CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Comportamiento asintótico del CB-Proceso cerca de la extinción

TESIS

Que para obtener el Grado de:

Maestro en Ciencias con Orientación en Probabilidad y Estadística

P R E S E N T A:

Gabriel Hernán Berzunza Ojeda

Director:

Dr. Juan Carlos Pardo Millán

Guanajuato, Guanajuato, México

9 Julio de 2012

Integrantes del Jurado

Lector especial: Dr. Víctor Manuel Pérez Abreu Carrión
Presidente: Dr. José Alfredo López Mimbela
Secretario: Dr. Arno Siri-Jégousse
Vocal y director de la tesis: Dr. Juan Carlos Pardo Millán

Director de Tesis

______________________________-

Dr. Juan Carlos Pardo Millán

Dedico este trabajo a mis padres,
Gabriel y Lourdes.
A mis hermanos,
Alejandra y Adrián.
A Lizeth,
con amor y gratitud.

Agradecimientos

A mis padres, Gabriel y Lourdes,
porque han sido el principal apoyo para alcanzar cada una de mis metas, porque con su amor y apoyo han sido mi guía para ser una mejor persona.

A mis hermanos, Alejandra y Adrian,
porque no han dejado de creer en mí y porque llenan mi vida de alegría y buenos momentos.

A Lizeth,
por su compañía y apoyo durante todo este tiempo.

Al Dr. Juan Carlos Pardo Millán,
porque como asesor y profesor constituyó una pieza importante en mi desarrollo académico. Al igual le agradezco el brindarme su confianza y tiempo durante el desarrollo de esta tesis.

A mis sinodales, Dr. José Alfredo López Mimbela y Dr. Arno Siri-Jégousse,
porque destinaron su tiempo a la revisión de este trabajo y con sus sugerencias y comentarios contribuyeron a la mejora del mismo.

Al Dr. Víctor Manuel Pérez Abreu Carrión,
porque es una gran persona que dedicó parte de su tiempo a la lectura de este trabajo, realizando sugerencias y comentarios que enriquecieron al mismo.

A mis amigos Eduardo, Carolina y Daniela,
por brindarme su amistad en todo este tiempo; por cada uno de los momentos compartidos dentro y fuera de las aulas.

A los profesores de CIMAT,
porque fueron parte fundamental para mi formación académica.

A mis compañeros y amigos del CIMAT,
porque me brindaron su confianza, amistad y apoyo académico.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología,
porque a través de la beca que me fue otorgada se hizo posible la realización de este trabajo.

Índice general

Introducción

En este trabajo se estudia al proceso de ramificación con espacio de estados y tiempo continuo o C.B. proceso el cual puede ser visto como una versión más general del proceso de Galton - Watson. Este fue introducido por Jirina [8] y estudiado por muchos autores, entre los cuales se incluyen Bingham [3], Grey [6], Grimvall [7], Lamperti [11, 12], por mencionar algunos. Uno de nuestros objetivos es exponer su intima relación con los procesos de Lévy espectralmente positivos, debido a que las trayectorias de estos dos procesos están relacionadas a través de la transformación de Lamperti. Esto permite establecer varios resultados acerca del comportamiento asintótico del C.B. proceso.

En particular se estudia al C.B. proceso α-estable (para $\alpha \in (1, 2]$) el cual es el proceso resultante al aplicar la transformación de Lamperti a un proceso de Lévy espectralmente positivo α-estable. A partir de ello se obtendrá como consecuencia que el C.B. proceso α-estable tiene la propiedad de auto-similitud. Lo anterior permite establecer resultados explícitos concerniente a las trayectorias del C.B. proceso α-estable, como los establecidos en el artículo de Kyprianou y Pardo [10]. En particular se especifican test integrales para obtener leyes de logaritmo iterado (LLI) para el C.B. proceso cerca de la extinción. Por otro lado, es importante señalar que en este trabajo damos una prueba diferente a varios de los resultados de Kyprianou y Pardo [10].

El Capítulo 1 define a los procesos de Lévy espectralmente positivos y los procesos de Lévy condicionados a permanecer positivos, así como a los proceso auto-similares y α-estables. El objetivo de este es introducir los objetos que estaremos trabajando en el desarrollo de esta tesina.

En el Capítulo 2 se define al C.B. proceso y a su exponente de Laplace, lo cual da lugar a una primera relación con los procesos de Lévy espectralmente positivos. Se define la transformación de Lamperti, para posteriormente establecer los conceptos de explosión y probabilidad extinción como en el caso del proceso de Galton-Watson. En una segunda parte definimos al C.B. proceso α-estable (para $\alpha \in (1,2]$) vía la transformación de Lamperti, al igual se demuestra que este proceso tiene la propiedad de auto-similitud. También se demuestra una propiedad de reversibilidad para este proceso y se establecen propiedades para el primer y último tiempo de pasada del C.B. proceso α-estable retornado al tiempo de extinción.

Finalmente, en el Capítulo 3 se establece tests integrales para obtener LLI en 0, para el envolvente inferior del primer y último tiempo de pasada del C.B. proceso α-estable retornado al tiempo de extinción, así como un test integral para obtener una LLI en 0, para el envolvente superior del proceso ínfimo futuro del C.B. proceso α-estable retornado. De modo que a partir de ellos obtener la LLI cerca de la extinción, para el envolvente superior del C.B. proceso α-estable. Nuestros argumentos son basados en la propiedad de auto-similitud de dichos procesos y en el artículo de Pardo [14].

Capítulo 1

Procesos de Lévy y procesos auto-similares

En este capítulo se va a introducir a los procesos de Lévy espectralmente positivos, a los procesos de Lévy condicionados a permanecer positivos y los procesos auto-similares con incrementos independientes, con los cuales vamos a estar trabajando en el desarrollo de esta tesis. Este Capítulo tiene como base bibliográfica el material contenido en Bertoin [2], Kyprianou [9] y Sato [15].

1.1. Procesos de Lévy espectralmente positivos

Sea $(\mathbb{P}_x, x \in \mathbb{R})$ una familia de medidas de probabilidad sobre el espacio de mapeos càdlàg de $[0,\infty)$ a $\mathbb{R}$, denotado por $\mathcal{D}$, tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, el proceso canónico X es un proceso de Lévy sin saltos negativos que inicia en x. Denotaremos $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0$ tal que $\mathbb{P}_x$ es la ley del proceso $X + x$ bajo $\mathbb{P}$. El exponente de Laplace $\psi : [0,\infty) \to (-\infty,\infty)$ de X esta dado por $\mathbb{E}(e^{-\lambda X_t}) = e^{t\psi(\lambda)}$, para $\lambda \geq 0$, y satisface la célebre fórmula de Lévy-Khinchine

$$\psi(\lambda) = a\lambda + \frac{1}{2}\beta^2\lambda^2 + \int_{(0,\infty)} (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x \mathbf{1}_{\{x<1\}})\Pi(dx), \tag{1.1}$$

donde $a \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$ y Π es una medida con soporte en $(0,\infty)$ tal que

$$\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty.$$

En adelante, se asume que $(X,\mathbb{P})$ no es un subordinador (recordando que un subordinador es un proceso de Lévy con trayectorias crecientes). En este caso, se sabe que el exponente de Laplace es cero en cero y tiende a ∞ cuando λ se va a infinito. Más aun es infinitamente diferenciable y estrictamente convexo. En particular $\psi'(0+) = \mathbb{E}(X_1) \in [-\infty, \infty)$. Definimos la inversa por la derecha de ψ como:

$$\Phi(q) = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \psi(\lambda) > q\}.$$

para $q \geq 0$. Si $\psi'(0+) \geq 0$ entonces $\lambda = 0$ es la única solución a $\psi(\lambda) = 0$, de otra forma, hay dos soluciones a esta última ecuación, $\lambda = \Phi(0) > 0$ y $\lambda = 0$. El Teorema VII.1 en [2] implica que la condición $\Phi(0) > 0$ se cumple si y solo si el proceso se va a ∞. Más aun, casi seguramente, la trayectorias de X se van a ∞, oscilan o se van a $-\infty$ de acuerdo a $\psi'(0+) < 0$, $\psi'(0+) = 0$ o $\psi'(0+) > 0$.

1.2. Procesos de Lévy condicionados a permanecer positivos

Se puede hablar del condicionamiento de cualquier proceso de Lévy a permanecer positivo pero en este trabajo se restringirá al caso de procesos de Lévy espectralmente positivos. Lo siguiente es tomado del Capítulo VII de Bertoin [2], Kyprianou [5] y el Capítulo 10 de Doney [9] en donde podemos ver dos construcciones trayectoriales de este proceso, la construcción de Bertoin y la construcción de Tanaka. El proceso X condicionado a permanecer positivo es un proceso fuerte de Markov cuya ley está dada por

$$\mathbb{P}_x^{\uparrow}(X_t \in dy) = \lim_{q \downarrow 0} \mathbb{P}_x(X_t \in dy, t < \mathbf{e}/q | \tau_0 > \mathbf{e}/q), \quad t \geq 0, \quad x, y > 0 \tag{1.2}$$

donde $\mathbf{e}$ es una variable aleatoria exponencial de media uno e independiente del proceso X y

$$\tau_0 = \text{ínf}\{t > 0 : X_t \leq 0\}.$$

Resulta que la medida del lado izquierdo también puede ser construida como resultado de una h-transformada de Doob de X matado cuando entra a $(-\infty, 0]$ por primera vez. En el caso especial $\psi'(0+) \leq 0$, el semi-grupo resultante esta dado por

$$\mathbb{P}_x^{\uparrow}(X_t \in dy) = \frac{1 - e^{\Phi(0)y}}{1 - e^{-\Phi(0)x}} \mathbb{P}_x(X_t \in dy, t < \tau_0), \quad t \geq 0, \quad x, y > 0 \tag{1.3}$$

donde el cociente del lado derecho se entiende como y/x en el caso $\Phi(0) = 0$ (es decir, el caso $\psi'(0+) = 0$).

Ahora, definamos $\hat{X} := -X$, el proceso dual de X. Denotamos por $\hat{\mathbb{P}}_x$ la ley de $\hat{X}$

cuando inicia en x, en otras palabras $(X, \hat{\mathbb{P}}_x) = (\hat{X}, \mathbb{P}_{-x})$. El proceso dual condicionado a permanecer positivo en el sentido de (1.2) es de nuevo una h-transformada de Doob de $(X, \hat{\mathbb{P}}_x)$ matado cuando entra en $(-\infty, 0]$ por primera vez. En este caso, asumiendo que $\psi'(0+) \geq 0$, uno tiene

$$\hat{\mathbb{P}}_x^{\uparrow}(X_t \in dy) = \frac{W(y)}{W(x)} \hat{\mathbb{P}}_x(X_t \in dy, t < \tau_0), \quad t \geq 0, \quad x, y > 0 \tag{1.4}$$

donde W es la llamada función escala para el proceso $-X$. Esta es la única función sobre $[0, \infty)$ con transformada de Laplace

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W(x) dx = \frac{1}{\psi(\lambda)}, \quad \lambda \geq 0, \tag{1.5}$$

donde ψ es el exponente de Laplace de X.

1.3. Procesos auto-similares y α-estables

En esta sección se introduce a los procesos auto-similares, que son procesos estocásticos que son invariantes en distribución bajo un adecuado escalamiento de tiempo y espacio. Estos procesos aparecen en varias partes de la teoría de probabilidad, como en los procesos de Lévy, procesos de ramificación, teoría de fragmentación, teoría de coalescencia, física, etcétera (Ver Bertoin [2] y Sato [15].

Un proceso de Markov auto-similar $X = (X_t, t \geq 0)$ es un proceso que posee la propiedad de Markov con probabilidades $(\mathbb{Q}_x, x \geq 0)$ tal que para cada $k > 0$, la ley de $(kX_{k^{-\alpha}t}, t \geq 0)$ bajo $\mathbb{Q}_x$ es la misma que la del proceso $(X_t, t \geq 0)$ bajo $\mathbb{Q}_{kx}$, donde $\alpha > 0$ es una constate conocida como índice de auto-similitud. Otra definición que se encuentra comúnmente en la literatura es la siguiente,

Definición 1.1 *Sea $X = (X_t, t \geq 0)$ un proceso estocástico que toma valores en $\mathbb{R}$ tal que $X_0 = 0$. Decimos que X es auto-similar si para toda $k > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que*

$$(X_{kt}, t \geq 0) \stackrel{d}{=} (k^{1/\alpha} X_t, t \geq 0).$$

En caso de que X sea un proceso de Lévy que cumple esta propiedad, se dice que X es un proceso estrictamente estable de índice α, pero en lo subsecuente se omitirá el adverbio “estrictamente” y se dirá que el proceso es α-estable. De acuerdo a Sato [15] (Teorema 14.1, 14.2 y 14.3), $\alpha \in (0, 2]$.

