CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Maestría en Ciencias con Especialidad en Probabilidad y Estadística

TESIS:

La función de penalidades de Gerber-Shiu para el de riesgo clásico perturbado por un proceso Browniano

Daniela Patricia Cisneros Arce

Directora de tesis :
Dra.Ekaterina Todorova Kolkovska

13 de Diciembre de 2012

Integrantes del jurado:

Presidente: Dr. Víctor Manuel Rivero Mercado
Secretario: Dr. Juan Carlos Pardo Millán
Vocal : Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska

Asesora:

Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska

Sustentante:

L.A. Daniela Patricia Cisneros Arce

Dedicatoria

A mis padres y abuelos.

Agradecimientos

En la siguientes líneas, quiero primero agradecer a mis padres que siempre me han dado su apoyo. A mi padre, por sus consejos, regaños y criticas que siempre han impulsado en mí el deseo de superarme y de alcanzar todos mis sueños. A ti mamá, por ser ese don único, con el cual logras sacarme de cualquier callejón sin salida aparente, donde he llegado a estar. A mis hermanos que sin importar las incontables peleas que tenemos siempre logran hacerme reír. A mis tíos sin mencionar a ninguno en particular, ya que son muchos y cada uno de ustedes me ha apoyado de una forma especial y única.

A la Dra. Ekatrina cuyo seguimiento y colaboración permitió la elaboración de este trabajo de tesis, además de que ha sido una excelente consejera durante todo el transcurso de la maestría. Al Dr. Juan Carlos cuyos comentarios y anotaciones ayudaron a mejorar este trabajo.

Al comité de la maestría en Probabilidad y Estadística de CIMAT por darme la oportunidad de formar parte de esta institución; así como al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca de maestría que me fue otorgada durante el primer año y medio de la maestría, al igual que los compañeros de grado superiores que fueron un apoyo constante. Y a CIMAT al darme una beca para concluir el programa, además de un segundo hogar.

También quisiera agradecer Carolina, Eduardo y Gabriel, ahora grandes amigos, con los cuales empecé la aventura de estudiar una maestría y viví tanto gratos momentos y superamos muchos retos juntos. En especial a ti Carolina, que con tu fuerza de voluntad me empujaste de principio a fin. A mi novio que con su cariño, paciencia y enseñanzas me ha ayudado a concluir este proyecto. Además de los incontables amigos que conocí durante el tiempo que estuve en Guanajuato, con los cuales compartí muchas alegrías.

Por ultimo quisiera agradecer a mi abuela, Doña Maria Dolores que es un ejemplo de vida.

Índice general

Introducción

En el presente trabajo nos centramos en el estudio del modelo clásico de riesgo perturbado por un movimiento Browniano en el cual el capital de la aseguradora se obtiene a partir de un capital inicial, una prima constante en el tiempo, un proceso que captura las reclamaciones y un proceso de Wiener que representa las fluctuaciones del mercado. Este modelo fue estudiado por Gerber (1970), Gerber y Dufresne (1991) [10], Gerber y Shiu (1998) [4], Gerber y Landry (1998) [3] y Wang (2001), entre otros.

El objetivo principal es definir la función de penalidades de Gerber-Shiu [4], que presenta una medida de riesgo para el modelo, desarrollar la ecuación que ésta satisface, dada por Tsai y Willmoot (2002) [1], y obtener resultados numéricos para las diferentes probabilidades de ruina en algunos casos importantes de procesos perturbados.

La organización del trabajo es como sigue: en el Capítulo 1 empezamos dando la descripción del modelo a trabajar, así como algunos conceptos y teoremas básicos necesarios para el desarrollo del trabajo.

En el Capítulo 2 se demuestra el resultado principal de la tesis (Teorema 2.1) sobre la función de renovación impropia que satisface la función de penalidades de Gerber-Shiu. Esta demostración se obtiene en las secciones 2.1 y 2.2. En la sección 2.1 calculamos primero la función de renovación impropia para la ruina ocasionada por el Movimiento Browniano, así como su correspondiente transformada de Laplace. En la sección 2.2 proporcionamos la ecuación de renovación impropia para la ruina ocasionada por una reclamación, dando al igual su transformada de Laplace. La sección 2.3 presenta una prueba de la convergencia de la función de penalidades de Gerber-Shiu para el caso cuando el coeficiente del movimiento Browniano tiende a cero, hacia la función de penalidades de Gerber-Shiu del Proceso de riesgo clásico. Por último en la sección 2.4, damos una fórmula asintótica para la función de penalidades de Gerber-Shiu, así como la demostración de la misma.

Los cálculos numéricos se presentan en el Capítulo 3, donde trabajamos con el caso particular de las probabilidades de ruina. Aquí presentamos resultados anteriores de Dufresne y Gerber [10], y demostramos que estos se obtienen como un caso particular del Teorema 2.1 de la tesis. A partir de ello en la sección 3.2 obtenemos la expresión explícita para el cálculo de las probabilidades de ruina en el caso importante de distribuciones que son mezcla de exponenciales. Finalmente, en la sección 3.2.1 presentamos resultados numéricos y realizamos un estudio sobre la dependencia de las probabilidades de ruina por salto y por difusión de los parámetros del sistema.

1. Resultados Preliminares

1.1. Antecedentes

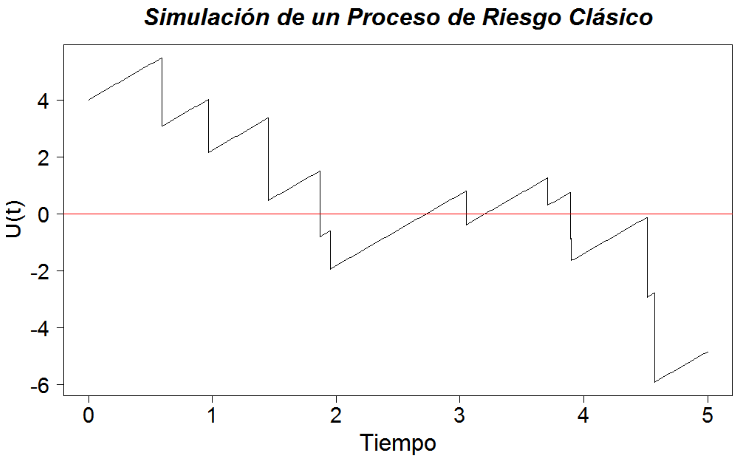

Figura 1.1.: Proceso de Riesgo Clásico

Aquí describimos el modelo de Riesgo Clásico, el número de reclamaciones se asume que sigue un Proceso de Poisson $\{N(t) : t \geq 0\}$ con parámetro λ. Suponemos que las reclamaciones X_i son independientes con distribución común $P(x) = Pr(X \leq x)$ sus momentos están dados por $p_j = \int_0^\infty x^j dP(x)$, para $j = 0, 1, ..., n$ y transformada de Laplace $\tilde{p}(x) = \int_0^\infty e^{-sx} dP(x)$. La prima por unidad de tiempo es la constante c. Por lo tanto el monto acumulado de reclamaciones hasta el tiempo t se denota por $\{S(t) : t \geq 0\}$, donde $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ es un proceso de Poisson compuesto. Tenemos entonces

$$U(t) = u + ct - S(t), \tag{1.1.1}$$

donde $u = U(0)$ es el capital inicial. Denotemos por θ la carga de seguridad, $\theta = \frac{c-\lambda p_1}{\lambda p_1}$ y suponemos $\theta > 0$. Esto es debido a que si $\theta < 0$ la probabilidad de ruina del proceso es 1 para todo u.
Sea

$$T = \inf\{t : U(t) < 0\}$$

el tiempo de ruina, y

$$\psi(u) = \mathbb{E}[I_{\{T<\infty\}}|U(0) = u] = Pr(T < \infty|U(0) = u), \qquad u \geq 0,$$

la probabilidad de ruina. Dos variables aleatorias de interés relacionadas con el tiempo de ruina son $|U(T)|$, el deficit al tiempo de ruina, y $U(T-)$ es el límite por la izquierda de $U(t)$ al tiempo $t = T$ (capital inmediatamente antes de la ruina).

