajuste imparcial tiene mucho sentido. Entonces $C^* = h(X, Q)$, si existe, es una solución de C a partir de

$$E[f(X, Q, R, C)|Q] = T. \quad (33)$$

Por ejemplo, en el proceso de blanqueado de pulpa, la tasa de dosis de la solución de hipoclorito es ajustada dependiendo de la viscosidad de entrada a fin de obtener en promedio la viscosidad de salida en el objetivo. Sustituyendo (33) en (32) se tiene que

$$PM(X) = E\{var[f(X, Q, R, h(X, Q))|Q]\} + E\{E[V(X, Q, R, h(X, Q))|Q]\}. \quad (34)$$

La medida de desempeño ahora puede ser interpretada como *la variación en Y después de la acción de control*. En general, la medida de desempeño con un ajuste imparcial es diferente del PerMIC en (32). Un ejemplo se muestra a continuación.

Supóngase que $f(X, Q, R, C) = \beta(X, Q, R)C$ y $V(X, Q, R, C) = V(X, Q, R)C^2$. Entonces, de (31),

$$\begin{aligned}
C^* &= h(X, Q) \\
&= \arg \min_C E(L|Q) \\
&= \arg \min_C E((Y - T)^2|Q) \\
&= \arg \min_C E((f(X, Q, R, C) + \varepsilon - T)^2|Q) \\
&= \arg \min_C E((\beta(X, Q, R)C + \varepsilon - T)^2|Q) \\
&= \arg \min_C [E((\beta(X, Q, R)C - T)^2|Q) + E(2\varepsilon(\beta(X, Q, R)C - T)|Q) + E(\varepsilon^2|Q)] \\
&= \arg \min_C [E(\beta^2(X, Q, R)C^2 - 2T\beta(X, Q, R)C + T^2|Q) + 2(\beta(X, Q, R)C - T)E(\varepsilon|Q) + E(E(\varepsilon^2|Q, R)|Q)] \\
&= \arg \min_C [E(\beta^2(X, Q, R)|Q)C^2 - E(\beta(X, Q, R)|Q)2TC + E(T^2|Q) + 2(\beta(X, Q, R)C - T)E(E(\varepsilon|Q, R)|Q) \\
&\quad + E(V(X, Q, R)C^2|Q)] \\
&= \arg \min_C [(E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q))C^2 - E(\beta(X, Q, R)|Q)2TC + T^2].
\end{aligned}$$

Luego, derivando $E(L|Q)$ respecto de C se tiene

$$\frac{d}{dC}E(L|Q) = 2(E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q))C - E(\beta(X, Q, R)|Q)2T$$

y

$$\frac{d}{dC^2}E(L|Q) = 2(E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q)) > 0$$

igualando esta derivada a cero y resolviendo para C , se tiene

$$\begin{aligned}
&2(E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q))C - E(\beta(X, Q, R)|Q)2T = 0 \\
\iff &2(E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q))C = E(\beta(X, Q, R)|Q)2T \\
\iff &C = \frac{E(\beta(X, Q, R)|Q)2T}{2(E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q))} \\
\iff &C = \frac{T}{E(\beta(X, Q, R)|Q)} \frac{E^2(\beta(X, Q, R)|Q)}{(E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q))}.
\end{aligned}$$

Sea

$$SN(X, Q) = \frac{E^2[\beta(X, Q, R)|Q]}{E[V(X, Q, R)|Q] + var[\beta(X, Q, R)|Q]},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{SN(X, Q)}{1 + SN(X, Q)} &= \frac{SN(X, Q)}{1 + [E^2[\beta(X, Q, R)|Q] / (E[V(X, Q, R)|Q] + var[\beta(X, Q, R)|Q])]} \\
&= \frac{\frac{E^2[\beta(X, Q, R)|Q]}{E[V(X, Q, R)|Q] + var[\beta(X, Q, R)|Q]}}{\frac{E[V(X, Q, R)|Q] + var[\beta(X, Q, R)|Q] + E^2[\beta(X, Q, R)|Q]}{E[V(X, Q, R)|Q] + var[\beta(X, Q, R)|Q]}} \\
&= \frac{E^2[\beta(X, Q, R)|Q]}{E[V(X, Q, R)|Q] + var[\beta(X, Q, R)|Q] + E^2[\beta(X, Q, R)|Q]} \\
&= \frac{E^2[\beta(X, Q, R)|Q]}{E[V(X, Q, R)|Q] + E[\beta^2(X, Q, R)|Q]},
\end{aligned}$$

así pues

$$\begin{aligned}
C^* &= h(X, Q) \\
&= \frac{T}{E(\beta(X, Q, R)|Q)} \frac{E^2(\beta(X, Q, R)|Q)}{(E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q))} \\
&= \frac{T}{E[\beta(X, Q, R)|Q]} \frac{SN(X, Q)}{1 + SN(X, Q)},
\end{aligned} \tag{35}$$

y el PerMIC se obtiene como,

$$\begin{aligned} PM(X) &= E[E(L^*|Q)] \\ &= E[(E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q))C^{*2} - E(\beta(X, Q, R)|Q)2TC^* + T^2], \end{aligned} \quad (36)$$

primero observe que

$$\begin{aligned} &(E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q))C^{*2} \quad (37) \\ &= (E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q)) \left(\frac{T}{E(\beta(X, Q, R)|Q)} \frac{E^2(\beta(X, Q, R)|Q)}{(E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q))} \right)^2 \\ &= \frac{T^2}{E^2(\beta(X, Q, R)|Q)} \frac{(E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q))E^4(\beta(X, Q, R)|Q)}{(E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q))^2} \\ &= T^2 \frac{E^2(\beta(X, Q, R)|Q)}{(E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q))} \\ &= T^2 \frac{SN(X, Q)}{1 + SN(X, Q)}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} E(\beta(X, Q, R)|Q)2TC^* &= E(\beta(X, Q, R)|Q)2T \frac{T}{E(\beta(X, Q, R)|Q)} \frac{E^2(\beta(X, Q, R)|Q)}{(E(\beta^2(X, Q, R)|Q) + E(V(X, Q, R)|Q))} \quad (38) \\ &= 2T^2 \frac{SN(X, Q)}{1 + SN(X, Q)}. \end{aligned}$$

Entonces, juntando (37) y (38) en (36), se obtiene que

$$\begin{aligned} PM(X) &= E \left\{ T^2 \frac{SN(X, Q)}{1 + SN(X, Q)} - 2T^2 \frac{SN(X, Q)}{1 + SN(X, Q)} + T^2 \right\} \\ &= E \left\{ -T^2 \frac{SN(X, Q)}{1 + SN(X, Q)} + T^2 \right\} \\ &= T^2 E \left\{ \frac{1 + SN(X, Q) - SN(X, Q)}{1 + SN(X, Q)} \right\} \\ &= T^2 E \left\{ \frac{1}{1 + SN(X, Q)} \right\} \end{aligned}$$

Como T es el valor objetivo y permanece fijo, se considera el PerMIC como

$$PM(X) \equiv E \left\{ \frac{1}{1 + SN(X, Q)} \right\}.$$

Ahora, supóngase que una estrategia de ajuste imparcial es usada. Entonces, de (33) se tiene que

$$\begin{aligned} T &= E[f(X, Q, R, C)|Q] \\ &= E[\beta(X, Q, R)C|Q] \\ &= CE[\beta(X, Q, R)|Q] \end{aligned}$$

y despejando C , se puede usar

$$C^* = h(X, Q) = \frac{T}{E[\beta(X, Q, R)|Q]}. \quad (39)$$

El ajuste óptimo es más pequeño que el ajuste imparcial por un factor $SN(X, Q)/(1 + SN(X, Q))$. Una propiedad de reducción similar se encontró en Leon et al. (1987) en el caso de diseño de parámetro estático

sin control. De (34), la medida de desempeño queda como

$$\begin{aligned}
PM(X) &= E \{ var [f(X, Q, R, h(X, Q)) | Q] \} + E \{ E [V(X, Q, R, h(X, Q)) | Q] \} \\
&= E \{ var [\beta(X, Q, R)h(X, Q) | Q] + E [V(X, Q, R)h(X, Q)^2 | Q] \} \\
&= E \{ var [\beta(X, Q, R) | Q] h(X, Q)^2 + E [V(X, Q, R) | Q] h(X, Q)^2 \} \\
&= E \left\{ (var [\beta(X, Q, R) | Q] + E [V(X, Q, R) | Q]) \frac{T^2}{E^2 [\beta(X, Q, R) | Q]} \right\} \\
&= T^2 E \left\{ \frac{var [\beta(X, Q, R) | Q] + E [V(X, Q, R) | Q]}{E^2 [\beta(X, Q, R) | Q]} \right\} \\
&= T^2 E \left\{ \frac{1}{SN(X, Q)} \right\}.
\end{aligned}$$

Nuevamente como T es el valor objetivo y permanece fijo, la medida de desempeño se considera como

$$PM(X) \equiv E \left\{ \frac{1}{SN(X, Q)} \right\}, \quad (40)$$

que es similar a (25) en un sistema de medición. Esta medida de desempeño es diferente de la PerMIC.

El diseño de parámetro robusto de sistemas de respuesta simple con control fue también estudiado por Pledger (1996) y Mevik, Faergestad, Ellekjaer, y Naes (2001). En su propuesta, la pérdida no es promediada sobre la distribución de los ruidos on-line para encontrar X^* , por lo tanto X^* es una función de Q . Este enfoque es difícil de implementar en la práctica, particularmente cuando hay muchos factores de control en el sistema, porque todos tendrán que ser variados con el ruido on-line. Para superar esta situación, Berget y Naes (2002a, b) han propuesto obtener una solución de diseño de parámetro robusto para algunas categorías específicas y una clasificación óptima para las materias primas (el ruido on-line) para seleccionar las categorías. El enfoque propuesto en esta sección es diferente, porque solo una variable de control (C) es seleccionada del conjunto de factores de control y variado con el ruido on-line, que es la forma más común de control usada en la práctica. Los otros factores de control permanecen fijos en el diseño de parámetro robusto X^* . Este es probablemente un mejor enfoque en procesos continuos o cuando hay fluctuaciones excesivas en los ruidos on-line, porque solo un factor necesita ser ajustado frecuentemente. Sin embargo, en procesos por lotes, usar más de una variable control puede ser considerado.

3.3. Sistemas de objetivos múltiples

La optimización de sistemas de objetivos múltiples (también conocido como diseño de parámetro dinámico) comprende una importante clase de problemas en diseño de parámetro robusto. Descripciones detalladas de esto han sido dadas por Miller y Wu (1996), Tsui (1999), y Joseph y Wu (2002a, b). Como un ejemplo considere el proceso de moldeo por inyección (Wu y Wu 2000, p. 102). Debido a la diversidad de productos, los productos tendrán diferentes dimensiones. Dependiendo de los requerimientos de los consumidores, las dimensiones de diferentes partes pueden lograrse cambiando las dimensiones del molde. Ajustes finos para compensar los diversos factores de ruido en el proceso pueden ser hechos a través de la presión de inyección. Entonces, aquí las dimensiones del molde son el factor señal (M) y la presión de inyección es la variable control (C). Se considera solamente el caso Feed-Forward. La Figura 3.4 muestra gráficamente el sistema de objetivos múltiples y los factores que intervienen en dicho sistema.