A partir de ahora, estaremos enfocados en procesos de Lévy α-estable espectralmente positivos, en otras palabras estamos interesados en procesos de Lévy espectralmente positivos que satisfagan la propiedad de auto-similitud para algún índice $\alpha \in (0, 2]$, (Ver Capítulo VIII en Bertoin [2] para una mayor discusión acerca del proceso de Lévy α-estable). Se sabe, que el exponente de Laplace de $(X, \mathbb{P}_x)$ toma la forma

$$\psi(\lambda) = c_+ \lambda^\alpha, \quad \lambda \geq 0 \quad \alpha \in (0, 2] \tag{1.6}$$

donde $c_+ > 0$. Cuando $\alpha = 2$, el proceso de Lévy $(X, \mathbb{P}_x)$ es un múltiplo de un movimiento Browniano estándar.

Observación 1.1 *Para un proceso de Lévy espectralmente positivo α-estable su función escala esta dada por*

$$W(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{c_+ \Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0,$$

donde Γ es la función Gama.

1.4. Procesos auto-similares con incrementos independientes

Una clase importante de procesos estocásticos es la clase L, la cual también es conocida como procesos auto-similares aditivos, es decir, procesos auto-similares con incrementos independientes.

Definición 1.2 *Sea μ un medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ y denotemos por $\hat{\mu}$ a su función característica. Decimos que μ es auto-descomponible si para cualquier $b > 0$, hay una medida de probabilidad ρ_b en $\mathbb{R}$ tal que*

$$\hat{\mu}(z) = \hat{\mu}(bz)\hat{\rho}_b(z), \quad z \in \mathbb{R},$$

donde $\hat{\rho}_b$ denota la función característica de ρ_b.

En términos de variables aleatorias esta definición es: Una variable aleatoria X se dice que es auto-descomponible si para cualquier constante $b \in (0, 1)$ existe una variable aleatoria independiente $X^{(b)}$ tal que

$$X \stackrel{d}{=} bX + X^{(b)}.$$

En otras palabras, una variable aleatoria es auto-descomponible si tiene la misma distribución que la suma de un versión escalada de si misma y una variable aleatoria residual independiente. Un ejemplo importante de tal clase de distribuciones son las variables aleatorias estables y Gaussianas.

Una propiedad que satisfacen las leyes auto-descomponibles es la de ser infinitamente divisibles, véase Proposición 15.5 de Sato [15].

Ahora, notemos que un proceso estocástico aditivo satisface la propiedad de Markov (pero no necesariamente homogénea). Si suponemos que sus incrementos son también homogéneos, entonces se tiene un proceso de Lévy.

El siguiente resultado conecta las leyes auto-descomponibles con los procesos auto-similares aditivos. La prueba de este resultado se puede ver en Sato [15] (Teorema 16.1).

Teorema 1.1 *Sea $X = (X_t, t \geq 0)$ un proceso de Markov auto-similar aditivo que toma valores en $\mathbb{R}$, entonces para cada $t \geq 0$ la ley de X_t es auto-descomponible. Recíprocamente, si μ es una medida auto-descomponible en $\mathbb{R}$, entonces para cualquier $\gamma > 0$ existe un proceso auto-similar aditivo X de índice γ, donde μ es la distribución de X_1.*

Capítulo 2

El C.B. proceso

En este capítulo se introduce a los procesos de ramificación con espacio de estados y tiempo continuo o C.B. procesos y se expone su intima relación con los procesos de Lévy espectralmente positivos, así como se analiza y desarrollan sus principales propiedades.

El C.B. proceso fue introducido por primera vez por Jirina en [8], en este artículo se expone una extensión de la propiedad de ramificación a procesos de Markov con espacio de estados en $[0,\infty]$, a tiempo continuo. Posteriormente Lamperti en [12] caracterizó el C.B. Proceso como límite de procesos de Galton-Watson a tiempo continuo y en [11] muestra como este proceso puede ser obtenido realizando un cambio de tiempo a un proceso de Lévy espectralmente positivo.

2.1. Definición del C.B. proceso

Un proceso fuerte de Markov $Y^a = (Y_t^a, t \geq 0)$ que toma valores en $[0,\infty]$, con 0 y ∞ dos estados absorbentes, es un C.B. proceso que empieza en $a > 0$, si sus trayectorias son continuas por la derecha con límite por la izquierda y además satisface la propiedad de ramificación, esto es,

Definición 2.1 (Propiedad de Ramificación) *Si $\widetilde{Y}^b$ es una copia independiente de Y^b, entonces $Y^a + \widetilde{Y}^b$ tiene la misma ley que Y^{a+b}.*

Otra forma de escribir la propiedad anterior es la siguiente, para toda $\theta \geq 0$ y $x, y \geq 0$,

$$\mathbb{E}_{x+y}(e^{-\theta Y_t}) = \mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t})\mathbb{E}_y(e^{-\theta Y_t}). \tag{2.1}$$

Notemos que iterando la igualdad tenemos para $x > 0$,

$$\mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t}) = \mathbb{E}_{x/n}(e^{-\theta Y_t})^n \tag{2.2}$$

mostrando así que Y_t es necesariamente infinitamente divisible para cada $t > 0$. Ahora, si definimos para $\theta, t \geq 0$,

$$g(t, \theta, x) = -\log \mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t}),$$

entonces (2.2) implica que para todo entero positivo m,

$$g(t, \theta, m) = ng(t, \theta, m/n) \quad \text{y} \quad g(t, \theta, m) = mg(t, \theta, 1)$$

mostrando que para $x \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$,

$$g(t, \theta, x) = xu_t(\theta), \tag{2.3}$$

donde $u_t(\theta) = g(t, \theta, 1) \geq 0$. Por otro lado, de (2.1) vemos que para $0 \leq z < y$, $g(t, \theta, z) \leq g(t, \theta, y)$ lo cual implica que $g(t, \theta, x-)$ existe como límite por la izquierda y es menor o igual que $g(t, \theta, x+)$ el cual existe como límite por la derecha. Gracias a (2.3) tanto el límite por la izquierda como el límite por la derecha son iguales, por lo tanto para toda $x > 0$

$$\mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t}) = e^{-xu_t(\theta)}. \tag{2.4}$$

Otra observación importante es que el exponente de Laplace de Y satisface la propiedad de semi-grupo, es decir,

$$u_{t+s}(\theta) = u_t(u_s(\theta)),$$

para toda $t, s, \theta \geq 0$. Esto se deduce de la ecuación (2.4) junto con la ecuación de Chapman-Kolmogorov.

El siguiente resultado permite ver una primera relación entre los procesos de Lévy espectralmente positivos y los C.B. procesos. Una demostración de este resultado se puede encontrar en el Capítulo II de Le Gall [13] o Silvertein [16].

Teorema 2.1 *Para $t, \theta \geq 0$, supongamos que $u_t(\theta)$ es el funcional de Laplace de un*

C.B. proceso definido en (2.4). Entonces esta es diferenciable en t y satisface

$$\frac{\partial u_t}{\partial t}(\theta) + \psi(u_t(\theta)) = 0, \tag{2.5}$$

con condición inicial $u_0(\theta) = \theta$, donde para $\lambda \geq 0$,

$$\psi(\lambda) = -q + a\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{(0,\infty)} (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x 1_{\{x<1\}})\Pi(dx), \tag{2.6}$$

donde $q \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ y Π es una medida con soporte en $(0, \infty)$ que satisface $\int_{(0,\infty)}(1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty$.

Notemos que para $\lambda \geq 0$, $\psi(\lambda) = \log \mathbb{E}(e^{-\lambda X_1})$ donde X es un proceso de Lévy espectralmente positivo o un subordinador, matado en un tiempo exponencial independiente de parámetro $q \geq 0$. Recordando lo mencionado en la Sección 1.1, sabemos que ψ es convexa, infinitamente diferenciable en $(0, \infty)$, $\psi(0) = -q$ y $\psi'(0+) \in [-\infty, \infty)$. Más aun, de la Sección 5.5 de [9], si X es un subordinador (matado), entonces $\psi(\infty) < 0$ y de otra forma tenemos que $\psi(\infty) = \infty$.

Del teorema anterior es sencillo confirmar a través de una derivación que para cada $\theta > 0$ la solución a (2.5) puede ser determinada de forma única por la relación

$$-\int_{\theta}^{u_t(\theta)} \frac{1}{\psi(\xi)} d\xi = t. \tag{2.7}$$

De la discusión anterior se puede deducir que si un C.B. proceso existe, entonces tiene asociado una función $\psi : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ dada en (2.6), a la cual nos vamos a referir como mecanismo de ramificación.

2.2. La transformación de Lamperti

A continuación enunciaremos la transformada de Lamperti, que entre otras cosas, muestra que cada mecanismo de ramificación ψ tiene asociado un C.B. proceso.

Para entender mejor la transformación de Lamperti, vamos a estudiar al proceso de Galton-Watson a tiempo continuo como un cambio de tiempo de un proceso de Poisson compuesto. Esta construcción se puede extender, conectando a los C.B. procesos con los procesos de Lévy espectralmente positivos. De esta forma el C.B. proceso puede ser visto como una versión del proceso de Galton-Watson con valores en $[0,\infty]$.

2.2.1. Construción de Lamperti del proceso de Galton Watson a tiempo continuo

Consideremos un proceso de Galton-Watson a tiempo continuo en el cual cada individuo muere con tasa $c > 0$, independientemente uno de los otros. Al final de su vida, cada individuo da nacimiento a un número aleatorio de hijos (de manera independiente) el cual es distribuido de acuerdo a alguna medida de probabilidad ν, llamada la distribución de los nacimientos. La distribución ν tiene soporte en $\mathbb{N}$. Sea $\pi(i) = \nu(i+1)$ para $i = -1, 0, ...$ y por simplicidad supondremos que $\pi(0) = 0$.

En otras palabras, si denotamos por Y_t al número de individuos vivos al tiempo $t \geq 0$, con población inicial $Y_0 = a$, el proceso $(Y_t, t \geq 0)$ es una cadena de Markov homogénea a tiempo continuo con valores en $\mathbb{N}$ que satisface la propiedad de ramificación y cuya dinámica puede ser descrita como sigue. La cadena inicia en $a \in \mathbb{N}$ y permanece ahí un tiempo exponencial T_1 de parámetro ca, y a ese tiempo realiza un salto de tamaño $X_{T_1} - X_{T_1^-}$ el cual es independiente de T y tiene distribución π. El estado 0 es absorbente.

La propiedad de ramificación implica, como ya lo vimos anteriormente, que la transformada de Laplace de este proceso satisface la siguiente identidad. Para toda $\theta > 0$,

$$\mathbb{E}_a(e^{-\theta Y_t}) = e^{-a u_t(\theta)} \tag{2.8}$$

para alguna función $u_t(\theta)$. Además, es posible verificar a partir de la dinámica de Y que $u_t(\theta)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u_t(\theta)}{\partial t} = -\psi(u_t(\theta)), \qquad u_0(\theta) = \theta, \tag{2.9}$$

donde ψ es el mecanismo de ramificación del proceso de Galton-Watson a tiempo continuo Y, donde

$$\psi(\lambda) = c \sum_{k=-1}^{\infty} (1 - e^{\lambda k})\pi(k). \tag{2.10}$$

Hasta el momento parece ver poca relación con los procesos de Levy espectralmente positivos, sin embargo un cambio de tiempo muestra que el camino de

Y está ligado a la trayectoria de un proceso de Poisson compuesto cuyos saltos tienen distribución con soporte en $\{-1, 0, 1, 2, ...\}$ que empieza en a y tiene como estado absorbente a cero. Visto de otra forma, de las tasas de transición del proceso de Galton-Watson a tiempo continuo, notamos que el tiempo de permanencia en el estado x es exponencial de parámetro cx, lo que significa que los eventos de nacimiento y muerte ocurren a una tasa la cual es lineal con respecto al tamaño de la población. Entonces lo que se hará a continuación es desacelerar al reloj de manera proporcional al tamaño de la población para obtener una cadena de Markov cuyas tasas sean independientes del estado en que se encuentre.

Ahora, la idea es ajustar al tiempo de acuerdo a la evolución de Y de tal forma que el tiempo de sus saltos sean independientes y con la misma distribución exponencial. Para esto consideremos para $t \geq 0$,

$$J_t = \int_0^t Y_s ds,$$

sea

$$\varphi_t = \inf\{s \geq 0 : J_s > t\}$$

con la convención de que $\inf \emptyset = \infty$ y definamos

$$X_t = Y_{\varphi_t}$$

donde $X_t = 0$ si $\varphi_t = \infty$.