Gerber y Shiu en 1998, definieron la función de penalidades descontada o función de Gerber-Shiu para el proceso de riesgo clásico que involucra a T, $U(T-)$ y $|U(T)|$ como sigue. Para, $\delta \geq 0$ una constante dada y una función determinista $\omega(x, y) : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ llamada función de penalidades,

$$\phi_0 = \mathbb{E}[e^{-\delta T}\omega(U(T-), |U(T)|)I_{\{T<\infty\}}|U(0) = u] \tag{1.1.2}$$

Esta función se puede interpretar como la esperanza de la función de penalidad descontada con una tasa de interés δ.
La probabilidad de ruina $\psi(u)$, se obtiene como un caso caso especial cuando $\omega(x, y) = 1$ y $\delta = 0$.
Posteriormente Gerber y Shiu (1998) obtuvieron una ecuación de renovación propia para ϕ_0, basados en el proceso de riesgo clásico (1.1.1) , que es la siguiente

$$\phi_0(u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi_0(u-x)\int_x^\infty e^{-\rho_0(y-x)}dP(y)dx + \frac{\lambda}{c}e^{\rho_0 u}\int_x^\infty e^{-\rho_0 x}\int_x^\infty \omega(x, y-x)dP(y)dx, \tag{1.1.3}$$

donde $\rho_0 = \rho(\delta, 0)$ es la única solución no negativa de la ecuación de Lundberg (ver Sección 1.2)

$$\lambda\widetilde{p}(\xi) = \lambda + \delta - c\xi.$$

Aquí suponemos que $\rho(0, 0) = 0$.
El proceso de riesgo a trabajar es un proceso mas general propuesto por Gerber (1970), en el cual extendió el modelo clásico de riesgo agregando un termino más, un movimiento Browniano o proceso de Wiener independiente de $\{S(t), t \geq 0\}$:

$$U(t) = u + ct - S(t) + \sigma B(t), \qquad t \geq 0 \tag{1.1.4}$$

donde $\sigma > 0$ es una constante y $\{B(t) : t \geq 0\}$ es un proceso estándar de Wiener independiente del proceso Poisson compuesto $\{S(t), t \geq 0\}$ (ver Apéndice B).
En este modelo la ruina puede ser alcanzada de forma continua debido al movimiento Browniano ó por una reclamación.

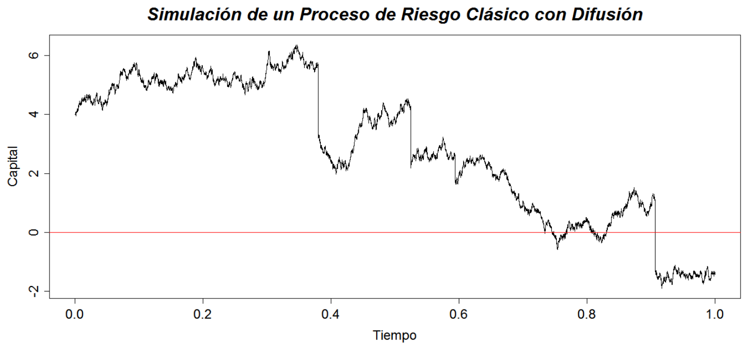

Figura 1.2.: Proceso de Riesgo Clásico con Difusión

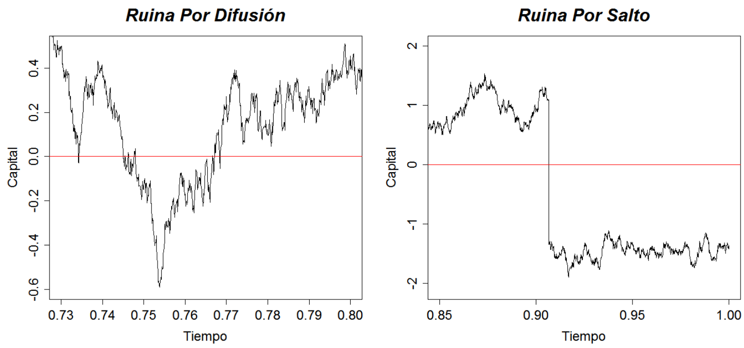

Figura 1.3.: Ruina

Dufresne y Gerber (1991),Wang (2001) estudiaron la probabilidad de ruina de este proceso.

Gerber y Landry (1998), generalizaron la definición (1.1.2), basados en (1.1.4), considerando un esquema de penalidad constante ω_0, en caso de que la ruina ocurra por oscilación, y $\omega(T)$, si es por una reclamación, donde $\omega(x) \geq 0$ es una función dada .
La función de penalidad descontada esperada, que ellos definieron fue

$$\phi(u) = \omega_0 \phi_d(u) + \mathbb{E}[e^{-\delta T} \omega(U(T) I_{\{T<\infty, U(T)<0\}})|U(0) = u]. \tag{1.1.5}$$

Gerber y Landry obtuvieron una función de renovación impropia que satisface $\phi(u)$.

1.2. Ecuación de Cramér-Lundberg

En esta sección, definimos el coeficiente de Cramér-Lundberg ρ que es intrínseco al modelo y es necesario para formular varios resultados en las siguientes secciones. El número ρ esta definido como la única solución no negativa de la ecuación de Cramér-Lundberg que definiremos en lo

que sigue.
Dado $\delta > 0$, se desea encontrar un ξ, para el cual el proceso $\{e^{-\delta+\xi U(t)}; t \geq 0\}$ es una martingala. Dado que $\{U(t); t \geq 0\}$ es un proceso estacionario con incrementos independientes, esto es equivalente a que,

$$e^{-\delta}\mathbb{E}\left[e^{\xi U(1)}\right] = e^{\xi u},$$

lo cual se simplifica al pedir que ξ satisfaga la ecuación:

$$D\xi^2 + \lambda\left[\int_0^\infty e^{-\xi x} dP(x) - 1\right] + c\xi - \delta = 0. \tag{1.2.1}$$

donde $D = \sigma^2/2$.
Como la parte izquierda de (1.2.1) es estrictamente convexa , continua para $\xi \geq 0$, toma valor $-\delta$ para $\xi = 0$ y tiende a ∞ cuando $\xi \to \infty$, se sigue que la ecuación (1.2.1) tiene una única solución no negativa. Si $\delta < 0$, entonces $\rho < 0$ y si $\delta = 0$, tenemos que $\rho = 0$. Esta solución, la denotamos por ρ.
Cabe resaltar que bajo algunas condiciones de regularidad de la función $p(x)$, (1.2.1) puede tener una solución negativa. Para la cual es necesario definir,

$$\begin{aligned} \tau(\xi) &= \lambda - \delta - c\xi - D\xi^2 = -D\left(\xi + \frac{c}{2D}\right)^2 + \frac{c^2}{4D} + \lambda + \delta \\ &= \lambda\tilde{p}(\xi). \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Dado que

$$\lambda\tilde{p}'(\xi) = -\lambda\int_0^\infty xe^{-\xi x} dP(x) < 0,$$
$$\lambda\tilde{p}''(\xi) = \lambda\int_0^\infty x^2e^{-\xi x} dP(x) > 0,$$

se tiene que es una función convexa decreciente con $\lambda\tilde{p}(0) = \lambda$; por el coeficiente negativo de ξ^2, $\tau(\xi)$ es una parábola. Por tanto la ecuación posee a lo máximo una raíz negativa $\xi_2 = -\kappa(\delta, D)$. Una condición necesaria para esto es que P sea una función de distribución de cola ligera (ver Rolski [8])