Sea

$$Y = f(X, Q, R, M, C) + \varepsilon, \quad (41)$$

donde $E(\varepsilon|Q, R) = 0$ y $var(\varepsilon|Q, R) = V(X, Q, R, M, C)$. Supóngase que para un propósito (T) dado por un cliente, la pérdida es medida usando la función de pérdida cuadrática, $L = (Y - T)^2$. La medida de desempeño para sistemas de objetivos múltiples sin control fue discutida por Joseph y Wu (2002a, b). El

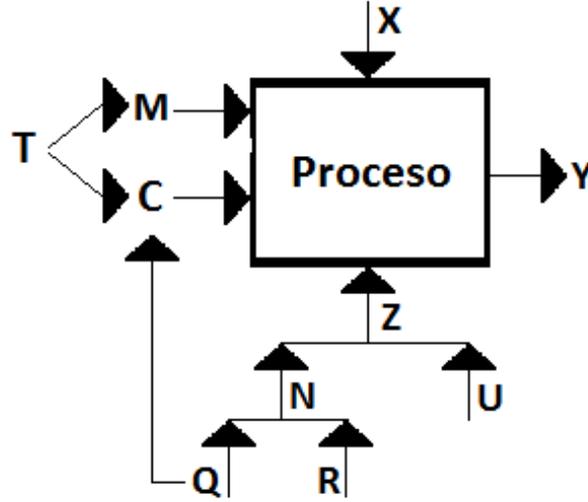


Figura 3.4: Esquema de factores que influyen en la variable respuesta de un sistema de objetivos múltiples, donde Q es el factor de ruido medible durante el proceso, C es la variable control en la que se aplica el control Feed-Forward, y M es el factor señal.

concepto PerMIC puede ser extendido para sistemas de objetivos múltiples con control como

$$\begin{aligned}
 PM(X) &= \int E(L^*)dF(T) \\
 &= \int \min_M E \left\{ \min_C E(L|Q) \right\} dF(T) \\
 &= \int E \left\{ (f(X, Q, R, M^*, C^*) - T)^2 \right\} + E \{ V(X, Q, R, M^*, C^*) \} dF(T)
 \end{aligned} \tag{42}$$

donde $F(T)$ es la distribución de los propósitos del cliente. Entonces, se tiene que la ley de control óptima dada por:

$$C^* = \arg \min_C E(L|Q), \tag{43}$$

y el ajuste óptimo de señal dado por:

$$M^* = \arg \min_M E \left\{ \min_C E(L|Q) \right\}, \tag{44}$$

son usados. Sea $C^* = h(X, Q, M, T)$ y $M^* = g(X, T)$. La propuesta puede resumirse como:

1. Encontrar $X^* \in D$ que minimice $PM(X)$ en (42).
2. Ajustar M en función de T como $M = g(X^*, T)$.
3. Ajustar C en función de Q y T como $C = h(X^*, Q, g(X^*, T), T)$.

En muchos sistemas, una solución única a (43) y (44) puede no existir. En tales casos M^* puede ser determinado fijando C en algún valor. También, los ajustes óptimos en (43) y (44) pueden ser reemplazados por ajustes imparciales si es que existen. Estas situaciones son ilustradas con dos ejemplos.

Ejemplo 1. Sea $f(X, Q, R, M, C) = \beta(X, Q, R)MC$ y $V(X, Q, R, M, C) = V(X, Q, R)M^2C^2$. Claramente, no hay solución única para (43) y (44). Supóngase que $[C_L, C_H]$ es el intervalo de preferencia para ajustar C . Entonces la señal de ajuste se encuentra fijando C en algún valor del intervalo, por ejemplo, $C_0 = (C_L + C_H)/2$. Para un ajuste imparcial,

$$M^* = \frac{T}{C_0 E[\beta(X, Q, R)]}.$$

Usando nuevamente un ajuste imparcial para C , se obtiene $C^* = T/E[\beta(X, Q, R)M|Q]$. En $M = M^*$,

$$C^* = C_0 \frac{E[\beta(X, Q, R)]}{E[\beta(X, Q, R)|Q]}.$$

Nótese que aquí, C^* no depende de T . La medida de desempeño en (42) evaluada en los valores precedentes de M^* y C^* se convierte en

$$\begin{aligned} PM(X) &= E \left\{ \frac{E[V(X, Q, R)|Q] + \text{var}[\beta(X, Q, R)|Q]}{E^2[\beta(X, Q, R)|Q]} \right\} \\ &= E \left\{ \frac{1}{SN(X, Q)} \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

que es la misma que la medida de desempeño en (40). Es importante notar que en este caso particular, la distribución de T debe ser conocida para obtener la medida de desempeño.

Ejemplo 2. En muchos sistemas, el factor señal y la variable control son el mismo. Por ejemplo, en un automóvil, para el sistema de dirección la rotación del volante puede ser usada como señal y control, y para el sistema de frenado, la fuerza aplicada en el pedal también puede ser usada como señal y control. Tal factor puede ser representado como $M + C$, donde M denota el ajuste inicial para lograr el objetivo y C representa el buen ajuste del factor alrededor de su valor inicial. Considere el siguiente caso: $f(X, Q, R, M, C) = \beta(X, Q, R)(M + C)$ y $V(X, Q, R, M, C) = V(X, Q, R)(M + C)^2$. Aquí M debe ser determinado fijando $C = 0$. entonces, para un ajuste imparcial, $M^* = T/E[\beta(X, Q, R)]$ y $C^* = T/E[\beta(X, Q, R)|Q] - T/E[\beta(X, Q, R)]$. La medida de desempeño es la misma que la de (45). Es señalado que para automóviles, en práctica el conductor usará control Feedback para los ajustes, un tema no desarrollado aquí.

4. Ejemplos

Este capítulo está enfocado en mostrar con ejemplos la teoría de los capítulos anteriores. Se consideran dos ejemplos. El primero es un experimento de moldeo por inyección, en el cual se aplica la teoría del diseño robusto de parámetros en sistemas señal-respuesta. El segundo es un ejemplo de optimización de un proceso de chapado de oro, en el cual se aplica la teoría del diseño robusto de parámetro con control Feed-Forward.

Estos ejemplos son de gran importancia por varias razones. Lo primero es que permiten conocer el funcionamiento del diseño robusto en experimentos reales, pues se muestran factores que no pueden ser controlados fácilmente (factores de ruido) y se hace la procede a realizar la optimización con el diseño robusto de parámetro. Para el primer ejemplo, es posible realizar el modelado y análisis con las dos estrategias mostradas en la subsección 2.5.8 (PMM y RFM), y a partir de esto determinar que metodología puede ser mejor. La segunda razón para analizar los ejemplos es que se pueden aplicar estrategias de control para reducir los efectos causados por los factores de ruido. El segundo ejemplo muestra claramente los factores de ruido que surgen en el proceso de chapado de oro, y se determina el factor de ruido que puede ser medido durante el proceso con el fin de aplicar una ley de control. En este ejemplo también se hará uso de las herramientas gráficas descritas en el capítulo 2 para identificar los factores significativos.

4.1. Un experimento de moldeo por inyección

Se considera un experimento de moldeo por inyección reportado por Miller y Wu (1996). El sistema (maquina de moldeo por inyección) es usado para inyectar diferentes cantidades de material para diferentes aplicaciones. Entonces, es necesario un método confiable para controlar la cantidad de material inyectado. El peso de la pieza fue considerado como la variable respuesta y , y la presión alta de inyección fue elegida como el factor señal M debido a su habilidad para cambiar la cantidad de material inyectado. Se incluyeron siete factores de control para el experimento, cada uno de ellos con dos niveles. En el Cuadro 4.1 se muestran los factores de control y los valores de sus niveles. Estos factores fueron elegidos porque se cree que tienen el potencial de modificar la variabilidad en el peso de la pieza. Para este experimento se identificaron cuatro factores de ruido: índice de fusión, porcentaje de remolido, operador y humedad de la resina. Usando un diseño factorial fraccionado para estos cuatro factores de ruido, se requerirían al menos ocho réplicas de ruido (debido a que en un diseño con cuatro corridas no es posible estudiar los cuatro factores). Por lo tanto, para reducir el tamaño de corridas y el costo experimental, se seleccionaron niveles de los factores de ruido a manera de conformar un factor de ruido compuesto de dos niveles. Este factor de ruido compuesto y sus niveles se muestran en el Cuadro 4.2.

El experimento se realizó durante dos días. Durante el primer día, el factor de ruido compuesto fue configurado en el nivel bajo y los factores de control fueron variados de acuerdo a un diseño 2^{7-4} que se muestra en el Cuadro 4.3. Para cada combinación de los factores de control, el factor señal fue variado de 650 a 1000 psi en incrementos de 50-psi. Cuatro piezas fueron hechas y pesadas para cada nivel de presión. Durante el segundo día, el procedimiento se repitió pero ahora con el nivel alto de del factor de ruido compuesto. Los datos completos, incluyendo el peso de la pieza (denotado por y) y el nivel de presión correspondiente (nivel del factor señal M), se muestran en el Cuadro 4.4 y en el Cuadro 4.5.

Lo primero en el análisis, es identificar una medida de desempeño (PM) adecuada. Supóngase que el sistema debe ser capaz de obtener valores de 650 a 700. Este rango de valores puede obtener para todas las combinaciones de factores de control y ruido usadas en el experimento. Una medida de desempeño razonable es la variación de la respuesta sobre este rango.

Las Figura 4.1 y en la Figura 4.2 muestran gráficamente los ajustes de modelos cuadráticos hechos a los datos (y, M). La Figura 4.1 muestra los ajustes para cada una de las combinaciones de los factores de control en el nivel bajo del factor de ruido. La Figura 4.2 muestra los ajustes para cada una de las combinaciones de los factores de control en el nivel alto del factor de ruido.

La Figura 4.3 muestra los residuales de los modelos ajustados para el nivel bajo del factor de ruido, mientras que la Figura 4.4 lo hace para el nivel alto del factor de ruido. Aunque el modelo cuadrático parece razonable, se observa un comportamiento sistemático en las gráficas de los residuales. En la mayoría de las gráficas de residuales se observa un comportamiento descrito en tres pasos:

Factor	Nivel	
	-	+
A. Velocidad de inyección	0.0	2.0
B. Tiempo de presión (segundos)	44	49
C. Tiempo de inyección alta (segundos)	6.3	6.8
D. Tiempo de inyección baja (segundos)	17	20
E. Cantidad de presión (psi)	1700	1900
F. Enfriamiento por agua ($^{\circ}F$)	70	80
G. Presión de baja inyección (psi)	550	650

Cuadro 4.1: Factores de control para el experimento de moldeo por inyección

Clasificación	Factor de Ruido	Nivel
$N = -1$	índice de fundido	18
	% de remolido	5%
	operador	nuevo
$N = 1$	humedad de resina	alto
	índice de fundido	22
	% de remolido	0%
	operador	experimentado
	humedad de resina	bajo

Cuadro 4.2: Factor de ruido compuesto para el experimento de moldeo por inyección

Tratamiento	Factores de control						
	A	B	C	D	E	F	G
1	+	-	-	-	+	-	+
2	+	-	-	+	-	+	-
3	+	+	+	-	+	+	-
4	+	+	+	+	-	-	+
5	-	-	+	-	-	-	-
6	-	-	+	+	+	+	+
7	-	+	-	-	-	+	+
8	-	+	-	+	+	-	-

Cuadro 4.3: Diseño para los factores de control en el experimento de moldeo por inyección

Tratamiento	Niveles del Factor Señal								N
	650	700	750	800	850	900	950	1000	
1	639.7	642.3	645.5	653.9	666.6	672.1	692.2	711.6	-1
	640.5	641.7	644.8	655.1	665.8	670.8	690.6	710.8	
	636.2	643.6	646.1	654.7	667.1	673.3	689.7	711.1	
	637.2	644.0	644.3	654.2	665.4	671.1	689.8	710.5	
2	634.4	639.9	642.6	650.2	659.9	666.8	678.4	708.3	-1
	632.9	640.8	640.4	651.6	660.3	660.3	682.6	710.1	
	633.7	641.1	643.1	650.9	657.9	659.8	681.8	707.7	
	635.8	642.4	641.9	653.2	662.1	661.5	683.2	706.6	
3	640.2	646.1	647.2	655.5	666.2	671.0	688.6	708.9	-1
	638.1	644.4	646.0	654.0	667.3	673.6	687.5	710.0	
	637.3	644.4	647.5	653.8	669.1	672.4	691.0	711.3	
	639.1	641.2	644.3	652.8	664.7	672.2	693.1	708.4	
4	641.1	644.5	647.2	652.0	665.3	669.2	688.7	709.8	-1
	642.1	647.3	644.8	654.6	661.0	671.1	690.4	710.1	
	642.0	642.8	646.0	653.8	659.7	670.1	686.3	707.7	
	641.8	643.9	646.3	651.7	662.4	671.1	685.8	706.4	
5	640.8	644.7	647.6	652.3	661.1	673.0	685.7	706.4	-1
	641.1	645.3	646.8	654.5	662.8	673.2	686.7	707.7	
	641.2	644.6	647.3	653.9	659.2	672.5	686.2	706.9	
	641.6	645.0	647.5	653.6	659.9	673.7	686.1	706.3	
6	650.4	655.4	659.7	665.8	671.0	677.7	695.6	716.5	-1
	650.8	655.0	660.2	665.9	670.8	677.5	696.8	717.0	
	651.2	654.6	660.3	665.9	671.2	678.2	694.3	718.3	
	650.7	654.9	659.3	666.4	670.5	677.8	696.1	717.6	
7	639.6	643.8	648.2	655.7	665.2	674.8	691.7	710.1	-1
	639.4	644.2	647.3	656.0	664.8	675.3	691.4	711.4	
	639.9	644.1	647.2	655.5	664.3	675.0	691.8	710.3	
	640.0	644.4	647.8	656.2	663.9	675.1	692.3	711.1	
8	636.5	641.8	645.2	653.8	662.8	671.8	689.4	709.7	-1
	636.2	640.6	646.1	653.9	662.3	671.6	689.1	709.6	
	635.7	640.5	645.5	653.9	662.1	671.6	689.6	709.7	
	636.1	640.3	645.0	653.6	662.4	671.6	689.3	709.3	