A partir de esto se puede ver inmediatamente que $(X_t, t \geq 0)$ es de nuevo una cadena de Markov homogénea a tiempo continuo que inicia en a, donde el estado 0 también es absorbente. Ahora, observemos que cuando $Y_0 = a \neq 0$ el primer tiempo de salto de Y ocurre a un tiempo exponencial T_1 de parámetro ac y el tamaño del salto es independiente de T_1 con ley π. Sin embargo notemos que $J_{T_1} = aT_1$ es el primer tiempo en el cual el proceso X salta. Este último tiempo se distribuye como una variable aleatoria exponencial de parámetro c. El tamaño del salto a este tiempo es independiente y tiene ley π. En otras palabras, $(X_t, t \geq 0)$ puede ser visto como un proceso Poisson Compuesto con medida de intensidad $c\pi$ y parado en el primer instante que toca 0.

Una construcción inversa también es posible, consideremos $(\Delta_t, t \geq 0)$ un proceso de Poisson puntual sobre $\{-1, 0, 1, ...\}$ con medida característica $c\pi$ y definamos $X_t = a + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta_s$. El proceso X tienen incrementos independientes y estacionarios; el cual es conocido como proceso de Poisson compuesto continuo por la izquierda que toma valores en $\mathbb{Z}$ y que todos sus saltos negativos son de tamaño -1. Este es el simple caso de un proceso de Lévy y se puede ver que su transformada de Laplace está dada por

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda(X_t-a)}) = e^{t\psi(\lambda)},$$

donde ψ satisface (2.10). Ahora, definiendo $\tau_0 = \inf\{t \geq 0 : X_t = 0\}$ el primer tiempo de llegada a 0, escribimos

$$A_t = \int_0^t \frac{1}{X_s} ds, \qquad t \in [0, \tau_0),$$

y sea

$$\theta(t) = \inf\{s \geq 0 : A_s > t\},$$

donde $\inf \emptyset = \infty$, de modo que si

$$Y_t = X_{\theta(t)},$$

el proceso $(Y_t : t \geq 0)$ es un proceso de Galton-Watson a tiempo continuo.

Esta correspondencia elemental entre el proceso de Galton-Watson a tiempo continuo y el proceso Poisson puede ser extendido al caso en que el espacio de estados es continuo, ya que se puede demostrar que un C.B. proceso aparece como límite de una sucesión de procesos de Galton-Watson normalizados en tiempo y espacio. Si nosotros construimos este proceso de Galton -Watson usando un cambio de tiempo sobre un proceso Poisson compuesto, se puede ver que la correspondiente sucesión normalizada de procesos de Poisson compuestos converge en distribución a un proceso de Lévy espectralmente positivo con exponente de Laplace ψ. Entonces poniendo todas estas piezas juntas, se llega a la siguiente conexión entre el C.B. proceso y el proceso de Lévy espectralmente positivo.

Teorema 2.2 *Sea ψ un mecanismo de ramificación como en (2.6).*

(i) Supongamos que $X = (X_t : t \geq 0)$ es un proceso de Lévy espectralmente positivo, con posición inicial $X_0 = x$, matado en un tiempo exponencial independiente de parámetro $q \geq 0$ de x y con exponente de Laplace $\psi(\lambda) = \log \mathbb{E}_x(e^{-\lambda(X_1-x)})$. Definimos por $t \geq 0$,

$$Y_t = X_{\theta(t)},$$

con

$$\theta(t) = \text{ínf}\{s \geq 0 : A_s > t\}$$

donde

$$A_t = \int_0^t \frac{ds}{X_s}, \quad t \in [0, \tau_0),$$

y $\tau_0 = \text{ínf}\{t \geq 0 : X_t = 0\}$*, entonces* $Y = (Y_t, t \geq 0)$ *es un C.B. proceso con mecanismo de ramificación* ψ *que inicia en* $Y_0 = x$.

(ii) Recíprocamente supongamos que $Y = (Y_t, t \geq 0)$ *es un C.B. proceso con mecanismo de ramificación* ψ*, tal que* $Y_0 = x > 0$*. Definimos para* $t \geq 0$

$$X_t = Y_{\varphi_t},$$

donde

$$\varphi_t = \text{ínf}\{s > 0 : J_s > t\},$$

y

$$J_t = \int_0^t Y_s ds, \quad t \geq 0.$$

Entonces $X = (X_t, t \geq 0)$ *es un proceso de Lévy espectralmente positivo matado en el primer instante que entra en* $(-\infty, 0]$ *y este tiempo es independiente y se distribuye como una variable aleatoria exponencial de parámetro* $q \geq 0$*, con posición inicial* $X_0 = x$ *y que satisface que* $\psi(\lambda) = \log \mathbb{E}(e^{-\lambda X_1})$.

Para ver una prueba de este resultado nos referimos a Ma. E. Caballero, A. Lambert and G. Uribe Bravo [4]. De esta forma, la construcción anterior nos permite trasladar resultados que provienen de los procesos de Lévy espectralmente positivos al C.B. proceso.

2.3. Comportamiento a largo plazo

Al igual que en el proceso de Galton-Watson estamos interesados en la probabilidad de extinción o explosión del C.B. proceso. En esta sección estudiaremos ambos casos dando condiciones para que esto suceda.

2.3.1. Proceso no explosivo

El C.B. proceso $Y = (Y_t, t \geq 0)$ se dice que no explota si para toda $t > 0$, $\mathbb{P}(Y_t < \infty) = 1$. El siguiente resultado es tomado de Grey [6].

Teorema 2.3 *Un C.B. proceso con mecanismo de ramificación ψ es no explosivo si y solo si*

$$\int_{0+} \frac{1}{|\psi(\xi)|} d\xi = \infty.$$

Una condición necesaria es, por lo tanto, $\psi(0) = 0$ y una condición suficiente es $\psi(0) = 0$ y $|\psi'(0+)| < \infty$ (equivalentemente $q = 0$ y $\int_{[0,\infty)} x\Pi(dx) < \infty$).

Prueba. A partir de la definición de $u_t(\theta)$, para cada $x > 0$,

$$\mathbb{P}_x(Y_t < \infty) = \lim_{\theta \downarrow 0} \mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t}) = \exp\left\{-x \lim_{\theta \downarrow 0} u_t(\theta)\right\},$$

donde el límite es justificado por monotonía. De modo que un C.B. proceso es no explosivo si y solo si $\lim_{\theta \downarrow 0} u_t(\theta) = 0$. Sin embargo, notemos de (2.7) que cuando $\theta \downarrow 0$,

$$t = -\int_{\theta}^{\delta} \frac{1}{\psi(\xi)} d\xi + \int_{u_t(\theta)}^{\delta} \frac{1}{\psi(\xi)} d\xi,$$

donde $\delta > 0$ es suficientemente pequeño. Como el lado izquierdo es independiente de θ se concluye que el $\lim_{\theta \downarrow 0} u_t(\theta) = 0$ si y solo si

$$\int_{0+} \frac{1}{|\psi(\xi)|} d\xi = \infty.$$

Notemos que $\psi(\theta)$ puede ser negativa en una vecindad cercana al origen, por lo que el valor absoluto es tomado en la integral.

De esta condición y el hecho que ψ es una función suave, uno ve inmediatamente que una condición necesaria para que un C.B. proceso no explote es que $\psi(0) = 0$; en otras palabras que la tasa de muerte sea $q = 0$. También es claro que una condición suficiente es $q = 0$ y $|\psi'(0+)| < \infty$. Debido al hecho de que ψ es el exponente de Laplace de un proceso de Lévy espectralmente positivo, se sigue que la última condición es equivalente a $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ donde X es el proceso de Lévy espectralmente positivo asociado a ψ, esto también es equivalente a $\int_{[1,\infty)} x\Pi(dx) < \infty$.

$\square$

A partir de ahora asumiremos que para todo mecanismo de ramificación $q = 0$.

2.3.2. Probabilidad de extinción

Gracias a la representación del C.B. proceso dada en el Teorema 2.2 (i), es claro que este proceso satisface la propiedad de que si $Y_t = 0$ para alguna $t > 0$, entonces $Y_{t+s} = 0$ para $s \geq 0$. Sea $T_0 = \inf\{t > 0 : Y_t = 0\}$. El evento $\{T_0 < \infty\} = \{Y_t = 0 \text{ para alguna } t > 0\}$ es llamado extinción de acuerdo a la terminología usada en el proceso de Galton-Watson.

Notemos de (2.4) que $u_t(\theta)$ es continuamente diferenciable en $\theta > 0$, de modo que derivando esta expresión nosotros podemos encontrar para cada $x, t > 0$,

$$\mathbb{E}_x(Y_t e^{-\theta Y_t}) = x \frac{\partial u_t}{\partial \theta}(\theta) e^{-x u_t(\theta)} \tag{2.11}$$

y entonces tomando el límite cuando $\theta \downarrow 0$ nosotros obtenemos

$$\mathbb{E}_x(Y_t) = x \frac{\partial u_t}{\partial \theta}(0+) \tag{2.12}$$

de modo que si un lado de la igualdad es infinito el otro también. Derivando (2.5) en $\theta > 0$ vemos también que

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_t}{\partial \theta}(\theta) + \psi'(u_t(\theta)) \frac{\partial u_t}{\partial \theta}(\theta) = 0.$$

Usando técnicas estándar para ecuaciones diferenciales de primer orden se tiene que,

$$\frac{\partial u_t}{\partial \theta}(\theta) = c e^{-\int_0^t \psi'(u_s(\theta)) ds} \tag{2.13}$$

donde $c > 0$ es una constante. Analizando (2.11) cuando $t \downarrow 0$ vemos que $c = 1$. Ahora tomamos el límite cuando $\theta \downarrow 0$ y recordado que para toda $s > 0$, $u_s(\theta) \downarrow 0$ es sencillo deducir de (2.12) y (2.13) que

$$\mathbb{E}_x(Y_t) = x e^{-\psi'(0+)t}, \tag{2.14}$$

donde vemos que el lado izquierdo es infinito cuando $\psi'(0+) = -\infty$. Esto nos lleva a la siguiente clasificación del C.B. proceso.

Definición 2.2 *Un C.B. proceso con mecanismo de ramificación ψ es llamado*

(i) subcrítico, si $\psi'(0+) > 0$,

(ii) crítico, si $\psi'(0+) = 0$ y

(iii) supercrítico, si $\psi'(0+) < 0$.

Esta misma terminología es empleada en el proceso de Galton-Watson, donde estos tres conceptos corresponden a los casos en que la media de la distribución de los nacimientos es estrictamente menor, igual o mayor que uno. En el caso del C.B. proceso el uso de las terminologías subcrítico, crítico y supercrítico se refieren al hecho de cuando el proceso en promedio, decrece, permanece constante o incrementa.

En el proceso de Galto-Watson se puede establecer que hay extinción con probabilidad uno si y solo si la media del número de nacimientos es menor o igual que la unidad (ver Athreya and Ney [1]). El resultado análogo para el C.B. proceso podría ser que hay extinción con probabilidad uno si y solo si $\psi'(0+) \geq 0$. Sin embargo, aquí nos encontramos con una sutil diferencia como se muestra en el siguiente ejemplo. De la representación dada por el Teorema 2.2, tomando $X_t = 1-t$ tenemos $Y_t = e^{-t}$. Claramente $\psi(\lambda) = \lambda$, por lo que $\psi'(0+) = 1$ y $Y_t > 0$ para toda $t > 0$.

La extinción es caracterizada por el siguiente resultado que se puede ver en Grey [6] o en Bingham [3].

Teorema 2.4 *Supongamos que Y es un C. B. proceso con mecanismo de ramificación ψ. Sea $p(x) = \mathbb{P}_x(T_0 < \infty)$.*

(i) Si $\psi(\infty) < 0$, entonces para toda $x > 0$, $p(x) = 0$.

(ii) De otra forma, cuando $\psi(\infty) = \infty$, $p(x) > 0$ para algún (y entonces para toda) $x > 0$ si y solo si

$$\int^{\infty} \frac{1}{\psi(\xi)} d\xi < \infty$$

en cuyo caso $p(x) = e^{-\Phi(0)x}$ donde $\Phi(0) = \sup\{\lambda \geq 0 : \psi(\lambda) = 0\}$.

Prueba. (i) Si $\psi(\lambda) = \log \mathbb{E}(e^{-\lambda X_1})$ donde X es un subordinador, entonces del Teorema 2.2 (i), la extinción ocurre con probabilidad cero. De la discusión después del Teorema 2.1, el caso en que X es un subordinador es equivalente a $\psi(\lambda) < 0$ para toda $\lambda > 0$.