Definición 1.1 *La ecuación (1.2.1) se llama ecuación de Cramer-Lundberg generalizada y bajo condiciones de regularidad de $P(x)$ tiene una solución negativa llamada coeficiente de Cramer-Lundberg.*

1.3. Ecuaciones de Renovación

Definición 1.2 *Una ecuación integral de la forma*

$$g(x) = z(x) + \int_0^x g(x-v) dF(v) \tag{1.3.1}$$

donde $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *es una función localmente acotada y* F *es una distribución tal que* $F(0) = 0$. *Si* F *es una función de distribución propia es llamada* ***ecuación de renovación****, pero si* F *es una función de distribución impropia (*$F(\infty) < 1$*) se conoce como* ***ecuación de renovación impropia****.*

Teorema 1.1 *Suponga que* z *es una función acotada. Entonces existe una única función* g *acotada en intervalos finitos, que satisface (1.3.1). Se cumple además*

$$g(x) = \int_0^x z(x-v)dH_0(v),$$

donde $H_0(v) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(v)$ *es la función de renovación*[1]*.*

Definición 1.3 *Sea* h *una función en* $\mathbb{R}_+$*. Para cada* $\delta > 0$ *y* $n = 1, 2, \ldots$*, sean*

$$\underline{m}_n = min\{h(t) : (n-1)\delta \leq t \leq n\delta\} \qquad , \overline{m}_n = max\{h(t) : (n-1)\delta \leq t \leq n\delta\}$$

$$\underline{\sigma}(\delta) = \delta \sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n, \qquad \overline{\sigma}(\delta) = \delta \sum_{n=1}^{\infty} \overline{m}_n \tag{1.3.2}$$

Entonces h *se llama directamente Riemann integrable si ambas series* $\overline{\sigma}(\delta)$ *y* $\underline{\sigma}(\delta)$ *convergen absolutamente para cada* $\delta > 0$*, y se cumple*

$$\lim_{\delta \to 0} [\overline{\sigma}(\delta) - \underline{\sigma}(\delta)] = 0$$

Teorema 1.2 *Sea* F *una función de distribución no aritmética de una variable aleatoria positiva* X *con* $E[X] = \mu$*. Suponga que* z *es una función directamente Riemann integrable y que* g *es la solución de la ecuación de renovación*

$$g(x) = z(x) + \int_0^x g(x-v)dF(v).$$

Entonces

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} z(v)dv, & si \quad \mu < \infty \\ 0, & si \quad \mu = \infty \end{cases}$$

[1] Sea $F^{*k}(v) = \int_0^v F^{*k-1}(v-x)dF(x)$

2. Ecuación de Renovación para la función de Gerber-Shiu

Aquí trabajamos con el modelo perturbado (1.1.4). Al generalizar la función de penalidad descontada esperada (1.1.5), e involucrar las variables aleatorias $|U(T)|$ y $U(T-)$ se desea obtener una ecuación de renovación impropia, para

$$\phi(u) = \phi_d(u) + \phi_s(u), \tag{2.0.1}$$

donde

$$\phi_d(u) = \omega_0 \mathbb{E}\left[e^{-\delta T} I_{\{T<\infty, U(T)=0\}} | U(0) = u\right], \tag{2.0.2}$$

y

$$\phi_s(u) = \mathbb{E}[e^{-\delta T} \omega(U(T-), |U(T)|) I_{\{T<\infty, U(T)<0\}} | U(0) = u]. \tag{2.0.3}$$

Aquí consideramos nuevamente un esquema de penalidad constante ω_0 si la ruina ocurre por oscilación y función de penalidad $\omega(-y, x) \geq 0$ para $y > 0$ y $x < \infty$ cuando la ruina ocurre por un salto. Con lo cual obtendremos el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *Para* $D > 0$ *si* $\lim_{u\to\infty} e^{-\rho u}\phi_s(u) = 0$ *y* $\lim_{u\to\infty} e^{-\rho u}\phi_s'(u) = 0$*, entonces la función Gerber-Shiu* $\phi(u)$*, definida en (2.0.1) satisface la ecuación*

$$\phi(u) = \int_0^u \phi(u-y) g(y) dy + \omega_0 e^{-bu} + g_\omega(u), \qquad u \geq 0 \tag{2.0.4}$$

donde, $D = \sigma^2/2$,

$$g_\omega(u) = \frac{\lambda}{D} \int_0^u e^{-b(u-s)} \int_s^\infty e^{-\rho(x-s)} \mathbf{w}(s) dx ds, \tag{2.0.5}$$

y

$$g(y) = \frac{\lambda}{D} e^{\rho y} \int_0^y e^{-\left(\frac{c}{D}+2D\right)(y-s)} \int_s^\infty e^{-\rho x} p(x) dx ds \tag{2.0.6}$$

con $\mathbf{w}(x) = \int_x^\infty \omega(x, y-x) = \int_0^\infty \omega(x,y) dP(x+y)$.

Para su demostración primero encontraremos las ecuaciones de renovación que satisfacen ϕ_s (2.0.3) y ϕ_d (2.0.2).

2.1. Ecuación de Renovación para la función de Gerber-Shiu en el caso de ruina por oscilación

Teorema 2.2 *Supongamos que* $\lim_{z\to\infty} \phi_\rho(z) = 0$, *y* $\lim_{z\to\infty} \phi'_\rho(z) = 0$ *donde* $\phi_\rho = e^{-\rho u}\phi_d$. *Entonces , para* $D > 0$ *la función* $\phi_d(u)$, *satisface la ecuación de renovación impropia*

$$\phi_d(u) = \omega_0 e^{-bv} + \int_0^v \phi_d(y) g(v-y)dy,$$

donde $g(y) = \frac{\lambda}{D} e^{\rho y} \int_0^y e^{-\alpha(y-s)} \int_s^\infty e^{-\rho x} p(x)dxds$.

Demostración .
Consideremos un tiempo $t > 0$ pequeño. El factor de descuento en este tiempo es pues $e^{-\delta t}$. Entonces condicionando al tiempo T_1 del primer salto (si este ocurre), se tiene

$$\phi_d(u) = e^{-\delta t} \left(\mathbb{E}\left[\phi_d(u)|T_1 > t\right] \mathbb{P}(T_1 > t) + \mathbb{E}\left[\phi_d(u)|T_1 < t\right] \mathbb{P}(T_1 < t)\right) \tag{2.1.1}$$

recordando que la probabilidad de que ocurra un salto antes de t en un proceso Poisson es $1 - e^{-\lambda t}$, mientras que la probabilidad de que ocurra después es $e^{-\lambda t}$,

$$\phi_d(u) = e^{-\delta t} \left(\mathbb{E}\left[\phi_d(u)|T_1 > t\right] e^{-\lambda t} + \mathbb{E}\left[\phi_d(u)|T_1 < t\right] (1 - e^{-\lambda t})\right) \tag{2.1.2}$$

usando la propiedad de Markov y dado que el tamaño de la reclamación queda determinado por el capital al tiempo t,

$$\begin{aligned} e^{\delta t}\phi_d(u) &= \mathbb{E}\left[\phi_d\left(u + ct + \sigma B(t)\right)\right] e^{-\lambda t} \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^{u+ct+\sigma B(t)} \phi_d(u + ct + \sigma B(t) - y)dy\right] (1 - e^{-\lambda t}). \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Calculemos

$$\mathbb{E}\left[\phi_d(u + ct + \sigma B(t))\right].$$

Podemos utilizar la fórmula de Îto (Teo.A.2), ya que el proceso $Z_t = u + ct + \sigma B(t)$ cumple con las hipótesis del teorema: $\sigma B(t)$ es una martingala y ct un proceso creciente . Además ϕ_d es una función en $\mathcal{C}^2$, entonces

$$\phi_d(\theta_t) = \phi_d(u) + \int_0^t \phi'_d(\theta_s)dMs + \int_0^t \phi'_d(\theta_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \phi''_d(\theta_s)d\langle M\rangle_s$$

donde $\theta_t = u + ct + \sigma B(t)$ y $d\langle B\rangle_s = \sigma^2 ds$.
Por lo tanto,

$$\phi_d(\theta_t) = \phi_d(u) + c\int_0^t \phi'_d(\theta_s)ds + \int_0^t \phi'_d(\theta_s)dB_s + D\int_0^t \phi''_d(\theta_s)ds,$$

donde $D = \frac{\sigma^2}{2}$.