Cuadro 4.4: Datos con el nivel bajo del factor de ruido del experimento de moldeo por inyección

Tratamiento	Niveles del Factor Señal								N
	650	700	750	800	850	900	950	1000	
1	640.1	644.4	647.6	655.2	664.8	674.4	693.2	709.8	1
	641.2	646.2	646.3	657.3	669.7	671.3	689.4	714.2	
	633.6	642.8	647.2	656.4	668.3	676.7	691.1	717.2	
	638.2	643.9	647.8	658.0	669.2	675.1	695.3	704.5	
2	638.6	645.3	645.5	655.1	662.1	670.8	692.3	711.8	1
	636.3	640.2	642.1	654.3	663.6	668.2	691.1	712.3	
	634.4	641.8	642.1	653.3	660.7	672.3	690.5	714.6	
	638.2	641.1	644.3	654.6	667.1	674.3	686.7	710.1	
3	642.6	648.3	650.0	657.3	666.3	675.2	695.2	714.6	1
	640.2	642.9	648.2	659.4	667.3	674.4	691.4	713.7	
	641.6	646.1	647.9	658.1	670.1	676.6	689.9	714.2	
	639.9	645.2	649.9	660.0	671.5	678.2	699.2	709.9	
4	643.8	649.8	650.6	658.3	666.2	673.2	696.6	713.8	1
	641.6	646.3	649.7	657.9	666.8	675.8	691.2	711.7	
	642.2	645.2	648.2	659.1	670.2	675.8	690.2	711.8	
	643.6	647.2	650.1	660.0	671.8	678.2	690.6	712.2	
5	642.6	645.6	647.9	654.6	666.8	672.3	687.9	709.8	1
	641.8	645.8	648.2	655.2	665.7	674.6	688.8	710.2	
	642.0	645.7	648.0	654.7	665.8	673.9	689.3	711.3	
	642.3	646.0	647.8	654.9	669.2	675.4	688.6	710.7	
6	650.6	655.7	660.2	667.8	671.1	678.9	694.7	718.4	1
	650.2	656.2	659.7	666.5	672.0	679.3	693.3	720.2	
	651.3	655.5	659.4	666.7	671.7	679.1	696.8	716.6	
	650.1	656.0	658.9	666.6	671.4	678.6	692.1	717.0	
7	639.9	644.1	647.6	656.3	664.8	675.3	693.1	709.9	1
	640.2	644.6	648.0	656.0	665.2	674.7	692.8	711.4	
	640.3	645.0	648.2	656.4	665.1	674.9	691.9	712.2	
	640.1	644.7	647.8	656.7	665.5	675.2	692.4	711.6	
8	637.7	642.9	647.3	651.1	665.0	673.2	689.6	710.9	1
	638.1	643.4	647.3	655.4	664.7	672.8	689.9	709.3	
	638.2	643.0	646.8	655.4	664.5	673.4	690.7	708.6	
	638.4	642.9	647.0	655.2	664.8	672.8	690.2	709.1	

Cuadro 4.5: Datos con el nivel alto del factor de ruido del experimento de moldeo por inyección

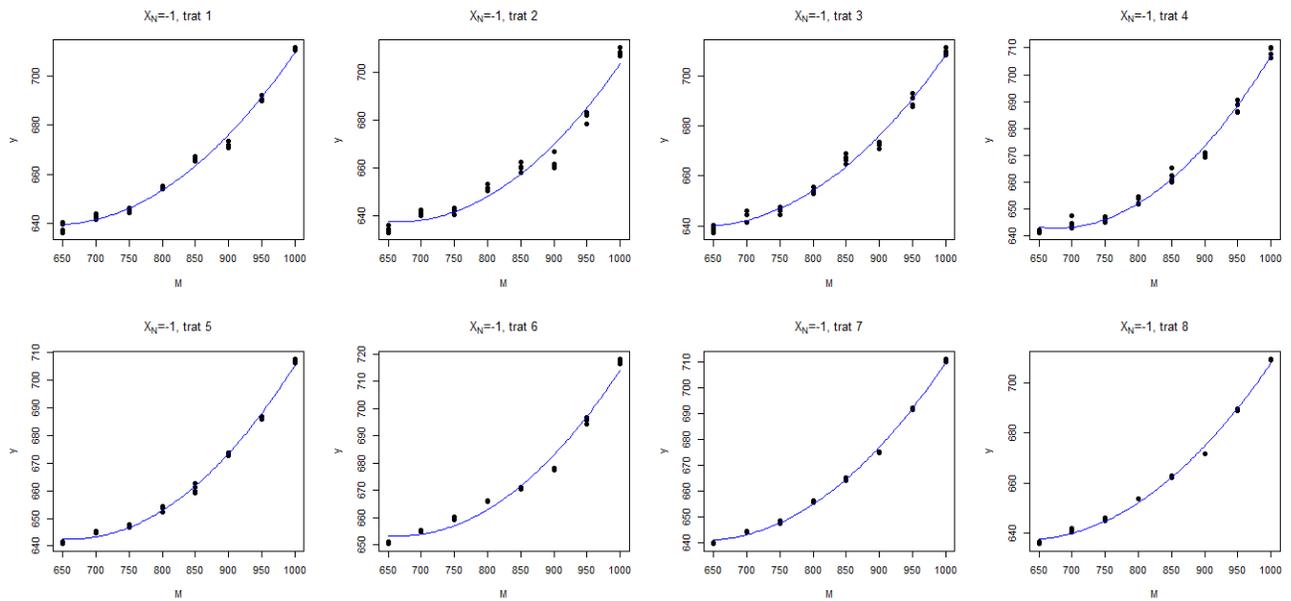


Figura 4.1: Modelos cuadráticos ajustados para los datos de moldeo por inyección, donde el factor de ruido toma el valor -1.

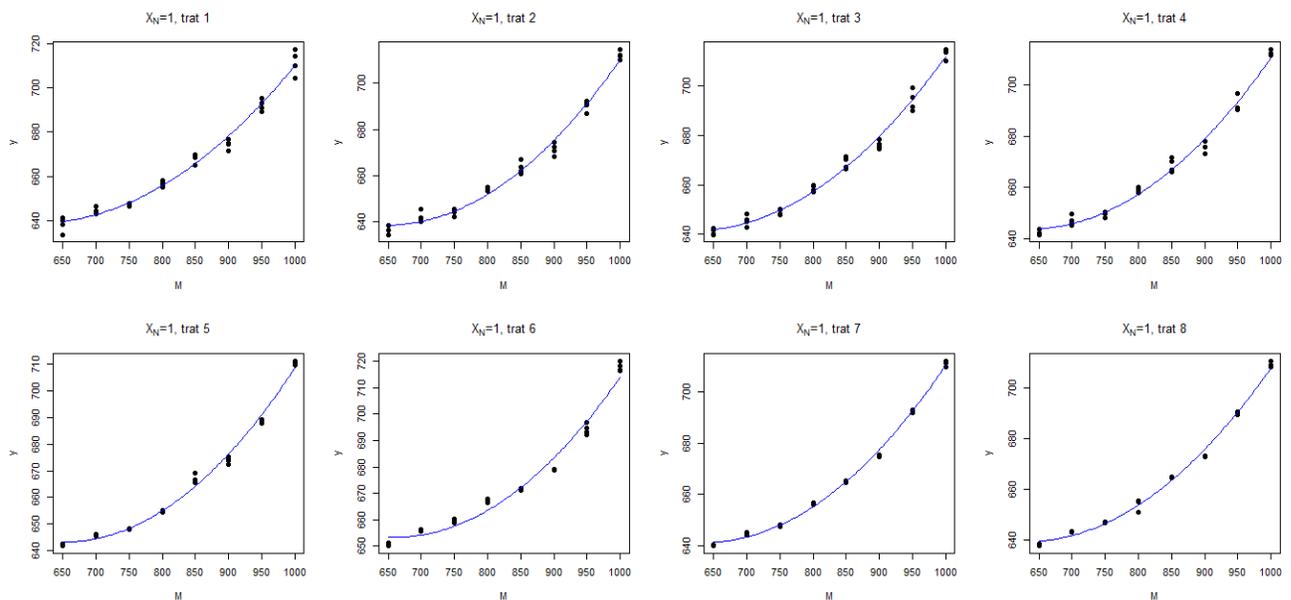


Figura 4.2: Modelos cuadráticos ajustados para los datos de moldeo por inyección, donde el factor de ruido toma el valor 1.

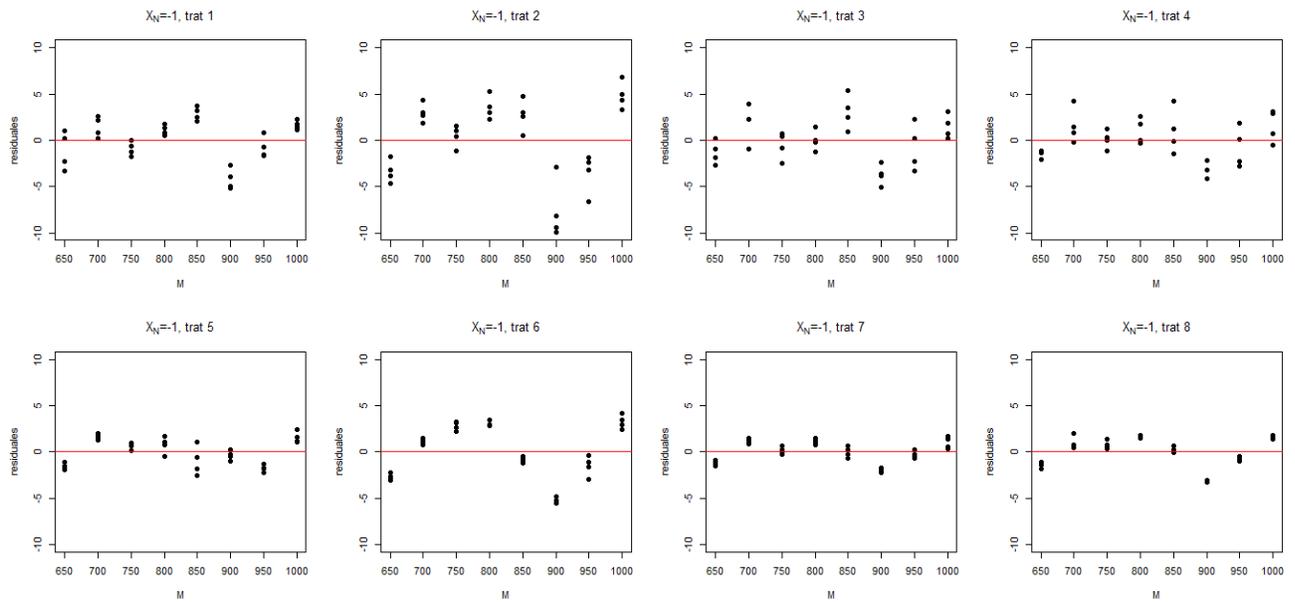


Figura 4.3: Residuales para los datos de moldeo por inyección, donde el factor de ruido toma el valor -1.

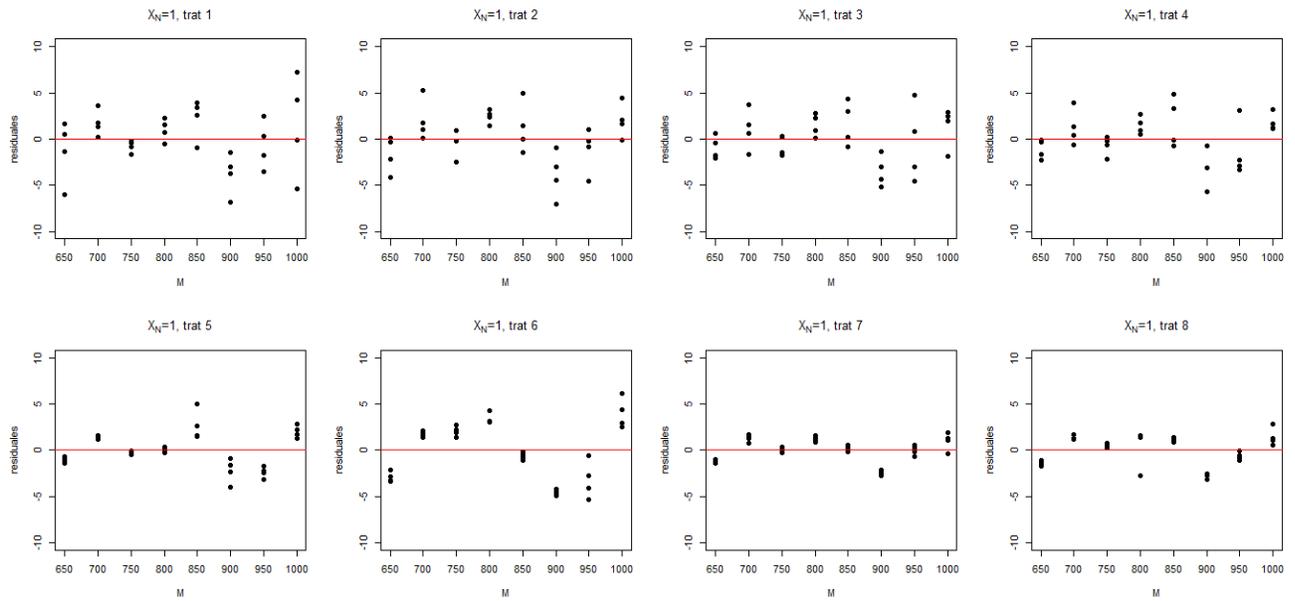


Figura 4.4: Residuales para los datos de moldeo por inyección, donde el factor de ruido toma el valor 1.