(ii) A partir de que para $s, t > 0$, $\{Y_t = 0\} \subseteq \{Y_{t+s} = 0\}$ tenemos por monotonía que para cada $x > 0$,

$$\mathbb{P}_x(Y_t = 0) \uparrow p(x) \tag{2.15}$$

cuando $t \uparrow \infty$. Entonces $p(x) > 0$ si y solo si $\mathbb{P}_x(Y_t = 0) > 0$ para alguna $t > 0$. A partir de que $\mathbb{P}_x(Y_t = 0) = e^{-xu_t(\infty)}$, vemos que $p(x) > 0$ para alguna (y para toda)

$x > 0$ si y solo si $u_t(\infty) < \infty$ para alguna $t > 0$.

Para $t > 0$ fija, tomamos limites en (2.7) cuando $\theta \uparrow \infty$ vemos que $u_t(\infty) < \infty$ si y solo si

$$\int^{\infty} \frac{1}{\psi(\xi)} d\xi < \infty. \tag{2.16}$$

Finalmente, asumamos que (2.16) se satisface, entonces

$$\int_{u_t(\infty)}^{\infty} \frac{1}{\psi(\xi)} d\xi = t. \tag{2.17}$$

De la ecuación (2.15) y el hecho que $u_t(\infty) = -x^{-1} \log \mathbb{P}_x(Y_t = 0)$ vemos que $u_t(\infty)$ decrece cuando $t \uparrow \infty$ a la más grande constante c tal que $\int_c^\infty 1/\psi(\xi) d\xi$ empieza a hacer infinito. Apelando a la convexidad y suavidad de ψ, la constante c necesariamente corresponde a la raíz de ψ en $[0, \infty)$, punto en cual se comporta linealmente y por lo tanto causa que $\int_c^\infty 1/\psi(\xi) d\xi$ explote. Por lo discutido en la Sección 1.1 hay a los mas dos raíces, y la más grande de ellas está dada precisamente por $c = \Phi(0) \in [0, \infty)$. En conclusión

$$p(x) = \lim_{t \uparrow \infty} e^{x u_t(\infty)} = e^{-\Phi(0) x}$$

como es requerido.

$\square$.

Debido de la convexidad de ψ y de la parte (ii) del Teorema anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.1 *Para un C.B. proceso con mecanismo de ramificación ψ que satisface $\psi(\infty) = \infty$ y*

$$\int^{\infty} \frac{1}{\psi(\xi)} d\xi < \infty,$$

tenemos que $p(x) < 1$ para alguna (y para toda) $x > 0$ si y solo si $\psi'(0+) < 0$.

Observación 2.1 *Del Corolario 2.1 concluimos que un C.B. proceso se extingue si y solo si*

$$\psi(\infty) = \infty, \quad \psi'(0+) \geq 0, \quad \text{y} \quad \int^{\infty} \frac{1}{\psi(\xi)} d\xi < \infty. \tag{2.18}$$

2.4. C.B. proceso α-estable

De aquí en adelante $(X, \mathbb{P}_x)$ será un proceso de Lévy espectralmente positivo α-estable con índice $\alpha \in (1,2]$ que inicia en $x > 0$. Por lo tanto nos referiremos a Y, el C.B. proceso asociado a X, como el C.B. proceso α-estable.

Empezaremos mostrando que el C.B. proceso α-estable es un proceso auto-similar positivo, para ello notemos de la ecuación (1.6) que el exponente de Laplace de un proceso de Lévy espectralmente positivo α-estable está dado por

$$\psi(\lambda) = c_+ \lambda^\alpha, \quad \lambda \geq 0, \quad \alpha \in (1,2]$$

con $c^+ > 0$. Entonces, usando la relación (2.7) se tiene que el exponente de Laplace del C.B. proceso α-estable es

$$u_t(\theta) = (tc_+(\alpha-1) + \theta^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \theta, t \geq 0, \quad \alpha \in (1,2] \tag{2.19}$$

de modo que para $x \geq 0$

$$\mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t}) = e^{-x(tc_+(\alpha-1)+\theta^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}} \quad \theta, t \geq 0. \tag{2.20}$$

Una primera observación es la siguiente.

Observación 2.2 *El C.B. proceso α-estable se extingue casi seguramente para $\alpha \in (1,2]$.*

A partir de lo anterior estableceremos el siguiente resultado. Su prueba aparece en Kyprianou y Pardo [10]. Nosotros aquí presentamos otra prueba.

Proposición 2.1 *El C.B. proceso α-estable que inicia en x es auto-similar positivo de índice $\alpha - 1$.*

Prueba. Es claro que el C.B. proceso es positivo, a partir de su definición. Notemos que de la ecuación (2.19) el exponente de Laplace del C.B. proceso satisface para $k > 0$ y $\theta, t \geq 0$

$$u_{k^{-(\alpha-1)}t}(k\theta) = k u_t(\theta) \tag{2.21}$$

Ahora, para probar que es auto-similar de índice $\alpha - 1$ es suficiente ver que para $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ y $k > 0$, la ley de $(kY_{k^{-(\alpha-1)}t_1}, \ldots, kY_{k^{-(\alpha-1)}t_n})$ bajo $\mathbb{P}_x$ es la misma que la de $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ bajo $\mathbb{P}_{kx}$.

Para ello procedamos por inducción. De la ecuación (2.15) y la relación (2.21), notamos que para $k > 0$ y $t \geq 0$

$$\mathbb{E}_x(e^{-\theta k Y_{k^{-(\alpha-1)}t}}) = \mathbb{E}_{kx}(e^{-\theta Y_t}) \quad \theta, x \geq 0.$$

De modo que, la ley de $kY_{k^{-(\alpha-1)}t}$ bajo $\mathbb{P}_x$ es la misma que la de Y_t bajo $\mathbb{P}_{kx}$. Supongamos que para $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1}$ y $k > 0$, la ley de $(kY_{k^{-(\alpha-1)}t_1}, \dots,$ $kY_{k^{-(\alpha-1)}t_{n-1}})$ bajo $\mathbb{P}_x$ es la misma que la de $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_{n-1}})$ bajo $\mathbb{P}_{kx}$.

Entonces usando la propiedad de Markov y la relación (2.21) se tiene para $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $\theta_1, \dots \theta_n \geq 0$ y $k > 0$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left(e^{-\theta_1 k Y_{k^{-(\alpha-1)}t_1} - \cdots - \theta_n k Y_{k^{-(\alpha-1)}t_n}}\right) = \\
&= \mathbb{E}_x\left(e^{-\theta_1 k Y_{k^{-(\alpha-1)}t_1} - \cdots - \theta_{n-1} k Y_{k^{-(\alpha-1)}t_{n-1}}} \mathbb{E}_{Y_{k^{-(\alpha-1)}t_{n-1}}}\left(e^{-\theta_n k Y_{k^{-(\alpha-1)}(t_n - t_{n-1})}}\right)\right) \\
&= \mathbb{E}_x\left(e^{-\theta_1 k Y_{k^{-(\alpha-1)}t_1} - \cdots - \theta_{n-1} k Y_{k^{-(\alpha-1)}t_{n-1}}} e^{-Y_{k^{-(\alpha-1)}t_{n-1}} u_{k^{-(\alpha-1)}(t_n - t_{n-1})}(\theta_n k)}\right) \\
&= \mathbb{E}_x\left(e^{-\theta_1 k Y_{k^{-(\alpha-1)}t_1} - \cdots - \theta_{n-2} k Y_{k^{-(\alpha-1)}t_{n-2}} - (\theta_{n-1} + u_{t_n - t_{n-1}}(\theta_n)) k Y_{k^{-(\alpha-1)}t_{n-1}}}\right) \\
&= \mathbb{E}_{kx}\left(e^{-\theta_1 Y_{t_1} - \cdots - \theta_{n-2} Y_{t_{n-2}} - (\theta_{n-1} + u_{t_n - t_{n-1}}(\theta_n)) Y_{t_{n-1}}}\right) \\
&= \mathbb{E}_{kx}\left(e^{-\theta_1 Y_{t_1} - \cdots - \theta_{n-1} Y_{t_{n-1}}} \mathbb{E}_{Y_{t_{n-1}}}\left(e^{-\theta_n Y_{t_n - t_{n-1}}}\right)\right) \\
&= \mathbb{E}_{kx}\left(e^{-\theta_1 Y_{t_1} - \cdots - \theta_n Y_{t_n}}\right).
\end{aligned}$$

Lo que implica que, la ley de $(kY_{k^{-(\alpha-1)}t_1}, \dots, kY_{k^{-(\alpha-1)}t_n})$ bajo $\mathbb{P}_x$ es la misma que la de $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ bajo $\mathbb{P}_{kx}$. Por lo tanto, el C.B. proceso α-estable es auto-similar positivo de índice $\alpha - 1$.

□

A continuación se establece una igualdad en distribución para el C.B proceso retornado al tiempo de extinción en general. En particular cuando el C.B. proceso satisface la propiedad de auto-similitud veremos que el proceso retornado hereda dicha propiedad. Para ello, denotemos por $Z = (Z_t = Y_{(T_0 - t)^-}, 0 \leq t < T_0)$ al C.B. proceso retornado bajo $\mathbb{P}_y$, donde $y > 0$.

Proposición 2.2 *Supongamos que X es un proceso de Lévy espectralmente positivo. Si la condición (2.18) se satisface, entonces para toda $y > 0$*

$$\{(Z_t, 0 \leq t < T_0), \mathbb{P}_y\} \stackrel{d}{=} \left\{(X_{\theta(t)}, 0 \leq t < A_{\sigma_y}), \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}\right\}.$$

con $\sigma_y = \sup\{t > 0 : X_t \leq y\}$.

Prueba. Primero probemos que la representación de Lamperti para el C.B. proceso está bien definida para el proceso $(X, \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow})$. Con este fin, basta probar que el mapeo $s \mapsto 1/X_s$ es $\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}$ casi seguramente integrable en una vecindad de 0. Recordemos que (2.18) implica que $\mathbb{P}_y(\tau_0 < \infty) = 1$ para toda $y \geq 0$. Entonces por el Teorema VII.18 de Bertoin [2], sabemos que para $y > 0$.

$$\left\{(X_t, 0 \leq t < \sigma_y), \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}\right\} \stackrel{d}{=} \left\{(X_{(\tau_0 - t)^-}, 0 \leq t < \tau_0), \mathbb{P}_y\right\} \tag{2.22}$$

que a su vez puede ser utilizado para deducir que

$$\int_0^{\sigma_y} \frac{1}{X_s} ds \quad \text{bajo } \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow} \quad \text{es igual en ley a} \quad \int_0^{\tau_0} \frac{1}{X_s} ds \quad \text{bajo } \mathbb{P}_y. \tag{2.23}$$

No obstante la última integral es igual a T_0 lo cual es finito $\mathbb{P}_y$ casi seguramente debido a la condición (2.18).

Ahora, de la definición de Y, bajo $\mathbb{P}_y$, tenemos

$$(Y_{(T_0 - t)^-}, 0 \leq t < T_0) = (X_{\theta(A_{\tau_0} - t)^-}, 0 \leq t < A_{\tau_0}). \tag{2.24}$$

Definimos

$$\theta'(t) = \inf\{s > 0 : B_s > t\} \quad \text{donde} \quad B_s = \int_0^s \frac{1}{X_{\tau_0 - u}} du.$$

Tomando $t = B_s$, tenemos

$$A_{\tau_0} - B_s = \int_0^{\tau_0} \frac{1}{X_u} du - \int_0^s \frac{1}{X_{\tau_0 - u}} du = \int_0^{\tau_0 - s} \frac{1}{X_u} du$$

y entonces

$$X_{\theta(A_{\tau_0} - t)^-} = X_{\theta(A_{\tau_0 - s})^-} = X_{(\tau_0 - s)^-} = X_{(\tau_0 - \theta'(t))^-}.$$

Como $T_0 = A_{\tau_0} = B_{\tau_0}$, se sigue de (2.22), (2.23) y (2.24) que

$$\{(Z_t, 0 \leq t < T_0), \mathbb{P}_y\} \stackrel{d}{=} \left\{(X_{\theta(t)}, 0 \leq t < A_{\sigma_y}), \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}\right\}.$$

como es requerido.

□

Proposición 2.3 *Si Y es un C.B. proceso α-estable, $\alpha \in (1, 2]$, entonces Z es auto-*

similar de índice $\alpha - 1$.