Tomando la esperanza en ambos lados, y utilizando que $\int_0^t \phi_d'(\theta_s)dB_s$ es martingala por hipótesis, por lo tanto, $\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_d'(\theta_s)dB_s\right] = 0$,

$$\mathbb{E}[\phi_d(\theta_t)] = \phi_d(u) + c\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_d'(\theta_s)ds\right] + D\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_d''(\theta_s)ds\right].$$

Sustituyendo en (2.1.3)

$$\begin{aligned} e^{\delta t}\phi_d(u) &= \left(\phi_d(u) + c\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_d'(\theta_s)ds\right] + D\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_d''(\theta_s)ds\right]\right) e^{-\lambda t} \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^{u+ct+\sigma B(t)} \phi_d(u+ct+\sigma B(t)-y)dy\right](1-e^{-\lambda t}), \end{aligned}$$

a partir del cual,

$$\begin{aligned} \phi_d(u) &= \left(\phi_d(u) + c\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_d'(\theta_s)ds\right] + D\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_d''(\theta_s)ds\right]\right) e^{-(\delta+\lambda)t} \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^{u+ct+\sigma B(t)} \phi_d(u+ct+\sigma B(t)-y)dy\right](e^{-\delta} - e^{-(\delta+\lambda)t}). \end{aligned}$$

usando que $e^{-at} = 1 - at + o(t)$ para $a > 0$

$$\begin{aligned} \phi_d(u) &= \left(\phi_d(u) + c\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_d'(\theta_s)ds\right] + D\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_d''(\theta_s)ds\right]\right)(1-(\lambda+\delta)t+o(t)) \\ &+ (\lambda t)\mathbb{E}\left[\int_0^{u+ct+\sigma B(t)} \phi_d(u+ct+\sigma B(t)-y)dy\right]. \end{aligned}$$

Cambiando el orden de integración,

$$\begin{aligned} \phi_d(u) &= \left(\phi_d(u) + c\int_0^t \mathbb{E}\left[\phi_d'(\theta_s)\right]ds + D\int_0^t \mathbb{E}\left[\phi_d''(\theta_s)\right]ds\right)(1-(\lambda+\delta)t+o(t)) \\ &+ (\lambda t)\int_0^{u+ct+\sigma B(t)} \mathbb{E}\left[\phi_d(u+ct+\sigma B(t)-y)\right]dy. \end{aligned}$$

Restando $\phi_d(u)$ y dividiendo entre t

$$\begin{aligned} 0 &= -(\lambda+\delta-\delta\lambda t)\phi_d(u) + (1-\lambda t-\delta t+\delta\lambda t^2)c\int_0^t \frac{1}{t}\mathbb{E}\left[\phi_d'(\theta_s)\right]ds \\ &+ (1-\lambda t-\delta t+\delta\lambda t^2)D\int_0^t \frac{1}{t}\mathbb{E}\left[\phi_d''(\theta_s)\right]ds + \lambda\int_0^{\theta_t} \phi_d(\theta_t - x)p(x)d + o(t) \end{aligned}$$

Haciendo ahora $t \downarrow 0$ y usando que $\lim_{t \to 0} \theta_t = u$ debido a la continuidad de las trayectorias del movimiento Browniano,

$$(\lambda + \delta)\phi_d(u) = c\phi_d'(u) + D\phi_d''(u) + \lambda \int_0^u \phi_d(u-x)p(x)dx.$$

Multiplicando por $e^{-\rho u}$,

$$\begin{aligned}(\lambda + \delta)e^{-\rho u}\phi_d(u) &= ce^{-\rho u}\phi_d'(u) + De^{-\rho u}\phi_d''(u) \\ &+ \lambda \int_0^u e^{-\rho(u-x)}\phi_d(u-x)e^{-\rho x}p(x)dx. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Denotamos por $\phi_\rho(u) := e^{-\rho u}\phi_d(u)$; entonces derivando con respecto a u

$$\phi_\rho'(u) = -\rho e^{-\rho u}\phi_d(u) + e^{-\rho u}\phi_d'(u), \tag{2.1.5}$$

y la segunda derivada

$$\phi_\rho''(u) = \rho^2 e^{-\rho u}\phi_d(u) - 2\rho e^{-\rho u}\phi_d'(u) + e^{-\rho u}\phi_d''(u). \tag{2.1.6}$$

Despejando $e^{-\rho u}\phi_d'(u)$ de (2.1.5) para luego sustituir en (2.1.6) se obtiene,

$$e^{-\rho u}\phi_d'(u) = \rho\phi_\rho(u) + \phi_\rho'(u)$$

y de la misma forma se obtiene,

$$\begin{aligned} e^{-\rho u}\phi_d''(u) &= \phi_\rho''(u) - \rho^2\phi_\rho(u) + 2\rho(\rho\phi_\rho(u) + \phi_\rho'(u)) \\ &= \phi_\rho''(u) + \rho^2\phi_\rho(u) + 2\rho\phi_\rho'(u) \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.1.4) obtenemos

$$\begin{aligned}(D\rho^2 + c\rho - \lambda - \delta)\phi_\rho(u) &+ (c + 2D\rho)\phi_\rho'(u) + D\phi_\rho''(u) \\ &+ \lambda \int_0^u \phi_\rho(u-x)e^{-\rho x}p(x)dx = 0, \end{aligned}$$

y usando que ρ satisface la ecuación de Cramer-Lundberg (1.2.1)

$$\begin{aligned} -\lambda\phi_\rho(u)\int_0^\infty e^{-\rho x}dP(x) &+ (c + 2D\rho)\phi_\rho'(u) + D\phi_\rho''(u) \\ &+ \lambda \int_0^u \phi_\rho(u-x)e^{-\rho x}dP(x) = 0. \end{aligned}$$