- 1 Para el incremento del factor señal que va de 650 psi a 700 psi, hay un crecimiento en los residuales.
- 2 En el valor 750 psi para el factor señal, se observa que los residuales son menores que en el factor señal igual a 700 psi. A partir de los 750 psi hasta los 850 psi, se observa nuevamente un comportamiento creciente en los residuales.
- 3 Nuevamente, a partir del valor 900 psi para el factor señal, se observa un comportamiento similar al descrito en el punto anterior.

Para ver si es posible obtener un mejor modelo, se puede hacer un proceso de selección haciendo una prueba secuencial agregando términos de mayor orden a los modelos. Como el objetivo de este ejemplo no es ver este tipo de pruebas, se hará uso del resultado de la prueba secuencial que se menciona en la fuente de donde se tomó este ejemplo. El resultado de la prueba secuencial dice que en 12 de los 16 casos, el modelo cuadrático es adecuado, y que en los otros 4 casos se agregó el término cúbico. Esto indica que la mejora que puede generar el agregar términos de mayor orden no es significativa.

Si el comportamiento observado ocurre sin importar las combinaciones de los factores de control y ruido, este no será explicado por estos factores. Posiblemente la mejor explicación a este comportamiento es que la presión alta de inyección actual presenta algunas diferencias con el factor señal. Por ejemplo, cuando $M = 850$ la mayoría de los residuales son positivos, lo cual podría indicar que la presión alta de inyección es mayor al valor nominal 850. Cuando $M = 900$, todos los residuales son negativos, lo cual ahora parece indicar que la presión alta de inyección es menor al valor nominal 900. Sea cual sea la explicación real del comportamiento de los residuales, es claro que un modelo más complicado no resolverá el comportamiento visto.

Siendo que el modelo cuadrático representa adecuadamente las características esenciales de la relación señal-respuesta, se usará el siguiente modelo para ajustar los datos:

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 M + \beta_2 M^2. \quad (46)$$

El parámetro β_1 representa el componente lineal de la relación señal-respuesta y β_2 la salida cuadrática de la linealidad.

4.1.1. Análisis PMM

Primero, se estima la medida de desempeño PM para cada combinación de factores en el Cuadro 4.4 y en el Cuadro 4.5. De las gráficas de los residuales parece razonable suponer varianza constante a través de los niveles del factor señal. Para cada renglón en el Cuadro 4.4 y en el Cuadro 4.5, el estimador de mínimos cuadrados de la varianza, s^2 , para el modelo cuadrático ajustado (46) es considerado como el estimador de la PM . Debido a que hay dos réplicas de ruido ($N = \pm 1$) para cada combinación de factores de control, s^2 es estimado usando los datos con $N = +1, -1$. Lo siguiente es usar $\ln s^2$ como la respuesta en el análisis PMM. Los valores de $\ln s^2$ para las ocho combinaciones de factores de control en el Cuadro 4.4 y en el Cuadro 4.5 son:

$$(2,000, 2,616, 1,842, 1,617, 1,046, 2,241, 0,373, 0,961)^T.$$

La Figura 4.5 muestra los residuales para cada combinación de los factores de control con $N = \pm 1$, donde se sigue observando el comportamiento antes descrito. En la Figura 4.6 se muestra la gráfica semi-normal de los efectos de los factores para $\ln s^2$. De acuerdo con el método de Lenth en un nivel $\alpha = 0,2$, esta gráfica no muestra claramente que los factores de control tengan un efecto significativo sobre la medida de desempeño PM . Sin embargo, parece que B , A , y D requieren de consideraciones adicionales. Como este análisis no sugiere algún factor significativo para reducir la varianza s^2 , no hace sentido implementar el segundo paso del procedimiento de dos pasos para el análisis PMM, que es modelar $\ln s^2$ en función de los factores de control.

4.1.2. Análisis RFM

La primera parte es ajustar el modelo cuadrático. Dado que hay cuatro réplicas en cada nivel del factor señal, es posible separar la varianza del error en un componente generado por la pérdida de ajuste y un componente causado por las réplicas o error puro. El componente de réplica, denotado por $\hat{\sigma}_p^2$, refleja la

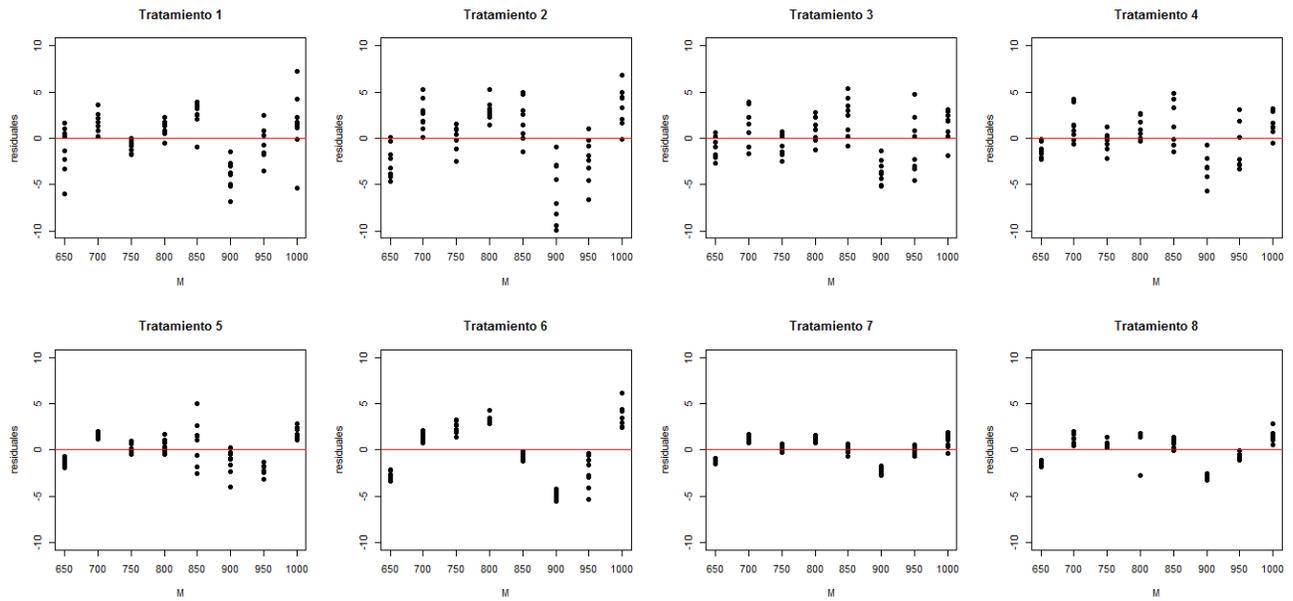


Figura 4.5: Residuales para los datos de moldeo por inyección, considerando los dos niveles del factor de ruido.

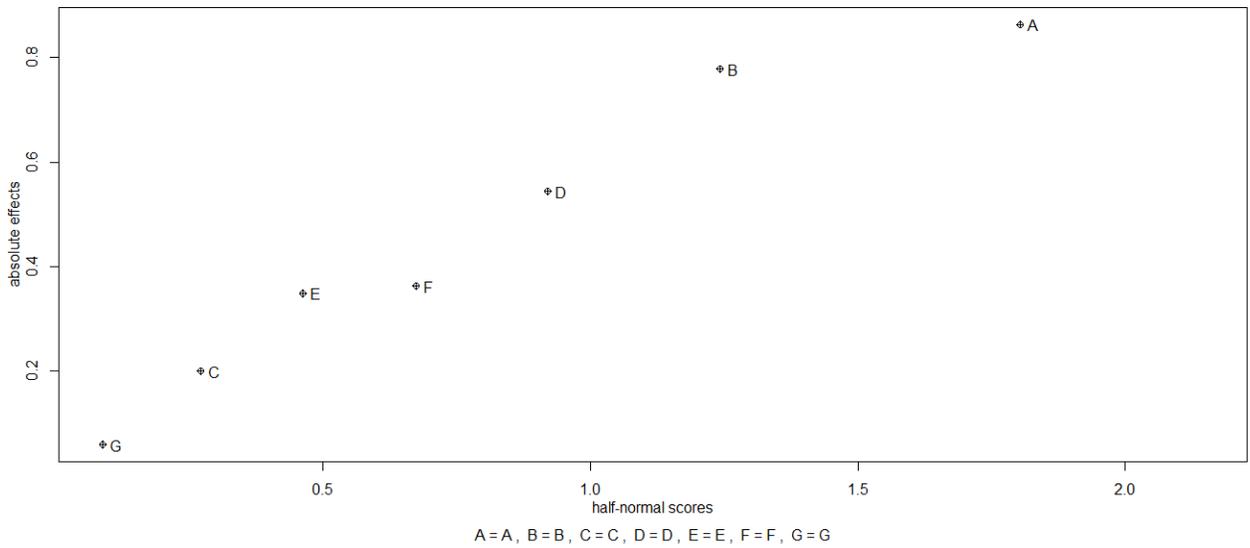


Figura 4.6: Gráfica Semi-Normal para $\ln s^2$.

variación parte a parte tomada en un intervalo corto de tiempo, ya que mide la variación del peso de la pieza por las cuatro piezas que fueron moldeadas en cada ajuste de la presión alta de inyección. Este componente se estima mediante

$$\frac{1}{n-m} \sum \sum (y_{ij} - y_{i\bullet})^2,$$

donde n es número de corridas y m es el número de tratamientos. El componente por pérdida de ajuste se denota por $\hat{\sigma}_l^2$, el cual representa el mayor término de variación y, como se vio antes, contiene un componente no explicado que puede ser causado por errores sistemáticos en los valores registrados para el factor de señal. Este componente se estima mediante

$$\frac{1}{m-g} \sum n_i (\hat{y}_{ij} - y_{i\bullet})^2,$$

donde n_i es el número de réplicas en el tratamiento i , y g es el número de factores estimados. Para cada una de las combinaciones de factores considerando el nivel del factor de ruido por separado, se tiene que el número de corridas es $n = 32$, el número de tratamientos es $m = 8$ y el número de factores estimados es $g = 3$ (modelo cuadrático). Nuevamente, se usa la transformación logaritmo para analizar por separado $\ln \hat{\sigma}_p^2$ y $\ln \hat{\sigma}_l^2$. El Cuadro 4.6 muestra los valores estimados de para $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \sigma_l^2$ y σ_p^2 .

T	N = -1					N = 1				
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\sigma}_l^2$	$\hat{\sigma}_p^2$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\sigma}_l^2$	$\hat{\sigma}_p^2$
1	857.6	-0.684	0.00054	27.514	1.202	812.3	-0.569	0.00047	22.478	7.785
2	901.2	-0.791	0.00059	107.253	3.206	808.8	-0.748	0.00058	28.424	4.451
3	842.2	-0.640	0.00051	25.394	2.702	831.2	-0.610	0.00049	17.153	4.993
4	925.9	-0.836	0.00062	14.573	2.642	847.2	-0.640	0.00050	19.248	3.532
5	889.1	-0.742	0.00056	10.188	0.563	875.6	-0.711	0.00054	19.737	0.674
6	896.9	-0.731	0.00055	53.119	0.300	885.1	-0.701	0.00053	59.142	1.003
7	852.0	-0.664	0.00052	7.232	0.168	854.7	-0.670	0.00053	9.231	0.213
8	843.9	-0.654	0.00052	15.869	0.124	838.0	-0.631	0.00050	12.852	0.754

Cuadro 4.6: Parámetros estimados en el análisis RFM

En la segunda etapa del análisis RFM, los efectos de los factores de control y ruido en estos parámetros son evaluados. La Figura 4.7 muestra las gráficas Semi-Normales para los dos componentes de variación. La Figura 4.8 muestra las gráficas Semi-Normales para los parámetros $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$. Las combinaciones de los factores de control y ruido en el Cuadro 4.4 y en el Cuadro 4.5 pueden verse como un arreglo cruzado, donde el arreglo interno corresponde al mostrado en el Cuadro 4.3 y el arreglo externo corresponde a los dos niveles del factor de ruido compuesto. Entonces, el **Teorema 1** del apéndice afirma que los efectos principales de control y ruido son elegibles y las siete interacciones control-ruido son claras.