Prueba. De la propiedad de auto-similitud de Y para $k > 0$

$$
\begin{aligned}
T_0 &= \inf\{s \geq 0 : Y_s = 0\} \\
&\stackrel{d}{=} \inf\{s \geq 0 : k^{-\frac{1}{\alpha-1}} Y_{sk} = 0\} \\
&= k^{-1} \inf\{s \geq 0 : Y_s = 0\} = k^{-1} T_0.
\end{aligned}
$$

Observemos que esta igualdad en distribución es en el siguiente sentido $(T_0, \mathbb{P}_y) \stackrel{d}{=} (k^{-1}T_0, \mathbb{P}_{k^{\frac{1}{\alpha-1}}y})$ para $y > 0$. Entonces, de la auto-similitud de Y y la relación anterior se tiene para $k > 0$

$$
Z_{kt} = Y_{(T_0 - kt)^-} = Y_{k(k^{-1}T_0 - t)^-} \stackrel{d}{=} k^{\frac{1}{\alpha-1}} Y_{(T_0 - t)^-} = k^{\frac{1}{\alpha-1}} Z_t,
$$

donde la igualdad en distribución es en el siguiente sentido $(Z_{kt}, \mathbb{P}_{yk^{\frac{1}{\alpha-1}}}) \stackrel{d}{=} (k^{\frac{1}{\alpha-1}} Z_t, \mathbb{P}_y)$ para $y > 0$. De aquí se sigue que Z es un proceso auto-similar de índice $\alpha - 1$, en el caso de que Y sea un C.B. proceso α-estable, para $\alpha \in (1, 2]$.

□

Ahora estudiaremos dos procesos importantes relacionados con el $C.B.$ proceso retornado Z, el primer tiempo de pasada por encima de un cierto nivel $\overleftarrow{T} = (\overleftarrow{T}_x, 0 \leq x \leq y)$ y el último tiempo de pasada por debajo de un cierto nivel $\overleftarrow{U} = (\overleftarrow{U}_x, 0 \leq x \leq y)$, bajo $\mathbb{P}_y$, donde

$$
\overleftarrow{T}_x = \inf\{s \geq 0 : Z_s \geq x\} \quad \text{y} \quad \overleftarrow{U}_x = \sup\{s \geq 0 : Z_s \leq x\}.
$$

En el caso que Z sea el C.B. proceso α-estable retornado, estos procesos pertenecen a la conocida clase L, es decir, los procesos crecientes auto-similares aditivos. Lo anterior queda formalizado en la siguiente proposición.

Proposición 2.4 *Si Z es el C.B. proceso α-estable retornado, entonces $(\overleftarrow{T}_x, 0 \leq x \leq y)$ y $(\overleftarrow{U}_x, 0 \leq x \leq y)$ son procesos crecientes auto-similares aditivos de índice $\frac{1}{\alpha-1}$, bajo $\mathbb{P}_y$.*

Prueba. Es claro que ambos procesos son crecientes, de modo que pasemos a probar primero que son auto-similares. Sea $k > 0$ y $x \geq 0$, de la propiedad de auto-similitud de Z tenemos

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{T}_{kx} &= \inf\{s \geq 0 : Z_s \geq kx\} = \inf\{s \geq 0 : k^{-1}Z_s \geq x\} \\
&= \inf\{s \geq 0 : k^{-1}Z_{k^{(\alpha-1)}sk^{-(\alpha-1)}} \geq x\} \stackrel{d}{=} \inf\{s \geq 0 : Z_{k^{-(\alpha-1)}s} \geq x\} \\
&= k^{(\alpha-1)} \inf\{s \geq 0 : Z_s \geq x\} = k^{(\alpha-1)}\overleftarrow{T}_x,
\end{aligned}$$

donde la igualdad en distribución es en el siguiente sentido $(T_{kx}, \mathbb{P}_{ky}) \stackrel{d}{=} (k^{(\alpha-1)}T_x, \mathbb{P}_y)$ para $y > 0$. Lo cual nos permite concluir que,

$$\{(\overleftarrow{T}_{kx}, 0 \leq x \leq y), \mathbb{P}_{ky}\} \stackrel{d}{=} \{(k^{(\alpha-1)}\overleftarrow{T}_x, 0 \leq x \leq y), \mathbb{P}_y\}, \quad \text{para } y > 0,$$

por lo que el proceso $(\overleftarrow{T}_x, 0 \leq x \leq y)$ es auto-similar de índice $\frac{1}{\alpha-1}$. De forma análoga se sigue que el proceso $(\overleftarrow{U}_x, 0 \leq x \leq y)$ es auto-similar de índice $\frac{1}{\alpha-1}$. Ahora, solo resta ver que ambos procesos son aditivos. Iniciemos con el proceso $(\overleftarrow{T}_x, 0 \leq x \leq y)$, sean $x, z \geq 0$, notemos que gracias a la propiedad de Markov del proceso Z,

$$\overleftarrow{T}_{x+z} = \inf\{s \geq 0 : Z_s \geq x + z\} = \overleftarrow{T}_x + \inf\{s \geq 0 : Z_{\overleftarrow{T}_x+s} \geq z\} = \overleftarrow{T}_x + \widetilde{\overleftarrow{T}}^x_z,$$

donde $\widetilde{\overleftarrow{T}}^x_z$ es independiente de $\overleftarrow{T}_x$. Esto implica que $(\overleftarrow{T}_x, 0 \leq x \leq y)$ es un proceso con incrementos independientes.

Por último, para verificar que el proceso $(\overleftarrow{U}_x, 0 \leq x \leq y)$ es aditivo, notemos que el último tiempo de pasada por debajo del nivel x, $\overleftarrow{U}_x$, del proceso $(Z_t, 0 \leq t < T_0)$, coincide con el primer tiempo de pasada por encima del nivel x del C.B. proceso α-estable Y. Entonces la propiedad de Markov aplicada al primer tiempo de pasada y la propiedad de reversibilidad de la Proposición 2.2 muestran que el proceso $(Z_{\overleftarrow{U}_x+t}, t \geq 0)$ es independiente a $(Z_t, t < \overleftarrow{U}_x)$. De modo que usando un razonamiento análogo al caso del proceso $(\overleftarrow{T}_x, 0 \leq x \leq y)$, se sigue que el proceso $(\overleftarrow{U}_x, 0 \leq x \leq y)$ también es aditivo.

$\square$

Capítulo 3

Comportamiento asintótico del C.B. proceso α-estable

En este capítulo se establecerá tests integrales para el envolvente inferior del primer y último tiempo de pasada del C.B. proceso α-estable retornado, lo que a su vez nos permitirá obtener un test integral para el envolvente superior de su proceso ínfimo futuro definido en la Sección 3.2. De esta forma se obtendrá una ley de logaritmo iterado para el C.B. proceso α-estable cerca de la extinción, ya que como veremos más adelante, el envolvente superior del ínfimo futuro determina el envolvente superior del del C.B. proceso α-estable retornado en 0.

Observación 3.1 *Notemos de la Proposición 2.2 que $\overleftarrow{U}_x$ bajo $\mathbb{P}_y$, para $x \leq y$ tiene la misma ley que A_{σ_x} bajo $\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}$. Vamos a denotar por $\widetilde{U}_x$ a A_{σ_x}, el cual es un proceso creciente, auto-similar de índice $\alpha - 1$ con $\alpha \in (1, 2]$ y además tiene incrementos independientes a partir que el proceso $\overleftarrow{U}$ también satisface lo anterior.*

3.1. El envolvente inferior del primer y último tiempo de pasada

Los siguientes dos resultados dan un test integral para el envolvente inferior de los procesos $\overleftarrow{T}$ y $\overleftarrow{U}$. Denotemos por $\mathcal{H}_0^{-1}$ al conjunto de funciones crecientes positivas $h(x)$ en $(0, \infty)$ que satisfacen

(i) $h(0+) = 0$ y

(ii) Existe $\beta \in (0, 1)$ tal que $\sup_{x<\beta} x^{-1} h(x) < \infty$.

Teorema 3.1 *Sea $h \in \mathcal{H}_0^{-1}$, entonces para toda $x > 0$*

(i) Si

$$\int_{0+} \mathbb{P}_x \left(\overleftarrow{U}_1 < \left(\frac{h(y)}{y} \right)^{\alpha-1} \right) \frac{dy}{y} < \infty$$

entonces para toda $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}_x(\overleftarrow{U}_y < (1-\epsilon)h^{\alpha-1}(y), i.s., \text{ cuando } y \to 0) = 0.$$

(ii) Si

$$\int_{0+} \mathbb{P}_x \left(\overleftarrow{U}_1 < \left(\frac{h(y)}{y} \right)^{\alpha-1} \right) \frac{dy}{y} = \infty$$

entonces para toda $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}_x(\overleftarrow{U}_y < (1+\epsilon)h^{\alpha-1}(y), i.s., \text{ cuando } y \to 0) = 1.$$

Prueba. En la prueba supondremos que $x > 1$, el caso $x < 1$ se sigue de los mismos argumentos usando la propiedad de auto-similitud. Primero probemos la parte convergente. Sea $0 < r < 1$, entonces a partir de que h es creciente deducimos para $n < u \leq n+1$, tenemos

$$\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(\widetilde{U}_{r^u} \leq h^{\alpha-1}(r^u)) \geq \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(\widetilde{U}_{r^n} \leq h^{\alpha-1}(r^{n+1})).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_n \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(\widetilde{U}_{r^n} \leq h^{\alpha-1}(r^{n+1})) &\leq \sum_n \int_n^{n+1} \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(\widetilde{U}_{r^u} \leq h^{\alpha-1}(r^u)) du \\ &= -\frac{1}{\log r} \int_0^r \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow} \left(\widetilde{U}_1 \leq \left(\frac{h(y)}{y} \right)^{\alpha-1} \right) \frac{dy}{y} < \infty. \end{aligned}$$

De modo que, por el Lema de Borel-Cantelli, vemos

$$\widetilde{U}_{r^{n+2}} > r^{2(\alpha-1)} h^{\alpha-1}(r^{n+1}) \quad \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow} - \text{c.s.},$$

para toda n grande. Notemos que $\widetilde{U}_{r^{n+2}} > r^{2(\alpha-1)} h^{\alpha-1}(r^{n+1})$ implica

$$\widetilde{U}_y > r^{2(\alpha-1)} h^{\alpha-1}(y) \quad \text{para} \quad r^{n+2} \leq y < r^{n+1} \quad \text{bajo } \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}.$$

Entonces obtenemos la parte (i) de la arbitrariedad de $r \in (0,1)$ y la Observación 3.1.

Ahora, probemos la parte divergente. Sea $0 < r < 1$. Como h es creciente tenemos que

$$\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(\widetilde{U}_{r^u} \leq h^{\alpha-1}(r^u)) \leq \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(\widetilde{U}_{r^{n+1}} \leq h^{\alpha-1}(r^n)) \quad \text{para } n < u \leq n+1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_n \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(\widetilde{U}_{r^{n+1}} \leq h^{\alpha-1}(r^n)) &\geq \sum_n \int_n^{n+1} \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(\widetilde{U}_{r^u} \leq h^{\alpha-1}(r^u))du \\
&= -\frac{1}{\log r}\int_0^r \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}\left(\widetilde{U}_1 \leq \left(\frac{h(y)}{y}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{dy}{y} \\
&= \infty. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Denotando $A_n = \left\{\omega : \overleftarrow{U}_{r^{n-1}} \leq r^{-2(\alpha-1)}h^{\alpha-1}(r^n)\right\}$. Sean m y n enteros que satisfacen $0 \leq m \leq n-1$ y definamos

$$S(m,n) = \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(\widetilde{U}_{r^{j-1}} - \widetilde{U}_{r^{n-1}} > r^{-2(\alpha-1)}h^{\alpha-1}(r^j) \text{ para toda } j \text{ tal que } m \leq j \leq n-1).$$

Veamos que la siguiente afirmación se satisface.