Integrando sobre u de $u=0$ a $u=z$, y usando que $\phi_d(0)=\omega_0$

$$\begin{aligned}-\lambda\int_0^z \phi_\rho(u)du\int_0^\infty e^{-\rho x}dP(x) \quad &+ \quad (c+2D\rho)[\phi_\rho(z)-\omega_0]\\ +D[\phi_\rho'(z)-\phi_\rho'(0)] \quad &+ \quad \lambda\int_0^z\int_0^u \phi_\rho(u-x)e^{-\rho x}dP(x)du=0.\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable de u por $y=u-x$, podemos escribir

$$\int_0^z\int_0^u \phi_\rho(u-x)e^{-\rho x}dP(x)du=\int_0^z \phi_\rho(y)\int_0^{z-y} e^{-\rho x}dP(x)dy,$$

y notemos además que

$$\begin{aligned}\int_0^z \phi_\rho(y)\int_0^{z-y} e^{-\rho x}dP(x)dy-\int_0^z \phi_\rho(y)\int_0^\infty e^{-\rho x}dP(x)dy &= \int_0^z \phi_\rho(y)\left[\int_0^{z-y} e^{z-y}e^{-\rho x}dP(x)-\int_0^\infty e^{-\rho x}dP(x)\right]dy\\ &= \int_0^z \phi_\rho(y)\left\{\int_0^{z-y} e^{-\rho x}dP(x)-\int_0^{z-y} e^{-\rho x}dP(x)+\int_{z-y}^\infty e^{-\rho x}dP(x)\right\}dy\\ &= \int_0^z \phi_\rho(y)\int_{z-y}^\infty e^{-\rho x}p(x)dxdy\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}D[\phi_\rho'(z)-\phi_\rho'(0)] \quad &+ \quad [c+2\rho D][\phi_\rho(z)-\omega_0]\\ &- \quad \lambda\int_0^z \phi_\rho(y)\int_{z-y}^\infty e^{-\rho x}p(x)dxdy=0.\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Haciendo $z\to\infty$, en (2.1.7) y utilizando las hipótesis , obtenemos

$$D\phi_\rho'(0)+[c+2\rho D]\omega_0=0,$$

es decir,

$$D\phi_\rho'(0)=-\omega_0[c+2\rho D].$$

Por lo tanto

$$D\phi_\rho'(z)+[c+2\rho D]\phi_\rho(z)=\lambda\int_0^z \phi_\rho(y)\int_{z-y}^\infty e^{-\rho x}p(x)dxdy,$$

y multiplicando ahora ambos lados por $e^{\alpha z}$, con $\alpha=\frac{c}{D}+2\rho$, obtenemos

$$D(e^{\alpha z}\phi_\rho(z))'=\lambda e^{\alpha z}\int_0^z \phi_\rho(y)\int_{z-y}^\infty e^{-\rho x}p(x)dxdy.$$

Integrando sobre z de $z=0$ a $z=v$,

$$D(e^{\alpha z}\phi_\rho(v)-\omega_0)=\lambda\int_0^v e^{\alpha z}\int_0^z \phi_\rho(y)\int_{z-y}^\infty e^{-\rho x}p(x)dxdydz,$$

de donde

$$\phi_\rho(v) = \omega_0 e^{-\alpha v} + \frac{\lambda}{D}\lambda \int_0^v e^{-\alpha(v-z)} \int_0^z \phi_\rho(y) \int_{z-y}^\infty e^{-\rho x} p(x) dx dy dz.$$

Cambiando el orden de integración, usando el Teorema de Fubini,

$$\phi_\rho(v) = \omega_0 e^{-\alpha v} + \frac{\lambda}{D}\lambda \int_0^v \phi_\rho(y) \int_y^v e^{-\alpha(v-z)} \int_{z-y}^\infty e^{-\rho x} p(x) dx dz dy,$$

y haciendo el cambio de variable $z - y = s$,

$$\phi_\rho(v) = \omega_0 e^{-\alpha v} + \frac{\lambda}{D}\lambda \int_0^v \phi_\rho(y) \int_0^{v-y} e^{-\alpha(v-y-s)} \int_s^\infty e^{-\rho x} p(x) dx ds dy.$$

Finalmente multiplicamos por $e^{\rho v}$ ambos lados:

$$\phi_d(v) = \omega_0 e^{-\beta v} + \frac{\lambda}{D}\lambda \int_0^v \phi_d(y) e^{\rho(v-y)} \int_0^{v-y} e^{-\alpha(v-y-s)} \int_s^\infty e^{-\rho x} p(x) dx ds dy,$$

donde $b = \alpha - \rho = \frac{c}{D} + \rho$. Por tanto podemos abreviar la expresión anterior como

$$\phi_d(v) = \omega_0 e^{-bv} + \int_0^v \phi_d(y) g(v-y) dy, \tag{2.1.8}$$

donde

$$g(y) = \frac{\lambda}{D} e^{\rho y} \int_0^y e^{-\alpha(y-s)} \int_s^\infty e^{-\rho x} p(x) dx ds, \tag{2.1.9}$$

la cual coincide con (2.0.6). La ecuación (2.1.8) es una ecuación de renovación impropia (ver sección 1.3) para $\phi_d(v)$. En efecto (2.1.9) se puede escribir como

$$g(y) = \int_0^y h(y-s)\gamma(s) ds \tag{2.1.10}$$

donde $h(s) = \frac{c}{D} e^{-bs}$ y $\gamma(s) = \frac{\lambda}{c} e^{\rho s} \int_s^\infty e^{-\rho x} p(x) dx$. Además

$$\int_0^\infty h(s) ds = \int_0^\infty \frac{c}{D} e^{-bs} ds = \frac{c}{Db} = \frac{c}{c + D\rho}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \gamma(s)ds &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{\rho s}\int_s^\infty e^{-\rho x}dP(x)ds \\
&= \int_0^\infty \int_0^x e^{\rho(s-x)}dsdP(x) \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \frac{1}{\rho}e^{-\rho x}(e^{\rho x}-1)dP(x) \\
&= \frac{\lambda}{c\rho}\left[1-\int_0^\infty e^{-\rho x}dP(x)\right] \\
&= \frac{\lambda}{c\rho}\left[\frac{c\rho+D\rho^2-\delta}{\lambda}\right] = \frac{c\rho+D\rho^2-\delta}{c\rho}
\end{aligned}$$

Siendo que ρ satisface la ecuación de Cramer-Lundberg (1.2.1).De (2.1.10) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(y)dy &= \int_0^\infty h(s)ds\int_0^\infty \gamma(s)ds \\
&= \frac{c}{c+D\rho}\frac{c\rho+D\rho^2-\delta}{c\rho} \\
&= \frac{c\rho+D\rho^2-\delta}{c\rho+D\rho^2} < 1, \qquad (2.1.11)
\end{aligned}$$

y por lo tanto (2.1.8) es una ecuación de renovación impropia.□

2.2. Ecuación de Renovación para la función de Gerber-Shiu en el caso de ruina por salto

A partir de ahora, consideramos el caso cuando la ruina es ocasionada por un salto. Es decir, consideramos solamente a $\phi_s(u)$. Denotamos la transformada de Laplace de $\phi_s(u)$ por $\widetilde{\phi_s}(s)$. Para derivar entonces la ecuación de renovación para (2.0.3).

Teorema 2.3 *Si* $\lim_{u\to\infty} e^{-\xi u}\phi_s(u) = 0$ *y* $\lim_{u\to\infty} e^{-\xi u}\phi_s'(u) = 0$. *Se tiene que*

$$\phi_s(u) = \int_0^u \phi_s(u-y)g(y)dy + g_\omega(u) \qquad (2.2.1)$$

donde g y g_ω, están dadas por, (2.0.6) y (2.0.5).