Para $\hat{\beta}_0$, usando $\alpha = 0,20$ en el método de Lenth, se observa que los efectos que parecen ser significativos son E, D , y N . Para $\hat{\beta}_1$ los efectos que aparecen como significativos son E, D , y N . Para $\hat{\beta}_2$ se tiene que los efectos significativos son los de los efectos principales E, D, N y B , y las interacciones AN y FN . Para $\ln(\hat{\sigma}_l^2)$ se observó que los efectos significativos son B y D , y para $\ln(\hat{\sigma}_p^2)$ lo fueron A, N, B, C y el efecto de interacción EN . En los modelos que se ajusten a los parámetros $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ln(\hat{\sigma}_l^2)$ y $\ln(\hat{\sigma}_p^2)$, se deben incluir los efectos principales de las interacciones que no aparecen como significativos, esto se debe al principio del efecto de herencia. Así pues, los modelos estimados son:

$$\ln(\hat{\sigma}_l^2) = 3,0649 - 0,4108B + 0,3138D$$

$$\ln(\hat{\sigma}_p^2) = 0,1166 + 1,0996A - 0,2241B + 0,2166C + 0,0422E + 0,4078N + 0,2786EN$$

$$\hat{\beta}_0 = 864,617 - 13,708E + 12,768D - 11,495N$$

$$\hat{\beta}_1 = -0,6888 + 0,0364E - 0,0278D + 0,0288N$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2 = & 0,0005335 + 0,0000027A - 0,0000105B + 0,0000151D - 0,0000215E + \\ & 0,0000030F - 0,0000142N - 0,0000105AN + 0,0000105FN \end{aligned}$$

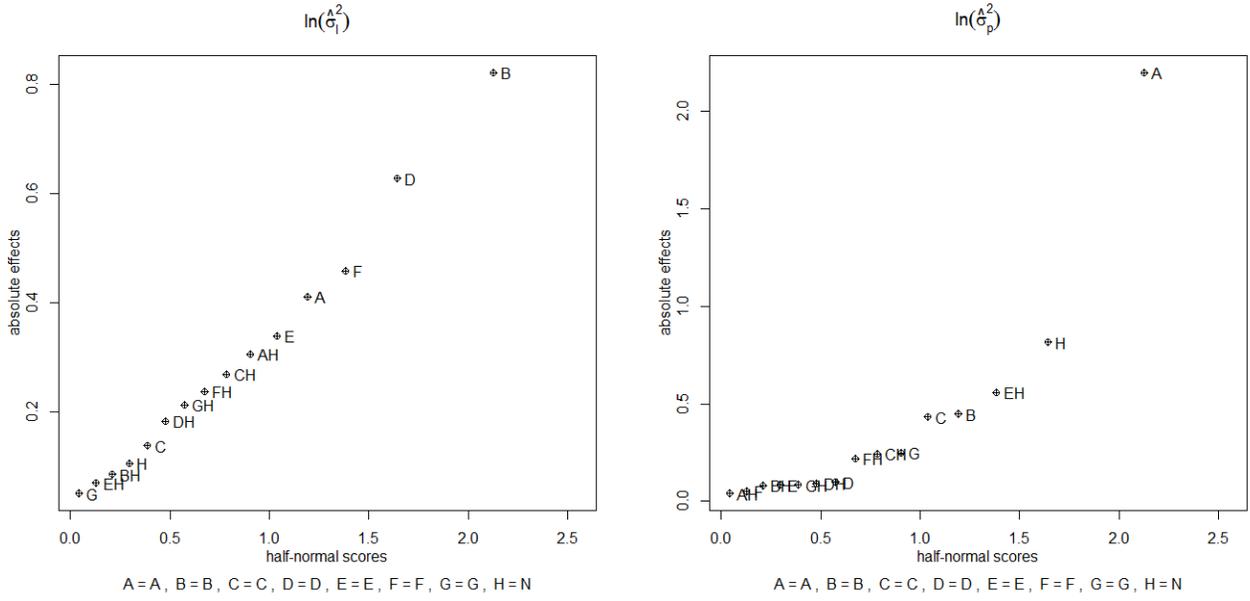


Figura 4.7: Gráficas Semi-Normales para $\ln(\hat{\sigma}_l^2)$ y $\ln(\hat{\sigma}_p^2)$.

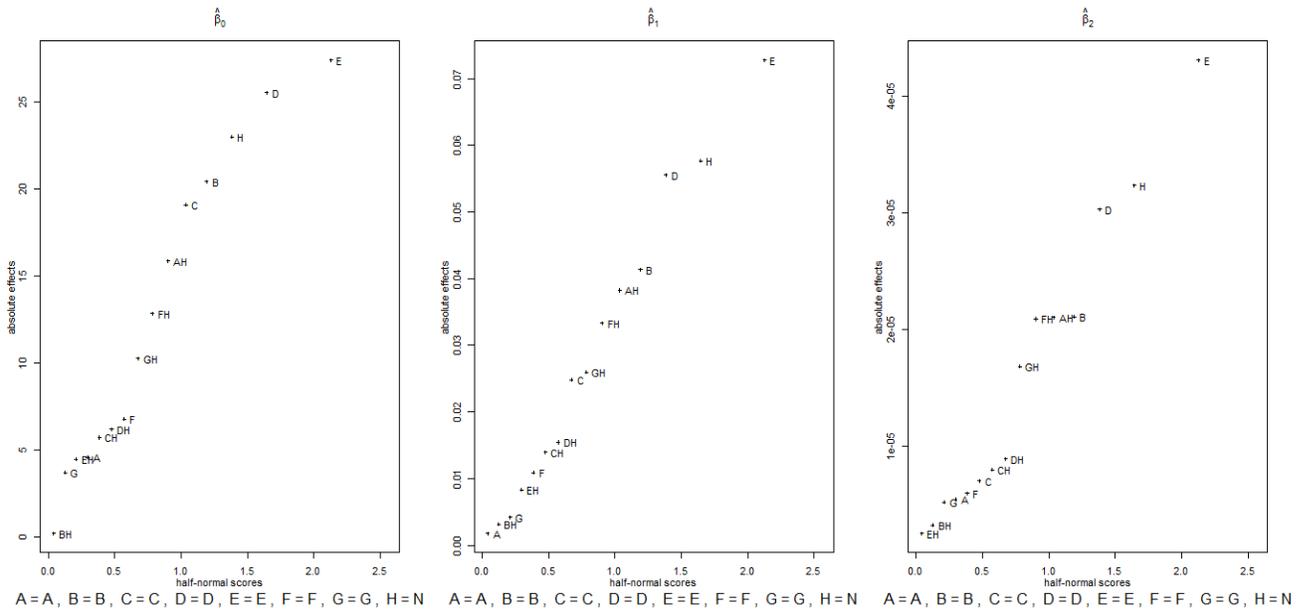


Figura 4.8: Gráficas Semi-Normales para $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$.

Como el objetivo principal es minimizar la variación causada por los factores, se procede a encontrar la configuración de los factores que minimizan tanto la variación por pérdida de ajuste como la variación del error puro. Debido a la estructura del modelo para la variación causada por la pérdida de ajuste y los factores que interactúan en él, este tipo de variación se minimiza al seleccionar el nivel alto del factor B y el nivel bajo del factor D . En este caso, simplemente se hace un ajuste simple de los factores, no hay necesidad de aplicar el diseño robusto. Esto se debe a que no hay interacciones entre los factores de control y el factor de ruido. Para el caso de la variación por la pérdida de ajuste, se observa directamente que para minimizar la variación $\ln(\hat{\sigma}_p^2)$ se deben seleccionar el nivel alto para el factor B y los niveles bajos de los factores A y C . Debido a la interacción que hay entre el factor E y el factor de ruido N , es necesario evaluar en las combinaciones entre los niveles del factor E y los niveles del factor de ruido, esto para identificar el nivel del factor E en el que la variación es menor. El Cuadro 4.7 muestra los valores estimados al evaluar en las combinaciones entre el factor de control E y el factor de ruido N . La configuración de los valores bajos y altos de los factores de control no fueron considerados como en el Cuadro 4.1, la configuración de los niveles bajo y alto fueron -1 y $+1$ respectivamente.

		E	
		$-$	$+$
N	$-$	-1.5951	-2.0679
	$+$	-1.3367	-0.6951

Cuadro 4.7: Valores estimados de la variación causada por el error puro en las combinaciones del factor de control E y del factor de ruido

De acuerdo con los resultados observados en el Cuadro 4.7, la variación es menor cuando el factor de control E se encuentra el nivel bajo, es por esto que el diseño robusto considera el nivel bajo del factor E .

Los modelos para $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ quedan determinados con el nivel bajo del factor D y el nivel bajo del factor E , esto se debe al análisis anterior que se hizo para reducir la variación. Se observa que el factor de ruido afecta tanto el modelo de $\hat{\beta}_0$ como el modelo de $\hat{\beta}_1$, pero no se identificaron interacciones que pudieran compensar el efecto causado por el factor de ruido.

Por último, considérese el modelo para $\hat{\beta}_2$. En este caso, los niveles para los factores A , B , D , y E para el modelo de $\hat{\beta}_2$ ya han sido determinados. Lo que resta es observar el efecto del factor de ruido. A partir del modelo para $\hat{\beta}_2$ se puede ver que el coeficiente estimado para el factor de ruido N es

$$-0,0000142 - 0,0000105A + 0,0000105F.$$

Con el fin de minimizar el efecto causado por el factor N , se necesita minimizar el valor absoluto del coeficiente del factor N . Siendo que el nivel del factor A ya está determinado como -1 , entonces el nivel $+1$ del factor F es el que minimiza el valor absoluto del coeficiente del factor N .

4.2. Proceso de chapado de oro

El enfoque propuesto es ilustrado usando un estudio de Taguchi y Wu (1989) acerca de la optimización del proceso de chapado de oro para lograr un espesor uniforme. El cliente está interesado solamente en un objetivo simple para el espesor, y por lo tanto este problema pertenece a la clase de sistemas de respuesta simple. Los factores y niveles del experimento se muestran en el Cuadro 4.8.

El experimento original no se trata con algún sistema de control. Pero los factores concentración de oro (X_1), temperatura (X_2), pH (X_3), y concentración de níquel (X_9) no pueden mantenerse en un valor fijo. Este análisis considera explícitamente el ruido interno, que es la variación alrededor de los valores nominales. Tal variable puede representarse como $X = x + e$, donde x denota el valor nominal que puede ser controlado y e denota el error de la variable alrededor de su valor nominal. El error e es del tipo Q (on-line) si sus variaciones pueden ser compensadas durante la operación usual del proceso, de lo contrario es del tipo R (off-line). Como

Factor	Notación	Nivel	
		-	+
Concentración de oro	X_1	0.725 oz/gal	1.125 oz/gal
Temperatura	X_2	100° F	110° F
pH	X_3	4.25	4.40
Densidad de corriente	x_4	1.0 amps/ft ²	2.0 amps/ft ²
Velocidad de barril	x_5	18 rev/min	9 rev/min
Tamaño de carga	x_6	1/3	1/2
Tamaño del ánodo	x_7	1/4" × 3"	1" × 3"
Colocación del ánodo	x_8	Distancia máxima	1/2 de distancia al barril
Concentración de níquel	X_9	620 ppm	700 ppm

Cuadro 4.8: Factores y niveles

se ha mencionado en Taguchi y Wu (1989, p. 23), el tiempo de recubrimiento, que no es considerado en este experimento, puede ser usado para variar el espesor de recubrimiento. Entonces, el tiempo de recubrimiento sirve como variable control. Sea C_0 el tiempo de recubrimiento existente. Supóngase el modelo

$$Y = \beta(X, Q, R)C/C_0 + \varepsilon, \quad (47)$$

donde ε sigue una distribución normal con media 0 y varianza $V(X, Q, R)(C/C_0)^2$. El modelo puede ser justificado usando la ley de Faraday de galvanoplastia. Para el término de varianza, las variaciones introducidas durante el tiempo de recubrimiento $(0, C)$ han sido descuidadas. Un modelo más elaborado para la varianza en recubrimiento fue estudiado por Joseph y Wu (2002a). Para realizar el estudio se usó un experimento 2_{III}^{9-5} que se muestra en el Cuadro 4.9, y los datos obtenidos a partir del experimento se muestran en el Cuadro 4.10.