(a) Existen una sucesiones crecientes $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que $0 \leq m_k \leq n_k - 1$, y $m_k, n_k \to \infty$ y $S(m_k, n_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Supongamos, lo contrario, que existe $\delta > 0$ tal que $S(m,n) \geq \delta$ para enteros m y n suficientemente grandes. Entonces vemos de la propiedad de incrementos independientes que

$$\begin{aligned}
1 \geq \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n\right) &\geq \sum_{n=m+1}^{\infty} \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}\left(\left(\bigcup_{j=m}^{n-1} A_j\right)^c \cap A_n\right) \\
&\geq \sum_{n=m+1}^{\infty} \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(A_n)S(m,n) \geq \delta \sum_{m+1}^{\infty} \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(A_n).
\end{aligned}$$

Esto contradice (3.1) y entonces la afirmación (a) es cierta. Denotemos $S(k) = S(m_k, n_k)$ y

$$L(k) = \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(\widetilde{U}_{r^{j-1}} > r^{-2(\alpha-1)}h^{\alpha-1}(r^j) \text{ para toda } j \text{ tal que } m_k \leq j \leq n_k - 1).$$

Definimos

$$p_k(x) = \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(\widetilde{U}_{r^{j-1}} - \widetilde{U}_{r^{n_k-2}} > r^{-2(\alpha-1)}h^{\alpha-1}(r^j) - x \text{ para toda } j \text{ tal que } m_k \leq j \leq n-2).$$

Notemos que $0 \leq p_k(x) \leq 1$ y $p_k(x)$ es creciente en x. Vamos a probar que

$$\lim_{k\to\infty} L(k) = 0. \tag{3.2}$$

Denotemos a las distribuciones de $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{U}_1 - \widetilde{U}_r$ y $\widetilde{U}_{r^{n_k-2}} - \widetilde{U}_{r^{n_k-1}}$ por μ, η y η_k, para $k \geq 0$, respectivamente. Sea $v_k = r^{-2(\alpha-1)}h^{\alpha-1}(r^{n_k-1})$ y sea $w_k = r^{-n_k(\alpha-1)}h^{\alpha-1}(r^{n_k-1})$. Entonces $S(k)$ y $L(k)$ son expresados como

$$S(k) = \int_{v_k}^{\infty} p_k(t)\eta_k(dt) = \int_{w_k}^{\infty} p_k(r^{(n_k-2)(\alpha-1)}t)\eta(dt)$$

y

$$L(k) = \int_{w_k}^{\infty} p_k(r^{(n_k-2)(\alpha-1)}t)\mu(dt).$$

Observemos que

$$S(k) \geq p_k(r^{(n_k-2)(\alpha-1)}N)\int_N^{\infty} \eta(dt) > 0 \quad \text{para} \quad N \geq C^{\alpha-1}r^{\alpha-1}$$

donde $C = \sup_{x<\beta} h(x)/x$. Entonces la afirmación (a) implica que

$$\lim_{k\to\infty} p_k(r^{(n_k-2)(\alpha-1)}N) = 0 \quad \text{para toda} \quad N \geq C^{\alpha-1}r^{\alpha-1}. \tag{3.3}$$

Por otro lado,

$$L(k) \leq \int_0^N p_k(r^{(n_k-2)(\alpha-1)}N)\mu(dt) + \int_N^{\infty} \mu(dt).$$

De modo que, haciendo $k \to \infty$ y $N \to \infty$, obtenemos (3.2) de (3.3). Denotando

$$B_k = \{\omega : \widetilde{U}_x \leq r^{-2(\alpha-1)}h^{\alpha-1}(x) \quad \text{para algún} \quad x \in (0, r^{m_k})\},$$

vemos que los conjuntos B_k son decrecientes conforme k crece y satisfacen que $\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(B_k) \geq 1 - L(k)$. Entonces de (3.2) tenemos que $\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = 1$, lo que implica que

$$\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(\widetilde{U}_y < r^{-2(\alpha-1)}h^{\alpha-1}(y), i.s., \text{ cuando } y \to 0) = 1.$$

Por lo tanto, obtenemos la parte (ii) de la arbitrariedad de $r \in (0,1)$ y la Observación 3.1.

□

De forma análoga, es posible obtener un test integral para el envolvente inferior de $\overleftarrow{T}$, observando que de la Proposición 2.2, $\overleftarrow{T}_x$ bajo $\mathbb{P}_y$, para $x \leq y$ tiene la misma ley que A_{τ_x} bajo $\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}$, donde $\tau_x = \inf\{t > 0 : X_t \geq x\}$.

Teorema 3.2 *Sea $h \in \mathcal{H}_0^{-1}$, entonces para toda $x > 0$*

(i) Si

$$\int_{0+} \mathbb{P}_x \left(\overleftarrow{T}_1 < \left(\frac{h(y)}{y} \right)^{\alpha-1} \right) \frac{dy}{y} < \infty$$

entonces para toda $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}_x(\overleftarrow{T}_y < (1-\epsilon)h^{\alpha-1}(y), i.s., \text{ cuando } y \to 0) = 0.$$

(ii) Si

$$\int_{0+} \mathbb{P}_x \left(\overleftarrow{T}_1 < \left(\frac{h(y)}{y} \right)^{\alpha-1} \right) \frac{dy}{y} = \infty$$

entonces para toda $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}_x(\overleftarrow{T}_y < (1+\epsilon)h^{\alpha-1}(y), i.s., \text{ cuando } y \to 0) = 1.$$

3.2. El envolvente superior del ínfimo futuro

Definamos al ínfimo futuro $J = (J_t, t \geq 0)$ por

$$J_t = \inf_{t \leq s < T_0} Z_s \quad t \geq 0$$

El siguiente resultado da un test integral para el envolvente superior de J. Denotemos por $\mathcal{H}_0$ al conjunto de funciones crecientes positivas $h(x)$ en $(0, \infty)$ que satisfacen

(i) $h(0+) = 0$ y

(ii) existe $\beta \in (0,1)$ tal que $\sup_{x<\beta} \frac{t}{h(t)} < \infty$.

Teorema 3.3 *Sea $h \in \mathcal{H}_0$, entonces para toda $x > 0$*

(i) Si

$$\int_{0+} \mathbb{P}_x \left(\overleftarrow{U}_1 < \frac{t}{h(t)} \right) \frac{dt}{t} < \infty$$

entonces para toda $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}_x(J_t > (1+\epsilon)h^{\frac{1}{\alpha-1}}(t), i.s., \text{ cuando } t \to 0) = 0.$$

(ii) Si

$$\int_{0+} \mathbb{P}_x \left(\overleftarrow{U}_1 < \frac{t}{h(t)} \right) \frac{dt}{t} = \infty$$

entonces para toda $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}_x(J_t > (1-\epsilon)h^{\frac{1}{\alpha-1}}(t), i.s., \text{ cuando } t \to 0) = 1.$$

Prueba. En la prueba supondremos que $x > 1$, el caso $x < 1$ se sigue de los mismos argumentos usando la propiedad de auto-similitud. Sea (x_n) una sucesión decreciente la cual converge a 0. Definamos los eventos $A_n = \{$Existe $t \in [\overleftarrow{U}_{x_{n+1}}, \overleftarrow{U}_{x_n}]$ tal que $J_t > h^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)\}$. Del hecho de que U_{x_n} se va a 0, c.s. cuando n se va a $+\infty$, vemos

$$\{J_t > h^{\frac{1}{\alpha-1}}(t), i.s., \text{ cuando } t \to 0\} = \limsup_{n\to+\infty} A_n.$$

Como h es una función creciente y $J_{\overleftarrow{U}_{x_n}} = x_n$ c.s., las siguientes inclusiones se cumplen

$$\{x_n > h^{\frac{1}{\alpha-1}}(\overleftarrow{U}_{x_n})\} \subset A_n \subset \{x_n > h^{\frac{1}{\alpha-1}}(\overleftarrow{U}_{x_{n+1}})\}. \tag{3.4}$$

Ahora, probemos la parte convergente. Tomemos $x_n = r^n$, para $0 < r < 1$ y $h_r(t) = r^{-2}h^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)$. Dado que h es creciente, deducimos

$$\begin{aligned}\sum_n \mathbb{P}_x(r^n > h_r(\overleftarrow{U}_{r^{n+1}})) &= \sum_n \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(r^n > h_r(\widetilde{U}_{r^{n+1}})) \\ &\leq -\frac{1}{\log r}\int_0^r \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(t > h^{\frac{1}{\alpha-1}}(\widetilde{U}_t))\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Reemplazando h por h_r en (3.4), vemos que obtenemos nuestro resultado si

$$\int_0^r \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(t > h^{\frac{1}{\alpha-1}}(\widetilde{U}_t))\frac{dt}{t} < \infty. \tag{3.5}$$

A través de cálculos elementales, deducimos que

$$\begin{aligned}\int_0^r \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(t > h^{\frac{1}{\alpha-1}}(\widetilde{U}_t))\frac{dt}{t} &= \hat{\mathbb{E}}^{\uparrow}\left[\int_0^r \mathbf{1}_{\{t > h^{\frac{1}{\alpha-1}}(\widetilde{U}_t)\}}\frac{dt}{t}\right] \\ &= (\alpha-1)\int_0^{h^{-1}(r)} \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}\left(\widetilde{U}_1 < \frac{t}{h(t)}\right)\frac{dt}{t},\end{aligned}$$

donde $h^{-1}(s) = \inf\{t > 0 : h(t) > s\}$, la inversa por la derecha de h. Entonces, la integral (3.5) converge si

$$\int_0^{h^{-1}(r)} \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}\left(\widetilde{U}_1 < \frac{t}{h(t)}\right)\frac{dt}{t} = \int_0^{h^{-1}(r)} \mathbb{P}_x\left(\overleftarrow{U}_1 < \frac{t}{h(t)}\right)\frac{dt}{t} < \infty.$$

De modo que por el Lema de Borel-Cantelli y la Observación 3.1 se prueba la parte (i).

Probemos la parte divergente. Supongamos que h satisface

$$\int_{0+} \mathbb{P}_x\left(\overleftarrow{U}_1 < \frac{t}{h(t)}\right)\frac{dt}{t} = \infty$$

Tomemos, de nuevo, $x_n = rn$, para $r < 1$ y notemos que,

$$\begin{aligned} B_n &= \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \{\text{Existe } t \in (0, \overleftarrow{U}_{r^n}] \text{ tal que } J_t > h_r(t)\} \qquad (3.6)\\ &= \{\text{Existe } x \in (0, r^n] \text{ tal que } h_r^{-1}(\overleftarrow{U}_x) < x\} \end{aligned}$$

donde $h_r(t) = rh(t)$ y h_r^{-1} es la inversa por la derecha. Entonces para terminar la prueba de esta parte, como los conjuntos B_n son decrecientes conforme n crece, es suficiente probar que $\mathbb{P}_x(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = 1$. Por la relación (3.4)

$$\mathbb{P}_x(B_n) \geq 1 - \mathbb{P}_x(r^j \leq rh(\overleftarrow{U}_{r^j}), \quad \text{para toda } n \leq j \leq m-2) \qquad (3.7)$$

donde m es escogida de forma arbitraria de tal forma que $m \geq n+2$.

Ahora, definamos los eventos

$$C_n = \left\{r^n > rh^{\frac{1}{\alpha-1}}(\overleftarrow{U}_{r^n})\right\},$$

y vemos que $\sum \mathbb{P}_x(C_n) = \infty$. A partir de que la función h es creciente, es sencillo ver que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_x(C_n) \geq \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_x(r^t > h^{\frac{1}{\alpha-1}}(\overleftarrow{U}_{r^t}))dt = -\frac{1}{\log r}\int_0^1 \mathbb{P}_x(t > h^{\frac{1}{\alpha-1}}(\overleftarrow{U}_t))\frac{dt}{t}.$$

Entonces, es suficiente probar que esta última integral es infinita. En esta dirección vemos que

$$\int_0^r \mathbb{P}_x(t > h^{\frac{1}{\alpha-1}}(\overleftarrow{U}_t))\frac{dt}{t} = \int_0^{h^{-1}(r)} \mathbb{P}_x\left(\overleftarrow{U}_1 < \frac{t}{h(t)}\right)\frac{dt}{t}.$$

De modo que deducimos que $\sum \mathbb{P}_x(C_n) = \infty$ o lo que equivale a $\sum \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(C'_n) = \infty$ con $C'_n = \left\{r^n > rh^{\frac{1}{\alpha-1}}(\widetilde{U}_{r^n})\right\}$.

Ahora, sean m y n enteros tales que $0 \leq n \leq m-2$ y definamos el evento

$$S(n,m) = \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(r^j \leq rh(\widetilde{U}_{r^j} - \widetilde{U}_{r^{m-1}}) \text{ para toda } j \text{ que satisface } n \leq j \leq m-2).$$

Veamos que la siguiente afirmación se satisface.