Demostración .
Consideremos nuevamente un tiempo $t > 0$ pequeño . El factor de descuento en este tiempo es $e^{-\delta t}$. Entonces condicionando al al tiempo T_1 del primer salto (si este ocurre), se tiene

$$\phi_s(u) \;=\; e^{-\delta t}\left(\mathbb{E}[\phi_s(u)|T_1 > t]P(T_1 > t) + \mathbb{E}[\phi_s(u)|T_1 < t]P(T_1 < t)\right), \qquad (2.2.2)$$

ahora, la probabilidad de que ocurra un salto antes de t es $1-e^{-\lambda t}$, mientras que ocurra después de t es $e^{-\lambda t}$,

$$e^{\delta t}\phi_s(u) \;=\; e^{-\lambda t}\mathbb{E}[\phi_s(u)|T_1 > t] + (1-e^{-\lambda t})\mathbb{E}[\phi_s(u)|T_1 < t],$$

utilizando la propiedad de Markov y el tamaño del salto de la reclamación esta determinado por el capital al tiempo t,

$$\begin{aligned} e^{\delta t}\phi_s(u) &= e^{-\lambda t}\mathbb{E}[\phi_s(u+ct+\sigma B(t))] \\ &\quad +(1-e^{-\lambda t})\mathbb{E}\left[\int_0^{u+ct+\sigma B(t)} \phi_s(u+ct+\sigma B(t)-x)dP(x)\right] \\ &\quad +(1-e^{-\lambda t})\mathbb{E}\left[\int_{u+ct+\sigma B(t)}^{\infty} \omega(u+ct+\sigma B(t), u+ct+\sigma B(t)-x)dP(x)\right], \end{aligned}$$

en este caso se presentan 2 posibles escenarios en caso de tener un salto: primero (2.2.3), el salto es pequeño y no provoca la ruina, lo cual solo afecta al capital inicial y el proceso de riesgo la ecuación de Gerber-Shiu se conserva; segundo (2.2.3), el salto lleva a la ruina el proceso, lo cual nos deja solo con la penalidad que se ocasiona por llegar a la ruina al tiempo t $(\omega(U(t-), |U(t)|)$. Calculamos

$$\mathbb{E}[\phi_s(u+ct+\sigma B(t)].$$

Para ello como en la sección anterior utilizamos la fórmula de Îto, ya que el proceso $Z_t = u+ct+\sigma B(t)$ cumple con que $\sigma B(t)$ es una martingala y ct un proceso creciente , así como ϕ_s es una función en $\mathcal{C}^2$. Entonces tomando $\theta_t = u+ct+\sigma B(t)$,

$$\phi_s(\theta_t) = \phi_s(u) + \int_0^t \phi_s'(\theta_s)dM_s + \int_0^t \phi_s'(\theta_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \phi_s''(\theta_s)d\langle M\rangle_s$$

donde $d\langle B\rangle_s = \sigma^2 ds$. Entonces, denotamos de nuevo $D = \sigma^2/2$,

$$\phi_s(\theta_t) = \phi_d(u) + c\int_0^t \phi_s'(\theta_s)ds + \int_0^t \phi_s'(\theta_s)dB_s + D\int_0^t \phi_s''(\theta_s)ds,$$

y tomando la esperanza, en ambos lados

$$\mathbb{E}[\phi_s(\theta_t)] = \phi_s(u) + c\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s'(\theta_s)ds\right] + D\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s''(\theta_s)ds\right]$$

Sustituyendo en (2.2.2), y usando $e^{-\delta} \approx 1-\delta t + o(t)$ cuando $t \downarrow 0$,

$$\begin{aligned} \phi_s(u) &= (1-\lambda t)(1-\delta t + o(t))\left[\phi_s(u) + c\int_0^t \mathbb{E}\left[\phi_s'(\theta_s)\right]ds + D\int_0^t \mathbb{E}\left[\phi_s''(\theta_s)\right]ds\right] \\ &+ \lambda t(1-\delta t+o(t))\mathbb{E}\left[\int_0^{\theta_t}\phi_s(\theta_t)dP(x) + \int_{\theta_t}^{\infty}\omega(\theta_t, x-\theta_t)dP(x)\right] + o(t). \end{aligned}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} 0 &= (-\delta t - \lambda t + \lambda\delta t^2)\phi_s(u) + (1-\lambda t)(1-\delta t)\left[c\int_0^t \mathbb{E}\left[\phi_s'(\theta_s)\right]ds + D\int_0^t \mathbb{E}\left[\phi_s''(\theta_s)\right]ds\right] \\ &+ \lambda t(1-\delta t)\mathbb{E}\left[\int_0^{\theta_t}\phi_s(\theta_t)dP(x) + \int_{\theta_t}^{\infty}\omega(\theta_t, x-\theta_t)dP(x)\right] + o(t), \end{aligned}$$

y dividiendo entre t y haciendo $t \downarrow 0$

$$0 = -(\delta+\lambda)\phi_s(u) + c\phi_s'(u) + D\phi_s''(u) + \lambda\left[\int_0^u \phi_s(u-x)dP(x) + \int_u^\infty \omega(u, x-u)dP(x)\right].$$

Sustituyendo $\int_0^u \phi_s(u-x)dP(x) = \phi_s * p(x)$, obtenemos

$$0 = -(\delta+\lambda)\phi_s(u) + c\phi_s'(u) + D\phi_s''(u) + \lambda\left[\phi_s * p(x) + \int_u^\infty \omega(u, x-u)dP(x)\right], \quad (2.2.3)$$

donde por Teorema del Valor Medio,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} c\int_0^t \frac{1}{t}\mathbb{E}\left[\phi_s'(\theta_s)\right]ds &= c\phi_s'(u), \\ \lim_{t\to 0} D\int_0^t \frac{1}{t}\mathbb{E}\left[\phi_s''(\theta_s)\right]ds &= D\phi_s''(u), \\ \lim_{t\to 0}\theta_t &= u. \end{aligned}$$

Multiplicando por $e^{-\xi u}$ e integrando con respecto a u de $u = 0$ a $u = \infty$ en (2.2.3) la transformada de Laplace, ϕ_s:

$$(\delta+\lambda)\tilde{\phi_s}(u) = c\int_0^\infty \phi_s'(u)e^{-\xi u}du + D\int_0^\infty \phi_s''(u)e^{-\xi u}du + \lambda(\tilde{\phi_s}(\xi)\tilde{p}(\xi) + \tilde{\omega}(\xi)) \quad (2.2.4)$$

donde $\widetilde{\omega}(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi u}\mathbf{w}(u)du$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x) &= \int_0^\infty \omega(x, y-x)dP(y) \\ &= \int_0^\infty \omega(x,y)dP(x+y) \end{aligned}$$

Para obtener (2.2.4) usamos, $\widetilde{\phi_s * p}(\xi) = \widetilde{\phi}_s(\xi)\widetilde{p}(\xi)$ y

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\xi) &= \int_0^\infty e^{-\xi u}\int_x^\infty \omega(x, y-x)dP(y)du \\ &= \int_0^\infty e^{-\xi u}\int_0^\infty \omega(x,y)dP(x+y)du = \int_0^\infty e^{-\xi u}\mathbf{w}(u)du. \end{aligned}$$

Por hipótesis tenemos

$$\lim_{u\to\infty} e^{-\xi u}\phi_s(u) = 0 \qquad \lim_{u\to\infty} e^{-\xi u}\phi_s'(u) = 0$$

además se cumple $\phi_s(0) = 0$, debido a que el primer salto no ocurre de inmediato. Entonces por integración por partes se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{\xi u}\phi_s'(u)du &= e^{-\xi u}\phi_s(u)\big|_{u=0}^{u=\infty} + \xi\int_0^\infty e^{-\xi u}\phi_s(u)du \\ &= \xi\widetilde{\phi}_s(\xi).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int_0^\infty e^{-\xi u}\phi_s''(u)du = -\phi_s'(0) + \xi^2\tilde{\phi}_s(\xi)$.
Entonces (2.2.4) puede simplificarse en la forma

$$D\left[-\phi_s'(0) + \xi^2\tilde{\phi}_s(\xi)\right] + c\xi\tilde{\phi}_s(\xi) + \lambda\tilde{\phi}_s(\xi)\tilde{p}(\xi) + \lambda\tilde{\omega}(\xi) = (\lambda+\delta)\tilde{\phi}_s(\xi),$$

$$[D\xi^2 + c\xi + \lambda\tilde{p}(\xi) - \lambda - \delta]\tilde{\phi}_s(\xi) = D\phi_s'(0) - \lambda\tilde{\omega}(\xi) \tag{2.2.5}$$