Corrida	X_1	X_9	x_4	X_2	x_7	x_8	x_5	X_3	x_6
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	+	+	+	+	+
3	-	-	+	+	-	-	-	+	+
4	-	-	+	+	+	+	+	-	-
5	-	+	-	+	-	-	+	-	+
6	-	+	-	+	+	+	-	+	-
7	-	+	+	-	-	-	+	+	-
8	-	+	+	-	+	+	-	-	+
9	+	-	+	-	-	+	+	-	+
10	+	-	+	-	+	-	-	+	-
11	+	-	-	+	-	+	+	+	-
12	+	-	-	+	+	-	-	-	+
13	+	+	+	+	-	+	-	-	-
14	+	+	+	+	+	-	+	+	+
15	+	+	-	-	-	+	-	+	+
16	+	+	-	-	+	-	+	-	-

Cuadro 4.9: Diseño factorial para el experimento

El modelo (47) puede estimarse de la siguiente forma. Como el experimento se realizó tomando $C = C_0$, los datos surgen del modelo $Y = \beta(X, Q, R) + \varepsilon$, donde $\varepsilon|Q, R \sim N(0, V(X, Q, R))$. Ahora, se calculan la media \bar{y} y la varianza s^2 para cada corrida y se muestran en el Cuadro 4.11.

Entonces, usando s^2 como respuesta para ajustar un modelo lineal generalizado gamma con función liga log, se obtiene el modelo log-varianza:

$$\log \hat{V}(X, Q, R) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \beta_6 x_6 + \beta_7 x_7 + \beta_8 x_8 + \beta_9 X_9,$$

donde los resultados obtenidos a partir del lenguaje R se muestran en el Cuadro 4.12.

Corrida	Espesor del chapado de oro (en micropulgadas)																			
1	63	52	57	60	51	64	57	56	61	57	58	51	54	60	54	64	50	54	55	49
2	59	60	63	61	58	66	53	63	57	61	61	60	73	81	59	62	68	53	60	72
3	60	66	78	83	64	76	89	106	68	78	52	86	91	69	71	57	73	96	83	60
4	67	77	66	51	53	55	59	58	62	62	81	76	60	58	53	59	55	54	70	60
5	71	74	78	63	62	67	47	69	49	58	54	84	71	67	62	47	51	66	57	49
6	70	58	69	65	65	74	71	75	75	65	70	64	65	66	55	70	71	74	65	75
7	61	66	65	74	66	73	73	65	83	81	60	75	77	62	60	69	65	60	89	76
8	68	62	54	51	43	59	57	64	53	59	48	58	46	46	47	42	51	48	50	44
9	66	47	67	56	55	56	49	53	39	54	42	46	66	89	42	68	61	46	92	58
10	48	63	69	60	89	81	63	53	68	76	53	67	66	68	69	65	89	67	74	70
11	75	76	75	70	71	70	84	68	75	73	80	76	69	71	70	75	67	68	76	66
12	58	55	47	49	59	45	53	56	41	53	61	52	55	55	54	50	53	52	56	55
13	64	65	57	76	54	54	65	60	64	67	62	62	67	57	67	58	55	61	64	56
14	45	79	77	72	71	99	50	74	77	74	72	96	75	89	98	77	41	77	96	75
15	84	53	56	64	61	74	57	56	69	65	72	57	48	64	64	67	55	68	56	55
16	61	60	55	50	54	51	50	56	57	55	53	52	57	52	53	52	54	55	55	49

Cuadro 4.10: Datos obtenidos del experimento

Corrida	\bar{y}	s^2
1	56.35	21.19
2	62.50	45.63
3	75.30	196.33
4	61.80	73.12
5	62.10	106.09
6	68.10	30.73
7	70.00	70.95
8	52.15	52.34
9	57.60	202.78
10	67.90	112.41
11	72.75	20.93
12	52.95	22.68
13	61.75	30.72
14	75.70	259.06
15	62.25	73.25
16	54.05	10.05

Cuadro 4.11: Estimadores de la media y la varianza para cada corrida

Coefficientes	Estimador	Error estándar	t valor	$\Pr(> t)$	
Intercepto	4.11171	0.16000	25.699	2.29e-07	***
X_1	-0.06089	0.16000	-0.381	0.7166	
X_9	-0.04689	0.16000	-0.293	0.7793	
x_4	0.56751	0.16000	3.547	0.0121	*
X_2	0.06730	0.16000	0.421	0.6887	
x_7	-0.13299	0.16000	-0.831	0.4377	
x_8	-0.09234	0.16000	-0.577	0.5848	
x_5	0.12364	0.16000	0.773	0.4690	
X_3	0.26675	0.16000	1.667	0.1465	
x_6	0.46741	0.16000	2.921	0.0266	*

Cuadro 4.12: Ajuste del modelo completo de varianza

Del Cuadro 4.12 se observa que el intercepto y los factores x_4 y x_6 son significativos. La Figura 4.9 muestra los gráfico Normal y Semi-Normal para los efectos que tienen los factores en la varianza. En la Figura 4.9 se

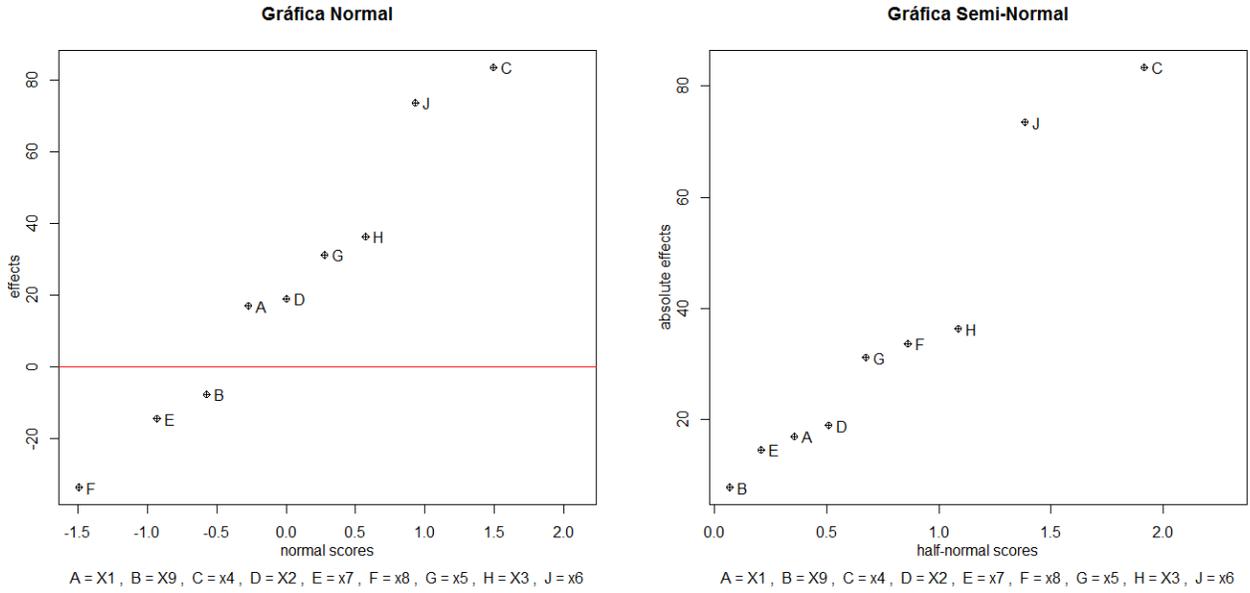


Figura 4.9: Gráficas Normal y Semi-Normal para $\ln(\hat{V}(X, Q, R))$.

puede observar la ventaja que tiene la gráfica Semi-Normal de la gráfica Normal. En la gráfica Normal, se podría confundir acerca de los factores significativos y considerar el efecto negativo del factor x_8 como un factor significativo, pues es el más alejado negativamente de cero. En cambio, al considerar la gráfico Semi-Normal, se observa como el factor x_8 no es significativo, y los únicos factores que realmente son significativos son x_4 y x_6 .

La Figura 4.10 muestra los efectos principales de las varianzas. En este gráfico se observa como los cambios en los factores x_1 y x_6 tienen mayor efecto sobre la varianza. De acuerdo a estos resultados, se ajusta el modelo

$$\log \hat{V} = \beta_0 + \beta_4 x_4 + \beta_6 x_6,$$

con s^2 como la respuesta y usando un GLM gamma con función liga log. Los resultados obtenidos a partir del lenguaje R son los siguientes:

Coefficientes	Estimador	Error estándar	t valor	Pr(> t)	
Intercepto	4.1538	0.1197	34.700	3.35e-14	***
x_4	0.5741	0.1197	4.796	0.000349	**
x_6	0.5001	0.1197	4.177	0.001084	**

Cuadro 4.13: Ajuste del modelo de varianza para los factores significativos.

Así pues, el modelo para las varianzas queda determinado por:

$$\log \hat{V} = 4,1538 + 0,5741x_4 + 0,5001x_6. \quad (48)$$

Los dos valores de las variables son codificados como -1 y 1 .

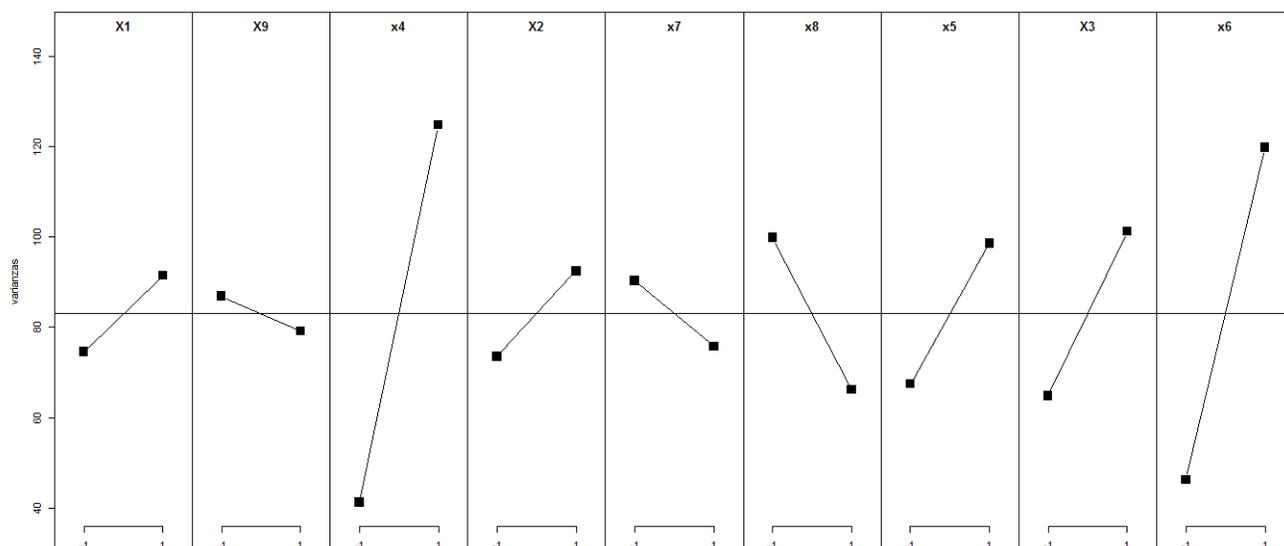


Figura 4.10: Efectos principales para la varianza.

El siguiente paso es proporcionar un modelo para la sensibilidad. Para la sensibilidad β se ajusta el modelo lineal:

$$\hat{\beta}(X, Q, R) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \beta_6 x_6 + \beta_7 x_7 + \beta_8 x_8 + \beta_9 X_9,$$

a través de mínimos cuadrados ponderados con ponderaciones iguales a $1/\hat{V}(X, Q, R)$ y usando \bar{Y} como respuesta. $\hat{V}(X, Q, R)$ se obtiene fácilmente a partir de (48) como

$$\hat{V} = \exp(4,1538 + 0,5741x_4 + 0,5001x_6).$$

El modelo para la sensibilidad ajustado en R proporciona los estimadores en el Cuadro 4.14.

Coefficientes	Estimador	Error estándar	t valor	Pr(> t)	
Intercepto	63.1672	0.5200	121.474	2.10e-11	***
X_1	-0.4159	0.4184	-0.994	0.35853	
X_9	-0.1279	0.4184	-0.306	0.77013	
x_4	1.6364	0.4750	3.445	0.01371	*
X_2	2.7789	0.4580	6.067	0.00091	***
x_7	-1.5600	0.4184	-3.729	0.00975	**
x_8	-0.8735	0.5200	-1.680	0.14399	
x_5	1.0948	0.4184	2.617	0.03974	*
X_3	5.8067	0.4750	12.226	1.82e-05	***
x_6	-1.1077	0.4580	-2.418	0.05198	.