(a) Existen sucesiones crecientes $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que $0 \leq n_k \leq m_k - 2$, y $m_k, n_k \to \infty$ y $S(n_k, m_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Supongamos, lo contrario, que existe $\delta > 0$ tal que $S(n,m) \geq \delta$ para enteros m y n suficientemente grandes. Entonces vemos de la propiedad de incrementos independientes que

$$\begin{aligned} 1 \geq \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}\left(\bigcup_{m=n+2}^{\infty} C'_m\right) &\geq \sum_{m=n+2}^{\infty} \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}\left(\left(\bigcup_{j=n+1}^{m-2} C'_j\right)^c \cap C'_m\right) \\ &\geq \sum_{m=n+2}^{\infty} \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(C'_m) S(n,m) \geq \delta \sum_{m=n+2}^{\infty} \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(C'_m). \end{aligned}$$

Esto contradice que $\sum \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(C'_n) = \infty$ y entonces la afirmación (a) se cumple. Denotemos $S(k) = S(n_k, m_k)$ y

$$L'(k) = \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(r^j > rh^{\frac{1}{\alpha-1}}(\widetilde{U}_{r^j}) \text{ para toda } j \text{ tal que } n_k \leq j \leq m_k - 2).$$

Definamos

$$p_k(x) = \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}(r^j > rh^{\frac{1}{\alpha-1}}(\widetilde{U}_{r^j} - \widetilde{U}_{r^{m_k-2}} + x) \text{ para toda } j \text{ tal que } n_k \leq j \leq m_k - 3).$$

Notemos que $0 \leq p_k(x) \leq 1$ y $p_k(x)$ es creciente en x. Vamos a probar que

$$\lim_{k\to\infty} L'(k) = 0. \tag{3.8}$$

Denotemos a las distribuciones de $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{U}_1 - \widetilde{U}_r$ y $\widetilde{U}_{r^{m_k-2}} - \widetilde{U}_{r^{m_k-1}}$ por μ, η y η_k para $k \geq 0$, respectivamente. Sea $v_k = h^{-1}(r^{(m_k-3)(\alpha-1)})$ y sea $w_k = r^{-(m_k-2)(\alpha-1)}h^{-1}(r^{m_k-3}(\alpha-1))$. Entonces $S(k)$ y $L'(k)$ satisfacen

$$S(k) = \int_{v_k}^{\infty} p_k(t)\eta_k(dt) = \int_{w_k}^{\infty} p_k(r^{(m_k-2)(\alpha-1)}t)\eta(dt)$$

y

$$L'(k) = \int_{w_k}^{\infty} p_k(r^{(m_k-2)(\alpha-1)}t)\mu(dt).$$

Observemos que

$$S(k) \geq p_k(a^{m_k-2}N)\int_N^\infty \eta(dt) > 0 \text{ para } N \geq C^{\alpha-1}r^{\alpha-1},$$

donde $C = \sup_{x\leq\beta} x/h(x)$. Entonces la afirmación (a) implica que

$$\lim_{k\to\infty} p_k(a^{n_k-2}N) = 0 \text{ para toda } N \geq Cr. \tag{3.9}$$

Por otro lado,

$$L'(k) \leq \int_0^N p_k(a^{n_k-2}N)\mu(dt) + \int_N^\infty \mu(dt).$$

De modo que, haciendo $k \to \infty$ y $N \to \infty$, obtenemos (3.8) de (3.9), de modo que por la Observación 3.1 se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} L(k) = 0, \tag{3.10}$$

donde

$$L(k) = \mathbb{P}_x(r^j > rh^{\frac{1}{\alpha-1}}(\overleftarrow{U}_{r^j}) \text{ para toda } j \text{ tal que } n_k \leq j \leq m_k - 2).$$

Entonces vemos que los conjuntos B_{n_k} definidos en (3.6) satisfacen $\mathbb{P}_x(B_{n_k}) \geq 1 - L(k)$ por (3.7). Así de (3.10) vemos que $\mathbb{P}_x(\bigcap_{k=1}^\infty B_{n_k}) = 1$, lo que finaliza la prueba.

□

3.3. Leyes de logaritmo iterado

En esta sección se establecerá leyes de logaritmo iterado para el C.B. proceso α-estable retornado cerca del origen y los procesos relacionado a este. Para esto, dado que los tests integrales de las secciones anteriores dependen de la distribución del último tiempo de pasada por debajo de uno, $\overleftarrow{U}_1$, nos enfocaremos en ello primero.

Lema 3.1 *La distribución de $\overleftarrow{U}_1$ está dada por*

$$\mathbb{P}_x(\overleftarrow{U}_1 \leq t) = \exp\{-[c_+(\alpha-1)t]^{-\frac{1}{\alpha-1}}\} \tag{3.11}$$

Prueba. Sabemos que,

$$\mathbb{P}_x(Y_t = 0) = e^{-xu_t(\infty)},$$

y por (2.19) $u_t(\infty) = [c_+(\alpha-1)t]^{-\frac{1}{\alpha-1}}$, entonces

$$\mathbb{P}_x(Y_t = 0) = \exp\{x[c_+(\alpha-1)t]^{-\frac{1}{\alpha-1}}\}.$$

Ahora, observando que para $t > 0$, $\{T_0 \leq t\} = \{Y_t = 0\}$ y del hecho de que $\overleftarrow{U}_x \stackrel{d}{=} T_0$ bajo $\mathbb{P}_x$, observamos

$$\mathbb{P}_x(\overleftarrow{U}_x \leq t) = \exp\{-x[c_+(\alpha-1)t]^{-\frac{1}{\alpha-1}}\}.$$

Por último de la Observación 3.1 y la propiedad de auto-similitud de $\overleftarrow{U}$ se obtiene (3.11).

□

De aquí en adelante por simplicidad, introduciremos la notación

$$h(t) = t(c_+(\alpha-1))(\log|\log t|)^{\alpha-1}. \tag{3.12}$$

El siguiente resultado nos da una ley de logaritmo iterado para el proceso del ínfimo futuro, J.

Teorema 3.4 *Para toda* $x > 0$

$$\limsup_{t\to 0} \frac{J_t}{t^{\frac{1}{\alpha-1}} \log|\log t|} = (c_+(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \mathbb{P}_x - \textit{c.s.}$$

Prueba. A partir del Lema 3.1 vemos que

$$-\log \mathbb{P}_x\left(\overleftarrow{U}_1 < t\right) = (c_+(\alpha-1))^{-\frac{1}{\alpha-1}} t^{-\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{3.13}$$

Definamos para $0 < \epsilon < 1$,

$$h_{1,\epsilon}(t) = (1+\epsilon)^{-1}h(t) \quad \text{y} \quad h_{2,\epsilon}(t) = (1-\epsilon)^{-1}h(t).$$

Entonces de la ecuación (3.13)

$$-\log \mathbb{P}_x\left(\overleftarrow{U}_1 < \frac{t}{h_{1,\epsilon}(t)}\right) = (1+\epsilon)^{\frac{1}{\alpha-1}} \log|\log t|.$$

Por lo tanto, tomando $k_\epsilon = (1+\epsilon)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, tenemos que

$$\int_{0+} \mathbb{P}_x \left(\overleftarrow{U}_1 < \frac{t}{h_{1,\epsilon}(t)} \right) \frac{dt}{t} = \int_{0+} |\log t|^{-k_\epsilon} \frac{dt}{t} < \infty$$

a partir de que $k_\epsilon > 1$. De forma similar se demuestra que,

$$\int_{0+} \mathbb{P}_x \left(\overleftarrow{U}_1 < \frac{t}{h_{2,\epsilon}(t)} \right) \frac{dt}{t} = \infty$$

De modo que el resultado se sigue del Teorema 3.3, tomando ϵ suficientemente pequeño.

□

Ahora, a través del resultado anterior establezcamos una ley de logaritmo iterado para el C.B. proceso retornado al tiempo de extinción, Z.

Teorema 3.5 *Para toda* $x > 0$

$$\limsup_{t \to 0} \frac{Z_t}{t^{\frac{1}{\alpha-1}} \log|\log t|} = (c_+(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \mathbb{P}_x - \textit{c.s.}$$

Prueba. La cota inferior es sencilla a partir del Teorema (3.4). Entonces

$$(c_+(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}} = \limsup_{t \to 0} \frac{J_t}{t^{\frac{1}{\alpha-1}} \log|\log t|} \leq \limsup_{t \to 0} \frac{Z_t}{t^{\frac{1}{\alpha-1}} \log|\log t|} \quad \mathbb{P}_x - \text{c.s.}$$

Ahora, probemos la cota superior. Sea $0 < r < 1$ y recordemos que el supremo de Z, está definido por $S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} Z_s$. Definamos los eventos $A_n = \{S_{r^{n-1}} > \eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)\}$, donde $(1+r)d^{-1} = \eta$ y $d = (c_+(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}}$. Del Lema de Borel Cantelli, si $\sum_n \mathbb{P}_x(A_n) < \infty$, se sigue que $S_{r^{n-1}} \leq \eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)$ para toda n suficientemente grande, $\mathbb{P}_x$-c.s., donde es h esta dada en (3.12). A partir de que la función h y el proceso S son crecientes en una vecindad de 0, tenemos que

$$S_t \leq \eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(t) \quad \text{para} \quad r^n \leq t \leq r^{n-1}, \quad \text{bajo } \mathbb{P}_x.$$

Entonces, es suficiente probar que $\sum_n \mathbb{P}_x(A_n) < \infty$.

Sea $0 < \epsilon < 1 - \frac{r^{\frac{1}{\alpha-1}}}{1+r}$ y $0 < r < 1$, entonces por la propiedad de Markov

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x(J_{r^{n-1}} > (1-\epsilon)\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)) \\
&\quad \geq \mathbb{P}_x(S_{r^{n-1}} > \eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n), J_{r^{n-1}} > (1-\epsilon)\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)) \\
&\quad = \int_0^{r^{n-1}} \mathbb{P}_x(\overleftarrow{T}_{\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)} \in dt)\mathbb{P}_x(J_{r^{n-1}-t} > (1-\epsilon)\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)) \\
&\quad \geq \mathbb{P}_x(S_{r^{n-1}} > \eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n))\mathbb{P}_x(J_0^{\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)} > (1-\epsilon)\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)), \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

donde $J_0^{\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)}$ es el ínfimo futuro del proceso $Z + \eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)$. Por otro lado notemos que $J_0^{\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)}$ es un ínfimo absoluto, de modo que por la Proposición 2.2 y el Lema VII.12 en [2] tenemos que

$$\mathbb{P}_x(J_0^{\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)} > (1-\epsilon)\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)) = \frac{W(\epsilon\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n))}{W(\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n))},$$

donde W es la función escala del proceso de Lévy α-estable espectralmente positivo dada en la Observación 1.1 asociado al C.B. proceso α-estable. Entonces

$$\mathbb{P}_x(J_0^{\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)} > (1-\epsilon)\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)) = \epsilon^{\alpha-1}.$$

De modo que de la desigualdad (3.14), tenemos que

$$\mathbb{P}_x(J_{r^{n-1}} > (1-\epsilon)\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)) \geq \epsilon^{\alpha-1}\mathbb{P}_x(S_{r^{n-1}} > \eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)). \qquad (3.15)$$

Ahora, probemos lo que queremos, como el último tiempo de pasada por debajo de un cierto nivel es el inverso por la derecha del ínfimo futuro, tenemos que

$$\mathbb{P}_x(J_{r^{n-1}} > (1-\epsilon)\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)) = \mathbb{P}_x(\overleftarrow{U}_{(1-\epsilon)\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)} < r^{n-1}),$$

por otro lado del Lema 3.1

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\overleftarrow{U}_{(1-\epsilon)\eta d h^{\frac{1}{\alpha-1}}(r^n)} < r^{n-1}) &= \mathbb{P}_x\left(\overleftarrow{U}_1 < \frac{r^{n-1}}{(1-\epsilon)^{\alpha-1}\eta^{\alpha-1}d^{\alpha-1}h(r^n)}\right) \\
&= (n|\log r|)^{-(1-\epsilon)\eta d r^{-\frac{1}{\alpha-1}}} > 0. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Entonces de la desigualdad (3.14), tenemos que

$$\sum_n \mathbb{P}_x(A_n) \leq \epsilon^{\alpha-1}\sum_n (n|\log r|)^{-(1-\epsilon)\eta d r^{-\frac{1}{\alpha-1}}} < +\infty$$

a partir de que $(1-\epsilon)\eta d r^{-\frac{1}{\alpha-1}} > 1$. Por lo tanto,

$$\limsup_{t\to 0} \frac{S_t}{h^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)} \leq 1, \quad \mathbb{P}_x - \text{c.s.},$$

ya que escogemos r cercano a cero. De donde se sigue que

$$\limsup_{t\to 0} \frac{Z_t}{t^{\frac{1}{\alpha-1}} \log|\log t|} \leq (c_+(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad \mathbb{P}_x - \text{c.s.}$$

□

Un resultado inmediato que se obtiene del Teorema anterior es el siguiente.