Usando el hecho que ρ satisface la ecuación de Cramer-Lundberg (1.2.1) , tomando $\xi = \rho$ en (2.2.5) se obtiene

$$D\phi_s'(0) = \lambda\tilde{\omega}(\rho).$$

Entonces sustituyendo $\lambda+\delta$ por $D\rho^2 + c\rho + \lambda\tilde{p}(\rho)$ en (2.2.5), obtenemos,

$$[D\xi^2 + c\xi + \lambda\tilde{p}(\xi) - D\rho^2 - c\rho - \lambda\tilde{p}(\rho)]\tilde{\phi}_s(\xi) = \lambda[\tilde{\rho}(\xi) - \tilde{\omega}(\xi)]$$

Notemos que $D\xi^2 + c\xi - c\rho - D\rho^2 = D[(\xi-\rho)(\xi+b)]$, entonces de arriba,

$$\left[1 - \frac{\lambda[\tilde{p}(\xi) - \tilde{p}(\rho)]}{D[(\xi-\rho)(\xi+b)]}\right]\tilde{\phi}_s(\xi) = \frac{\lambda[\tilde{\omega}(\xi) - \tilde{\omega}(\rho)]}{D[(\xi-\rho)(\xi+b)]}. \tag{2.2.6}$$

Sean,

$$g_\omega(u) = h * \gamma_\omega(u) = \frac{\lambda}{D}\int_0^u e^{-b(u-s)}\int_s^\infty e^{-\rho(x-s)}\mathbf{w}(s)dxds \tag{2.2.7}$$

y

$$\gamma_\omega(s) = \frac{\lambda}{c}\int_s^\infty e^{-\rho(x-s)}\mathbf{w}(x)dx \tag{2.2.8}$$

donde $g(y)$ se da en la expresión (2.0.6) .

Lema 2.4 *Para $D > 0$, la función $g(y)$ en (2.0.6) puede ser expresada como*

$$g(y) = \frac{\lambda}{c + 2\rho D}\left[\int_0^y e^{-b(y-x)}dP(x) + \int_y^\infty e^{-\rho(x-y)}dP(x) - \int_0^\infty e^{-by-\rho x}dP(x)\right]. \qquad (2.2.9)$$

La transformada de Laplace de $g(y)$ es

$$\tilde{g}(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi y}g(y)dy = \frac{\lambda[\tilde{p}(\xi) - \tilde{p}(\rho)]}{D[(\xi - \rho)(\xi + b)]}. \qquad (2.2.10)$$

Cuando $D \to 0$, se tiene

$$g(y) = h * \gamma(y) \underset{D\to 0}{\to} \gamma_0(y) := \frac{\lambda}{c}\int_y^\infty e^{-\rho_0(x-y)}dP(x), \qquad (2.2.11)$$

donde ρ_0 es la solución de la ecuación de Cramer-Lundberg en proceso de riesgo clásico sin difusión y $\gamma(s) = \frac{\lambda}{c}e^{\rho s}\int_s^\infty e^{-\rho x}p(x)dx$.

Demostración Recordemos que la expresión (2.0.6) es,

$$g(y) \quad = \quad \frac{\lambda}{D}\int_0^y e^{-b(y-s)}\int_s^\infty e^{-\rho(x-s)}dP(x)ds \qquad (2.2.12)$$

Cambiando el orden de integración por el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
g(y) &= \frac{\lambda}{D}\left[\int_0^y\int_0^x e^{-b(y-s)-\rho(x-s)}dsdP(x) + \int_y^\infty\int_0^y e^{-b(y-s)-\rho(x-s)}dsdP(x)\right] \\
&= \frac{\lambda}{D}e^{-by}\left[\int_0^y e^{-bx}\int_0^x e^{s(b+\rho)}dsdP(x) + \int_y^\infty e^{-bx}\int_0^y e^{s(b+\rho)}dsdP(x)\right] \\
&= \frac{\lambda}{D(b+\rho)}e^{-by}\left[\int_0^y e^{-bx}(e^{(b+\rho)x} - 1)dP(x) + \int_y^\infty e^{-bx}(e^{(b+\rho)y} - 1)dP(x)\right] \\
&= \frac{\lambda}{c + 2\rho D}e^{-by}\left[\int_0^y e^{-bx} - e^{-\rho x}dP(x) + \int_y^\infty e^{-\rho(x-y)+by} - e^{-\rho x}dP(x)\right] \\
&= \frac{\lambda}{c + 2\rho D}\left[\int_0^y e^{-b(y-x)}dP(x) - e^{-by}\int_0^y e^{-\rho x}dP(x) + \int_y^\infty e^{-\rho(x-y)}dP(x) - e^{by}\int_y^\infty e^{-\rho x}dP(x)\right] \\
&= \frac{\lambda}{c + 2\rho D}\left[\int_0^y e^{-b(y-x)}dP(x) + \int_y^\infty e^{-\rho(x-y)}dP(x) - \int_0^\infty e^{-by-\rho x}dP(x)\right].
\end{aligned}$$

Notemos que cuando $D \to 0$, entonces $\rho \to \rho_0$ por (1.2.1), $b = \frac{c}{D} + \rho \to \infty$ con lo cual el primero y tercer termino de (2.2.9) tienden a cero para $y > 0$. Por tanto para $y > 0$, cuando $D \to 0$, se tiene que

$$g(y) \to \frac{\lambda}{c}\int_y^\infty e^{-\rho(x-y)}dP(x) = \gamma_0(y).$$

De manera similar obtenemos $\tilde{g}(\xi)$. Para ello utilizamos la expresión (2.2.9):

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\xi) &= \frac{\lambda}{D\alpha}\int_0^\infty e^{-\xi y}\left[\int_0^y e^{-b(y-x)}dP(x)+\int_y^\infty e^{-\rho(x-y)}dP(x)-\int_0^\infty e^{-by-\rho x}dP(x)\right]dy\\
&= \frac{\lambda}{D\alpha}\left[\int_0^\infty\int_0^y e^{-(\xi+b)y-xb}dP(x)dy-\int_0^\infty e^{-(b+\xi)y}dy\int_y^\infty e^{-\rho x}dP(x)\right]\\
&\quad+\frac{\lambda}{D\alpha}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{(\rho-\xi)y-\rho x}dP(x)dy\\
&= \frac{\lambda}{D\alpha}\left[\int_0^\infty e^{-xb}\int_x^\infty e^{-(\xi+b)y}dydP(x)-\tilde{p}(\rho)\int_0^\infty e^{-(b+\xi)y}dy\right]\\
&\quad+\frac{\lambda}{D\alpha}\int_0^\infty e^{-\rho x}\int_0^x e^{(\rho-\xi)y}dydP(x)\\
&= \frac{\lambda}{D\alpha}\left[\int_0^\infty e^{-xb}\left(\frac{-e^{-(\xi+b)y}}{\xi+b}\Big|_x^\infty\right)dP(x)-\frac{-\tilde{p}(\rho)}{b+\xi}e^{-(b+\xi)y}\Big|_0^\infty\right]\\
&\quad+\frac{\lambda}{D\alpha}\int_0^\infty\frac{e^{-\rho x}}{\rho-\xi}\left(e^{(\rho-\xi)y}\Big|_0^x\right)dP(x)\\
&= \frac{\lambda}{D\alpha}\left[\int_0^\infty\frac{e^{-\xi x}}{\xi+b}dP(x)+\int_0^\infty\frac{e^{-\xi x}-e^{-\rho x}}{\rho-\xi}dP(x)\right]\\
&= \frac{\lambda}{D\alpha}\left[\frac{\tilde{p}(\xi)-\tilde{p}(\rho)}{\xi+b}+\frac{\tilde{p}(\xi)-\tilde{p}(\rho)}{\rho-\xi}\right]\\
&= \frac{\lambda}{D(b+\rho)}\left[\frac{(\rho+b)[\tilde{p}(\xi)-\tilde{p}(\rho)]}{(\xi+b)(\rho-\xi)}\right]\\
&= \frac{\lambda[\tilde{p}(\xi)-\tilde{p}(\rho)]}{D(\xi+b)(\rho-\xi)} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 2.5 *Para $D>0$, la función g_ω en (2.2.7) se puede simplificar como*