Cuadro 4.14: Ajuste del modelo completo de sensibilidad.

En el Cuadro 4.14 se muestra que el intercepto y los factores X_2 , X_3 , x_7 y x_4 son significativos a un nivel $\alpha = 0,20$ del método de Lenth. La Figura 4.11 muestra los gráficos Normal y Semi-Normal para los efectos que tienen los factores en la sensibilidad.

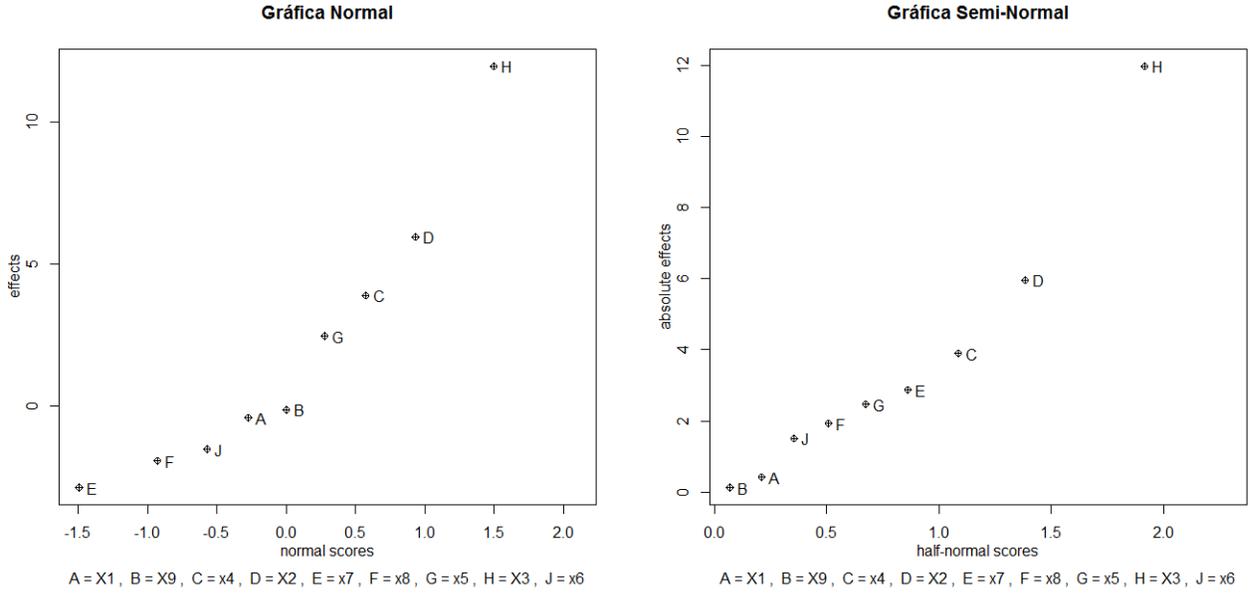


Figura 4.11: Gráficas Normal y Semi-Normal para β .

La Figura 4.12 muestra los efectos principales para la sensibilidad. En este gráfico se observa como los cambios en los factores X_2 , X_3 , x_7 y x_4 tienen mayor efecto en la sensibilidad.

De los resultados anteriores, se decide ajustar el modelo para la sensibilidad con los factores X_2 , X_3 , x_7 y x_4 . El ajuste se hace usando mínimos cuadrados ponderados con ponderaciones $1/\hat{V}(X, Q, R)$. Los resultados se muestran en el Cuadro 4.15.

Coefficientes	Estimador	Error estándar	t valor	$\Pr(> t)$	
Intercepto	63.6791	0.6680	95.333	$< 2e-16$	***
X_2	2.4657	0.5883	4.191	0.00151	**
X_3	5.4289	0.5883	9.227	$1.64e-06$	***
x_4	1.6364	0.6680	2.450	0.03226	*
x_7	-1.5906	0.5712	-2.785	0.01776	*

Cuadro 4.15: Ajuste del modelo de sensibilidad para los factores significativos.

Así, se llega a que el modelo estimado para la sensibilidad es:

$$\hat{\beta}(X, Q, R) = 63,6791 + 2,4657X_2 + 5,4289X_3 + 1,6364x_4 - 1,5906x_7.$$

Como se discutió en la subsección 4.1.4, iterando los dos pasos precedentes se producirán los estimadores de máxima verosimilitud, pero en este caso, el procedimiento se detiene en esta etapa para evitar el arrastre del término de falta de ajuste en el modelo de la media al modelo de la varianza. De los cuatro factores aleatorios, solo X_2 y X_3 aparecen en los modelos. Supóngase que la decisión para compensar se hace en la variación de X_3 . Siguiendo la notación anterior, sean $X_2 = x_2 + r_2$ y $X_3 = x_3 + q_3$, esto quiere decir que el factor de ruido Q que puede ser ajustado durante el proceso es q_3 . Entonces,

$$\hat{\beta}(X, Q, R) = 63,6791 + 2,4657(x_2 + r_2) + 5,4289(x_3 + q_3) + 1,6364x_4 - 1,5906x_7$$

y

$$\hat{V}(X, Q, R) = \exp(4,1538 + 0,5741x_4 + 0,5001x_6).$$

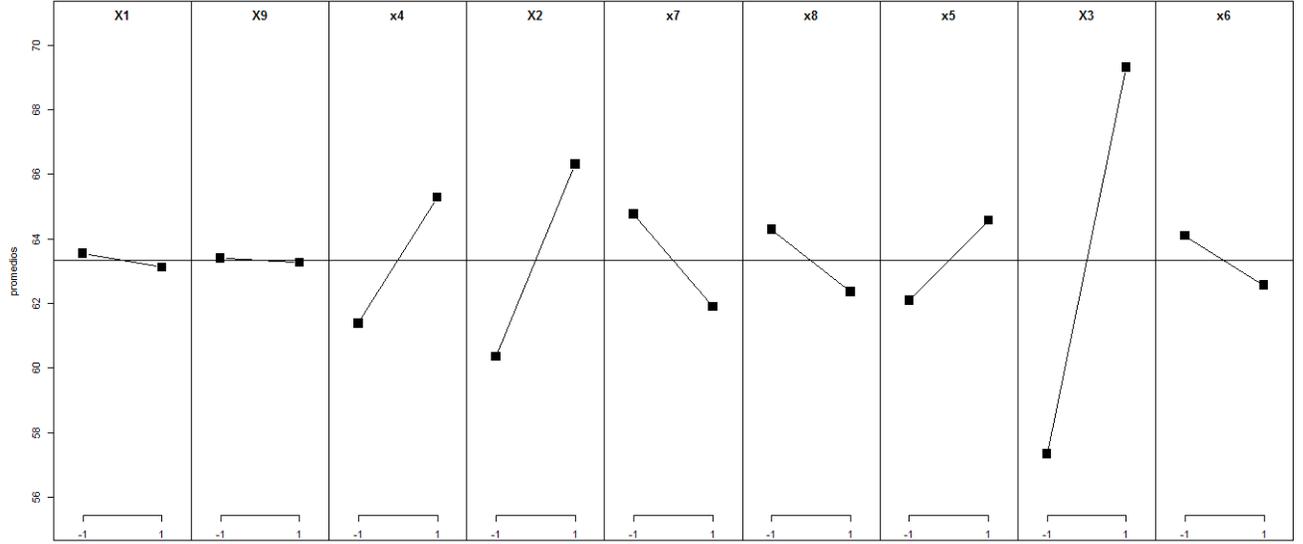


Figura 4.12: Efectos principales para la sensibilidad.

Supóngase que q_3 y r_2 siguen distribuciones normales con media 0 y varianza $\sigma_3^2 = (0,05/0,075)^2$ y $\sigma_2^2 = (2/5)^2 = 0,16$ respectivamente. Entonces se puede llegar a los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} E \left[\hat{V}(X, Q, R) | Q \right] &= \hat{V}(X, Q, R) \\ &= \exp(4,1538 + 0,5741x_4 + 0,5001x_6), \end{aligned}$$

pues $\hat{V}(X, Q, R)$ no depende de $Q = q_3$, luego

$$\begin{aligned} E \left[\hat{\beta}(X, Q, R) | Q \right] &= E [63,6791 + 2,4657(x_2 + r_2) + 5,4289(x_3 + q_3) + 1,6364x_4 - 1,5906x_7 | Q] \\ &= 63,6791 + 2,4657x_2 + 2,4657E(r_2 | Q) + 5,4289(x_3 + q_3) + 1,6364x_4 - 1,5906x_7 \\ &= 63,6791 + 2,4657x_2 + 5,4289(x_3 + q_3) + 1,6364x_4 - 1,5906x_7, \end{aligned}$$

donde dado Q , r_2 es el único elemento aleatorio en la suma y $E(r_2 | Q) = 0$. De igual manera, siendo que dado Q el único elemento aleatorio de $\hat{\beta}(X, Q, R)$ es r_2 , se tiene que

$$\begin{aligned} var \left[\hat{\beta}(X, Q, R) | Q \right] &= var [2,4657r_2 | Q] \\ &= 2,4657^2 \sigma_2^2 \end{aligned}$$

De (40), se tiene que la medida de desempeño es:

$$\begin{aligned} \widehat{PM}(X) &\equiv E \left\{ \frac{1}{\widehat{SN}(X, Q)} \right\} \\ &= E \left\{ \frac{1}{\frac{E^2[\hat{\beta}(X, Q, R) | Q]}{E[\hat{V}(X, Q, R) | Q] + var[\hat{\beta}(X, Q, R) | Q]}} \right\} \\ &= E \left\{ \frac{E[\hat{V}(X, Q, R) | Q] + var[\hat{\beta}(X, Q, R) | Q]}{E^2[\hat{\beta}(X, Q, R) | Q]} \right\}. \end{aligned}$$

$$\widehat{PM}(X) = E \left\{ \left(\exp(4,1538 + 0,5741x_4 + 0,5001x_6) + 2,4657^2\sigma_2^2 \right) / \right. \\ \left. (63,6791 + 2,4657x_2 + 5,4289(x_3 + q_3) + 1,6364x_4 - 1,5906x_7)^2 \right\}.$$

El objetivo es minimizar $\widehat{PM}(X)$ con cada variable restringida en el intervalo $[-1, 1]$. Usando el **Lema 2** dado en el apéndice, se obtiene que $x_2^* = 1$, $x_3^* = 1$, $x_6^* = -1$, y $x_7^* = -1$ son los valores que optimizan $\widehat{PM}(X)$. Entonces, la expresión de $\widehat{PM}(X)$ evaluada en los valores encontrados es:

$$\widehat{PM}(X) = E \left\{ \left(\exp(3,6537 + 0,5741x_4) + 2,4657^2\sigma_2^2 \right) / \right. \\ \left. (73,1643 + 5,4289q_3 + 1,6364x_4)^2 \right\}$$

Siendo que el lema no es aplicable para x_4 , $\widehat{PM}(X)$ es evaluado con una simulación de Monte Carlo sobre una rejilla de valores de x_4 , con todas las otras variables en sus configuraciones óptimas, para encontrar $x_4^* = -1$. Sustituyendo $x_4^* = -1$ en la medida de desempeño se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{PM}(X) &= E \left\{ \left(\exp(3,6537 + 0,5741x_4) + 2,4657^2\sigma_2^2 \right) / \right. \\ &\quad \left. (73,1643 + 5,4289q_3 + 1,6364x_4)^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left(\exp(3,6537 - 0,5741) + 2,4657^2\sigma_2^2 \right) / \right. \\ &\quad \left. (73,1643 + 5,4289q_3 - 1,6364)^2 \right\} \\ &= E \left\{ (21,7497 + 2,4657^2\sigma_2^2) / (71,5279 + 5,4289q_3)^2 \right\} \end{aligned}$$

De la configuración óptima, la ley de control dada en (39) queda determinada por

$$\begin{aligned} C^* &= h(X, Q) \\ &= \frac{TC_0}{E(\hat{\beta}(X, Q, R)|Q)} \\ &= \frac{TC_0}{71,5279 + 5,4289q_3} \end{aligned}$$

donde T es el ancho del espesor de oro que se requiere.