Corolario 3.1 *Para toda* $x > 0$

$$\limsup_{t\to 0} \frac{S_t}{t^{\frac{1}{\alpha-1}} \log|\log t|} = (c_+(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \mathbb{P}_x - \textit{c.s.}$$

El siguiente resultado describe la envolvente superior del C.B proceso retornado al tiempo de extinción reflejado en su futuro ínfimo $(Z_t - J_t, 0 \leq t \leq T_0)$, en forma de una ley de logaritmo iterado.

Teorema 3.6 *Para toda* $x > 0$

$$\limsup_{t\to 0} \frac{Z_t - J_t}{t^{\frac{1}{\alpha-1}} \log|\log t|} = (c_+(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \mathbb{P}_x - \textit{c.s.}$$

Prueba. Del Teorema 3.5 es claro que

$$\limsup_{t\to 0} \frac{Z_t - J_t}{t^{\frac{1}{\alpha-1}} \log|\log t|} \leq \limsup_{t\to 0} \frac{Z_t}{t^{\frac{1}{\alpha-1}} \log|\log t|} = (c_+(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad \mathbb{P}_x - \text{c.s.}$$

Ahora, fijemos $\epsilon \in (0, 1/2)$ y definamos

$$R_n = \inf\left\{\frac{1}{n} \leq s : \frac{Z_s}{h(s)} \geq (1-\epsilon)\right\}.$$

Notemos que para n grande $1/n < R_n < \infty$ $\mathbb{P}_x$-c.s. Además del Teorema 3.5 se sigue que $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\mathbb{P}_x$-c.s.

Del Lema VII.12 en [12] y a partir de que Z no tiene saltos positivos, aplicando la propiedad fuerte de Markov, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x\left(\frac{Z_{R_n}-J_{R_n}}{h(R_n)}\geq(1-2\epsilon)\right) &= \mathbb{P}_x\left(J_{R_n}\leq\frac{\epsilon}{1-\epsilon}Z_{R_n}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{P}_x\left(J_{R_n}\leq\frac{\epsilon}{1-\epsilon}Z_{R_n}\Big|Z_{R_n}\right)\right)\\
&= 1-\mathbb{E}\left(\frac{W(\ell(\epsilon)Z_{R_n})}{W(Z_{R_n})}\right),
\end{aligned}$$

donde $\ell(\epsilon)=(1-2\epsilon)/(1-\epsilon)$ y W es la función escala del proceso de Lévy α-estable espectralmente positivo dada en la Observación 1.1 asociado al C.B. proceso α-estable. A partir de que

$$\limsup_{x\to0}\frac{W(\beta x)}{W(x)}=\beta^{\alpha-1}<1,\quad \text{para toda } \beta<1.$$

Una aplicación del Teorema de Fatou-Lebesgue, muestra que

$$\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(\frac{W(\ell(\epsilon)Z_{R_n})}{W(Z_{R_n})}\right)\leq\mathbb{E}\left(\limsup_{n\to+\infty}\frac{W(\ell(\epsilon)Z_{R_n})}{W(Z_{R_n})}\right)<1,$$

lo cual implica que

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_x\left(\frac{Z_{R_n}-J_{R_n}}{h(R_n)}\geq(1-2\epsilon)\right)>0.$$

Notemos que

$$\mathbb{P}_x\left(\frac{Z_{R_p}-J_{R_p}}{h(R_p)}\geq(1-2\epsilon),\ \text{para alguna } p\geq n\right)\geq\mathbb{P}_x\left(\frac{Z_{R_n}-J_{R_n}}{h(R_n)}\geq(1-2\epsilon)\right).$$

A partir de que $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\mathbb{P}_x$-c.s., es suficiente tomar límite de ambos lados cuando $n\to\infty$, por lo tanto para toda $\epsilon\in(0,1/2)$

$$\mathbb{P}_x\left(\frac{Z_t-J_t}{h(t)}\geq(1-2\epsilon),\ \text{i.s., cuando } t\to0\right)\geq\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}_x\left(\frac{Z_{R_n}-J_{R_n}}{h(R_n)}\geq(1-2\epsilon)\right)=1.$$

Entonces,

$$\limsup_{t\to0}\frac{Z_t-J_t}{h(t)}\geq1-2\epsilon,\quad \mathbb{P}_x-\text{c.s.},$$

y a partir de que ϵ puede ser escogido arbitrariamente pequeño, se sigue que

$$\limsup_{t\to 0} \frac{Z_t - J_t}{t^{\frac{1}{\alpha-1}} \log|\log t|} \geq (c_+(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \mathbb{P}_x - \text{c.s.}$$

□

El siguiente resultado nos da una ley de logaritmo iterado para el último tiempo de pasada. Definamos la función

$$g(t) = t(c_+(\alpha-1))^{-\frac{1}{\alpha-1}}(\log|\log t|)^{-1}.$$

Teorema 3.7 *Para toda* $x > 0$

$$\liminf_{t\to 0} \frac{\overleftarrow{U}_t}{t^{\alpha-1}(\log|\log t|)^{1-\alpha}} = (c_+(\alpha-1))^{-1}, \quad \mathbb{P}_x - \textit{c.s.}$$

Prueba. A partir del Lema 3.1 vemos que

$$-\log \mathbb{P}_x\left(\overleftarrow{U}_1 < t\right) = (c_+(\alpha-1))^{-\frac{1}{\alpha-1}} t^{-\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{3.17}$$

Definamos para $0 < \epsilon < 1$,

$$g_{1,\epsilon}(t) = (1-\epsilon)g(t) \quad \text{y} \quad g_{2,\epsilon}(t) = (1+\epsilon)g(t).$$

Entonces de la ecuación (3.17)

$$-\log \mathbb{P}_x\left(\overleftarrow{U}_1 < \left(\frac{g_{1,\epsilon}(t)}{t}\right)^{\alpha-1}\right) = (1-\epsilon)^{-1}\log|\log t|.$$

Por lo tanto, tomando $k_\epsilon = (1-\epsilon)^{-1}$, tenemos que

$$\int_{0^+} \mathbb{P}_x\left(\overleftarrow{U}_1 < \left(\frac{g_{1,\epsilon}(t)}{t}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{dt}{t} = \int_{0^+} |\log t|^{-k_\epsilon}\frac{dt}{t} < \infty$$

a partir de que $k_\epsilon > 1$. De forma similar se demuestra que,

$$\int_{0^+} \mathbb{P}_x\left(\overleftarrow{U}_1 < \left(\frac{g_{2,\epsilon}(t)}{t}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{dt}{t} = \infty$$

De modo que el resultado se sigue del Teorema 3.1.

□

Lema 3.2 *La distribución de* $\overleftarrow{T}_1$ *satisface para* $0 < \epsilon < 1$

$$\exp\{-[c_+(\alpha-1)t]^{-\frac{1}{\alpha-1}}\} \leq \mathbb{P}_x(\overleftarrow{T}_1 \leq t) \leq \epsilon^{\alpha-1}\exp\{-(1-\epsilon)[c_+(\alpha-1)t]^{-\frac{1}{\alpha-1}}\},$$

para $\alpha \in (1,2]$.

Prueba. El Lema 3.1, claramente implica que

$$\mathbb{P}_x(\overleftarrow{T}_1 \leq t) \geq \exp\{-[c_+(\alpha-1)t]^{-\frac{1}{\alpha-1}}\}.$$

Para la otra desigualdad, definamos el proceso del supremo $S = (S_t, t \geq 0)$ por $S_t = \sup_{0\leq s\leq t} Z_s$. Fijemos $\epsilon \in (0,1)$, entonces por la propiedad de Markov

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(J_t > (1-\epsilon)) &\geq \mathbb{P}_x(S_t > 1, J_t > (1-\epsilon)) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}_x(T_1 \in dy)\mathbb{P}_x(J^1_{t-y} > (1-\epsilon)) \\ &\geq \mathbb{P}_x(T_1 < t)\mathbb{P}_x(J^1_0 > (1-\epsilon)), \end{aligned}$$

donde J^1 es el futuro ínfimo del proceso $Z+1$ con. Ahora, de la definición del proceso del futuro ínfimo, es claro que J^1_0 es un ínfimo absoluto. Entonces por la Proposición 2.2 y el Lema VII.12 en [2] tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(J^1_0 > (1-\epsilon)) &= \frac{W(\epsilon)}{W(1)} \\ &= \epsilon^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Por otro lado, a partir de que el último tiempo de pasada de pasada por debajo de un cierto nivel es el inverso por la derecha del futuro ínfimo, tenemos que

$$\mathbb{P}_x(J_t > (1-\epsilon)) = \mathbb{P}_x(\overleftarrow{U}_{(1-\epsilon)} < t).$$

Por lo tanto, del Lema 3.1

$$\mathbb{P}_x(\overleftarrow{T}_1 \leq t) \leq \epsilon^{\alpha-1}\exp\{-(1-\epsilon)[c_+(\alpha-1)t]^{-\frac{1}{\alpha-1}}\}.$$

$\square$.

Ahora establezcamos una ley de logaritmo iterado para el primer tiempo de pasada.

Teorema 3.8 *Para toda* $x > 0$

$$\liminf_{t \to 0} \frac{\overleftarrow{T}_t}{t^{\alpha-1}(\log|\log t|)^{1-\alpha}} = (c_+(\alpha-1))^{-1}, \quad \mathbb{P}_x - \textit{c.s.}$$

Prueba. Definamos para $0 < \epsilon < 1$,

$$g_{1,\epsilon}(t) = (1-\epsilon)^2 g(t) \quad \text{y} \quad g_{2,\epsilon}(t) = (1-\epsilon)(1+\epsilon)g(t).$$

A partir del Lema 3.2, tomando $k_\epsilon = (1-\epsilon)^{-1}$, vemos que

$$\mathbb{P}_x\left(\overleftarrow{T}_1 < \left(\frac{g_{1,\epsilon}(t)}{t}\right)^{\alpha-1}\right) \leq \epsilon^{\alpha-1}|\log t|^{-k_\epsilon} t^{-\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\int_{0^+} \mathbb{P}_x\left(\overleftarrow{T}_1 < \left(\frac{g_{1,\epsilon}(t)}{t}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{dt}{t} \leq \epsilon^{\alpha-1}\int_{0^+}|\log t|^{-k_\epsilon}\frac{dt}{t} < \infty$$

a partir de que $k_\epsilon > 1$. De forma similar se demuestra que,

$$\int_{0^+} \mathbb{P}_x\left(\overleftarrow{T}_1 < \left(\frac{g_{2,\epsilon}(t)}{t}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{dt}{t} = \infty$$

De modo que el resultado se sigue del Teorema 3.2.

□

Bibliografía

[1] S. Athreya and P. Ney: Branching Processes. Springer, Berlin Heidelberg New York, (1972).

[2] J. Bertoin: Lévy Processes. Cambridege University Press, Cambridge (1996).

[3] N.H. Bingham: Continuous branching processes and spectral positivity. Stochastic Processes and Their Applications 4, 217-242, (1976).

[4] Ma. E. Caballero, A. Lambert and G. Uribe Bravo: Proof(s) of the Lamperti representation of continuous-state branching processes. Probability Surveys 6, 62-89, (2009).

[5] R. A. Doney: Fluctutation theory for Lévy processes. Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour, Lecture Notes in Mathematics. Pac. J. Math. 21, 21-33, (1967).

[6] D. R. Grey: Asymptotic Behaviour of Continuous Time, Continuois State-Space Branching Processes. J. Appl. Probab. 11, 669-667, (1974).

[7] A. Grimvall: On the convergence of sequences of branching processes. Ann. Probab., 2, 1027-1045 (1974).

[8] M. Jirina: Stochastic branching processes with continuos state-space. Czech. Math. J. 8, 292-313, (1958).

[9] Andreas E. Kyprianou: Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications. Springer, Berlin, (2006).

[10] A. Kyprianou and J.C. Pardo: Continuos-state branching processes and self-similarity. J. Appl. Probab. 45, 1140-1160 (2008).

[11] J. Lamperti: Continuous-state branching processes. Bull. Amer. Math. Soc., 73, 382-386, (1967).

[12] J. Lamperti: The limit of sequence of branching processes. Z. Wahrscheinlichkeitsth. 7, 271-288, (1967).

[13] J. -F. Le Gall: Spatial Branching Processes, Random Snakes and Partial Differential Equations. Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser, (1999).

[14] J.C. Pardo: On the rate of growth of Lévy processes with no positive jumps conditioned to stay positive. Elect. Comm. in Probab. 13, 494-506, (2008).

[15] K. I. Sato: Lévy Processes and infinitely divisible distributions. Cambridge University Press, Cambridge, (1999).

[16] M.L. Silverstein: A new approach to local time. J. Math. Mech., 17, 1023-1054, (1968).