Sin una ley de control, la medida de desempeño será

$$\begin{aligned} \widehat{PM}_0(X) &= \frac{E \left[\hat{V}(X, Q, R) \right] + var \left[\hat{\beta}(X, Q, R) \right]}{E^2 \left[\hat{\beta}(X, Q, R) \right]} \\ &= \left(\exp(4,1538 + 0,5741x_4 + 0,5001x_6) + 2,4657^2\sigma_2^2 + 5,4289^2\sigma_3^2 \right) / \\ &\quad (63,6791 + 2,4657x_2 + 5,4289x_3 + 1,6364x_4 - 1,5906x_7)^2, \end{aligned}$$

de la cual la minimización conduce a la misma configuración que en control. El porcentaje de reducción en la varianza del espesor de oro con control comparado con el caso sin control puede ser calculado como 36.15 %.

5. Resultados y conclusiones

El primer paso de este trabajo fue describir las características del diseño robusto, para ello se recurrió a distintas bibliografías y artículos de investigación. Esto generó conocimiento del diseño robusto de parámetros, así como de los procedimientos de modelado que pueden ser utilizados. En este trabajo se describieron dos procedimientos de modelado que son: el modelado de la medida de desempeño (PMM) y el modelado de la función respuesta (RFM). También se hizo un contraste entre ambos procedimientos para identificar ventajas y desventajas, el cual se realizó a partir del ejemplo de moldeo por inyección. Pero antes de eso, se hace una observación acerca del modelado de la medida de desempeño.

Para llevar a cabo el modelado de la medida de desempeño, lo primero es definirla. La razón señal a ruido de Taguchi es una de estas medidas que tiene como base el cociente

$$\frac{\beta^2}{\sigma^2}, \quad (49)$$

donde β y σ^2 son la media y la varianza, respectivamente, de la variable respuesta. Esta medida de desempeño no es muy usada debido a que en muchas ocasiones el cociente (49), tiene poco o nada de significado en el problema de optimización. Para que la razón señal a ruido pueda justificarse, se debe mantener la siguiente relación:

$$Var(y) \propto \beta^2,$$

lo que no siempre es posible. En ocasiones suele ser difícil modelar β y σ^2 por separado, por lo cual el modelado de la razón señal a ruido es aún más complicado ya que incluye a β y σ^2 . Por lo general, se considera a σ^2 como la medida de desempeño, tal como se mostró en el ejemplo de moldeo por inyección.

Del ejemplo de moldeo por inyección se observó que el enfoque PMM no muestra claramente ningún factor de control que pueda ser ajustado para mejorar el desempeño del sistema. Lo que se observó fue solamente indicios de factores que requerían de un mayor estudio, pero que no se tiene certeza de cómo afectan el sistema. También se pierde la posibilidad de identificar interacciones entre los factores de control y factores de ruido, que son de gran importancia en el diseño robusto. De una u otra forma, el enfoque RFM no solo indica factores que podrían ser utilizados, sino que también proporciona una idea de cómo estos factores afectan el sistema. En particular, se identificó un modelo cuadrático como una descripción adecuada de la relación señal-respuesta, y los factores de control que pueden ser usados para modificar los parámetros de la relación encontrada. Además, las gráficas residuales generadas por los modelos ajustados para la relación señal-respuesta indican la posibilidad de un error sistemático en los niveles de la señal. También se observa que la flexibilidad del procedimiento RFM permite la descomposición de la variación en dos componentes, σ_p^2 y σ_l^2 , que lleva a la conclusión de que el factor A puede ser usado para reducir la variación σ_p^2 .

El objetivo principal de esta tesis fue agregar el sistema de control Feed-Forward al diseño robusto de parámetros. La finalidad de proporcionar una ley de control es reducir la variación causada por los factores de ruido, cuando el diseño robusto por sí solo no es capaz de reducir dicha variación. En el caso del control Feed-Forward, es necesario identificar el factor de ruido al cual se le puede aplicar la ley de control antes de realizar el proceso. Algo que se debe analizar bien es la oportunidad de aplicar una ley de control siempre y cuando, el costo de aplicar dicha ley no sea mayor al costo provocado por los factores de ruido al no aplicarles la ley de control.

Se ha usado la metodología de la esperanza y varianza condicional para construir la razón señal a ruido propuesta por Taguchi y las medidas de desempeño para los distintos sistemas señal-respuesta. El punto es que la razón señal a ruido así construida tiene un fundamento matemático, al igual que las medidas de desempeño. También fue posible proporcionar un algoritmo para optimizar la medida de desempeño y proporcionar la ley de control como se mostró en el capítulo 3. También se observó que en general, los procedimientos para la optimización para los sistemas con control y sin control son diferentes. En el caso de los sistemas con control, el enfoque es reducir la variación en la respuesta después de compensar los efectos de ruido.

El ejemplo del chapado de oro fue útil para mostrar la utilidad de incorporar una estrategia de control con el diseño robusto de parámetro. El resultado final mostró como el uso del control Feed-Forward en el diseño robusto de parámetro realmente reduce más la variación que si únicamente se usara el diseño robusto.

El modelo en (28) hace sentido solamente si los factores de ruido R tienen niveles aleatorios en el experimento, que no es el caso en la mayoría de los diseños experimentales robustos de parámetro. Por lo tanto, el

modelado de la medida de desempeño no será tan eficiente estadísticamente como en el enfoque del modelado de respuesta. Además, el modelado de la medida de desempeño requiere un diseño de arreglo cruzado para el experimento, mientras que el modelado de la respuesta puede ser usado con cualquier tipo de diseño. Aunque el enfoque de modelado de la respuesta parece mejor, el modelado de la medida de desempeño tiene algunas ventajas en sistemas de control. El modelado de la respuesta requiere del modelado explícito de los factores de ruido Q , y entonces cada error de modelado será transmitido al modelo (25) y puede afectar el resultado. En el modelado de la medida de desempeño, PM_i en (29) puede ser estimado sin el modelado explícito de los factores de ruido Q y entonces es insensible a las imprecisiones de la modelación. Una vez que se obtiene una solución óptima X^* , más datos pueden ser recolectados, manteniendo X fijo en X^* , y la respuesta puede ser modelada con respecto a Q para obtener una ley de control. Este enfoque es usado particularmente cuando β tiene una relación no lineal con Q .

Para el desarrollo de ambos ejemplos, fue necesario usar un poco de cómputo estadístico. Para esto, se uso el software R, el cual posee librerías dedicadas a los diseños experimentales. De la paquetería básica de R, fue posible hacer un análisis exploratorio de los datos y ajustar los modelos adecuados para explicar los procesos explorados en los ejemplos. De las librerías dedicadas a los diseños experimentales se utilizó una que lleva por nombre FrF2, la cual está enfocada en los diseños factoriales 2^k y 2^{k-p} . Esto permitió mostrar gráficamente los efectos principales y los efectos de interacción, también permitió mostrar gráficamente los efectos significativos.

La metodología que aquí se ha mostrado se enfoca principalmente a mejorar el estado estacionario del desempeño de sistema, y los modelos aquí usados no consideran la dinámica del sistema. La modelación de la dinámica ayudará a elaborar mejores estrategias de control on-line. Esto es particularmente cierto en el caso de control Feedback. Como lo dice su nombre, el control Feedback aplica una ley de control a partir de la respuesta obtenida después del proceso, y se hace la corrección para el siguiente proceso. Es por esto que el diseño robusto de parámetro con control Feedback es un área importante que necesita de investigación, así pues, este tema es trabajo futuro de investigación.

Otro posible trabajo futuro es el estudio de herramientas gráficas útiles para identificar factores que afectan la sensibilidad o la dispersión.

6. Apéndice

En el trabajo que se a realizado, se ha hecho uso del siguiente resultado:

$$Var(Y) = E_X[Var(Y|X)] + Var_X[E(Y|X)],$$

que es conocido como ley de varianza total o formula de descomposición total. Donde se establece que X y Y son variables aleatorias sobre el mismo espacio de probailidad, y que la varianza de Y es finita.

Para la demostración de este resultado, se usa la ley del valor esperado total que dice:

$$E(Y) = E_X(E(Y|X)).$$

La demostración se muestra a continuación.

Demostración.

$$\begin{aligned} Var(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= E[E(Y^2|X)] - E[E(Y|X)]^2 \\ &= E[Var(Y|X) + E(Y|X)^2] - E[E(Y|X)]^2 \\ &= E[Var(Y|X)] + \left(E[E(Y|X)^2] - E[E(Y|X)]^2 \right) \\ &= E[Var(Y|X)] + Var[E(Y|X)]. \end{aligned}$$

Primero, se uso la definición de varianza. El segundo paso fue aplicar la ley de valor esperado total para condicionar sobre X . El siguiente paso fue reescribir el segundo momento condicional de Y en terminos de su varianza y primer momento. Siendo que la esperanza de la suma es la suma de las esperanzas, se puede reagrupar como se muestra en la cuarta igualdad. Y finalmente, se observa en la resta que está entre paréntesis que se trata precisamente de la varianza de la esperanza condicional $E(Y|X)$. ■

Teorema 1 Sean d_C un diseño 2^{k-p} elegido como el arreglo interno, d_N un diseño 2^{m-q} es elegido como el arreglo externo, y un arreglo cruzado, denotado por $d_C \otimes d_N$, es construido por d_C y d_N .

(i) Si $\alpha_1, \dots, \alpha_A$ son los efectos factoriales estimables (entre los factores de control) en d_C y β_1, \dots, β_B son los efectos factoriales estimables (entre los factores de ruido) en d_N , entonces α_i , β_j y $\alpha_i\beta_j$ para $i = 1, \dots, A$ y $j = 1, \dots, B$ son estimables en $d_C \otimes d_N$.

(ii) Todas las km interacciones control-ruido (es decir, interacciones de dos factores entre un efecto principal de factor de control y un efecto principal de un factor de ruido) son claros en $d_C \otimes d_N$.

Proof. Se puede encontrar en la página 460 de la referencia [3]. ■

Supongase que el objetivo es optimizar una función $E[g(X, Q)]$ con respecto a X , tal como (25), (34), (40), etcetera. Si $g(X, Q)$ tiene una forma funcional simple, $E[g(X, Q)]$ puede ser una función altamente no lineal y complicada en X . A menudo ni siquiera es posible obtener una expresión cerrada de $E[g(X, Q)]$ en términos de X , y se debe ecurrir a alguna simulación Monte Carlo o técnicas de integración numérica para evaluar la esperanza en diferentes niveles de X y buscar una solución óptima (ver Spall 2003 algunos algoritmos). El siguiente lema es útil algunas veces en optimización.

Lema 2 Si $X^* = \arg \min_{X \in D} g(X, Q_0)$ es independiente de Q_0 , entonces $\arg \min_{X \in D} E[g(X, Q)] = X^*$, donde Q_0 es cualquier valor en el soporte de Q .

Demostración. Sea $X^* = \arg \min_{X \in D} g(X, Q_0)$. Como X^* es independiente de la elección de Q_0 , $g(X, Q) \geq g(X^*, Q)$ para todo $X \in D$ con probabilidad 1, lo cual implica que $E[g(X, Q)] \geq E[g(X^*, Q)]$ para todo $X \in D$, y entonces $X^* = \arg \min_{X \in D} E[g(X, Q)]$. ■

Referencias

- [1] Roshan Joseph V. (2003), “Robust Parameter Design with Feed-Forward Control”, *Technometrics*, Vol. 45, No. 4, pp. 284-292.
- [2] Madhav S. Phadke. (1989), *Quality Engineering Using Robust Design*, P T R Prentice-Hall, Inc.
- [3] Wu, C. F. J., and Hamada, M. (2000), *Experiments: Planning, Analysis, and Parameter Design Optimization*, New York: Wiley.
- [4] N. Logothetis y H. P. Wynn (1994), *Quality Through Design: Experimental Design, Off-line Quality Control, and Taguchi’s Contributions*, Oxford.
- [5] Katsuhiko Ogata (2010), *Modern Control Engineering*, Prentice Hall.
- [6] Tirthankar Dasgupta, Arden Miller and C. F. Jeff Wu (2010), “Robust Design of Measurement Systems”, *Technometrics*, Vol. 52, No. 1, pp. 80-93.
- [7] V. Roshan Joseph y C. F. Jeff Wu (2002), “Robust Parameter Design of Multiple-Target Systems”, *Technometrics*, Vol. 44, No. 4, pp. 338-346.
- [8] Mahesh Lunani; Vijayan N Nair; Gary S Wasserman (1997), “Graphical methods for robust design with dynamic characteristics”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 29, No. 3, pp. 327.
- [9] William Li, C. F. J. Wu (1999) “An Integrated Method of Parameter Design and Tolerance Design”, *Quality Engineering*, Vol. 11, No. 3, pp. 417-425.
- [10] Tirthankar Dasgupta y C. F. Jeff Wu (2006), “Robust Parameter Design with Feedback Control”, *Technometrics*, Vol. 48, No. 3 , pp. 349-360.