$$g_\omega(u)=\frac{\lambda}{c+2\rho D}\left[\int_0^u e^{-b(u-x)}\mathbf{w}(x)+\int_u^\infty e^{-\rho(x-u)}\mathbf{w}(x)dx-e^{-bu}\int_0^\infty e^{-\rho x}\mathbf{w}(x)dx\right] \tag{2.2.13}$$

y su transformada de Laplace de g_ω está dada por

$$\tilde{g}_\omega(\xi)=\int_0^\infty e^{-\xi u}g_\omega du=\frac{\lambda[\tilde{\omega}(\xi)-\tilde{\omega}(\rho)]}{D[(\xi-\rho)(\xi+b)]}, \tag{2.2.14}$$

donde $\tilde{\omega}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\mathbf{w}(x)dx$ con $\mathbf{w}(x)=\int_0^\infty \omega(x,y)dP(x+y)$.
Por lo tanto, para $u>0$,

$$g_\omega(u)=h*\gamma_\omega(u)\underset{D\to 0}{\rightarrow}\gamma_{\omega,0}(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\rho_0(x-u)}\mathbf{w}(u)dx. \tag{2.2.15}$$

Demostración De la expresión (2.2.7), intercambiando el orden de integración se obtiene

$$
\begin{aligned}
g_\omega(u) &= \frac{\lambda}{D}\int_0^u e^{-b(u-s)}\int_s^\infty e^{-\rho(x-s)}\mathbf{w}(x)dxds \\
&= \frac{\lambda}{D}\left[\int_0^u\int_0^x e^{-b(u-s)}e^{-\rho(x-s)}\mathbf{w}(x)dsdx+\int_u^\infty\int_0^u e^{-b(u-s)}e^{-\rho(x-s)}\mathbf{w}(x)dxds\right] \\
&= \frac{\lambda}{D}\left\{\int_0^u e^{-(bu+\rho x)}\mathbf{w}(x)\left[\frac{e^{s(b+rho)}}{b+\rho}\bigg|_0^x\right]dx+\int_u^\infty e^{-(bu+\rho x)}\mathbf{w}(x)\left[\frac{e^{s(b+\rho)}}{b+\rho}\bigg|_0^u\right]dx\right\} \\
&= \frac{\lambda}{D(b+\rho)}\left[\int_0^u e^{-(bu+\rho x)}\mathbf{w}(x)\left[e^{x(b+s)}-1\right]dx+\int_u^\infty e^{-(bu+\rho x)}\mathbf{w}(x)\left[e^{x(b+s)}-1\right]dx\right] \\
&= \frac{\lambda}{D(b+\rho)}\left[\int_0^u e^{-b(x-u)}\mathbf{w}(x)-e^{-(bu+\rho x)}\mathbf{w}(x)dx+\int_u^\infty e^{-\rho(x-u)}\mathbf{w}(x)-e^{-(bu+\rho x)}\mathbf{w}(x)dx\right] \\
&= \frac{\lambda}{c+2\rho D}\left[\int_0^u e^{-b(x-u)}\mathbf{w}(x)dx-e^{-bu}\int_0^\infty e^{-\rho x}\mathbf{w}(x)dx+\int_u^\infty e^{-\rho(x-u)}\mathbf{w}(x)dx\right]
\end{aligned}
$$

Notemos que cuando $D\to 0$, entonces $\rho\to\rho_0$ por (1.2.1), $c+2\rho D\to\infty$ con lo cual el primero y segundo termino de (2.2.13) tienden a cero para $u>0$. Por tanto para $u>0$, se tiene que

$$g_\omega(u)\to\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\rho_0(x-u)}\mathbf{w}(x)dx.$$

De manera similar obtenemos $\tilde{g}_\omega(\xi)$, para ello utilizamos la expresión (2.2.13):

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}_\omega(\xi) &= \int_0^\infty e^{-\xi u}g_\omega(u)du \\
&= \frac{\lambda}{b+\rho}\int_0^\infty e^{-\xi u}\left[\int_0^u e^{-b(u-x)}\mathbf{w}(x)dx+\int_u^\infty e^{-\rho(x-u)}\mathbf{w}(x)dx\right]du \\
&\quad -\frac{\lambda}{b+\rho}\int_0^\infty e^{-\xi u}\left[e^{-bu}\int_0^\infty e^{-\rho x}\mathbf{w}(x)dx\right]du \\
&= \frac{\lambda}{b+\rho}\left[\int_0^\infty e^{-bx}\mathbf{w}(x)\int_x^\infty e^{-(\xi+b)u}dudx+\int_0^\infty e^{-\rho x}\mathbf{w}(x)\int_0^x e^{(\rho-\xi)u}dudx\right] \\
&\quad -\frac{\lambda}{b+\rho}\int_0^\infty e^{-(b+\xi)u}du\int_0^\infty e^{-\rho x}\mathbf{w}(x)dx \\
&= \frac{\lambda}{b+\rho}\left[\int_0^\infty e^{-bx}\mathbf{w}(x)\frac{e^{(\xi+b)x}}{(\xi+b)}dx+\int_0^\infty e^{-\rho x}\mathbf{w}(x)\frac{e^{(\rho-\xi)x}-1}{\rho-\xi}dx\right] \\
&\quad -\frac{\lambda}{(b+\rho)(b+\xi)}\int_0^\infty e^{-\rho x}\mathbf{w}(x)dx \\
&= \frac{\lambda}{(b+\rho)}\left[\frac{\tilde{\omega}(\xi)}{\xi+b}+\frac{\tilde{\omega}(\xi)-\tilde{\omega}(\rho)}{\rho-\xi}-\frac{\tilde{\omega}(\rho)}{b+\xi}\right] \\
&= \frac{\lambda[\tilde{\omega}(\xi)-\tilde{\omega}(\rho)]}{D(\xi+b)(\rho-\xi)}.
\end{aligned}
$$

2.3. Convergencias de las funciones de penalidades cuando $D \to 0$

Teorema 2.6 *Para $u > 0$, se tiene que si $D \to 0$, entonces para t fijo*

$$
\begin{aligned}
\sigma B(t) \sim N(0, 2Dt) &\Rightarrow 0;\\
U(t) = u + ct - S(t) + \sigma B(t) &\to U(t) = u + ct - S(t);\\
\lambda \tilde{p}(\xi) &\to \lambda + \delta - c\xi - D\xi = \lambda \tilde{p}(\xi) = \lambda + \delta - c\xi;\\
\rho &\to \rho_0;\\
\phi_S(u) = \phi_S * (h * \gamma)(u) + e^{-\beta u}\phi_0(u) &\to \phi_0 * \gamma_0(u) + \gamma_{\omega,0}(u);\\
\phi_d(u) = \phi_d * (h * \gamma)(u) + e^{-\beta u} &\to 0;\\
\phi(u) = \omega_0 \phi_d(u) + \phi_S(u) &\to \phi_0(u)
\end{aligned}
$$

Demostración .
Notemos que si $D \to 0$ se tiene una convergencia de procesos. Esto dado que

$$B(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$$

Cambiando a la notación utilizada, $B(t) \sim N(0, 2Dt)$.
Por tanto el Proceso de Riesgo Clásico con difusión (1.1.4) se aproxima al Proceso de Riesgo Clásico (1.1.2). Veremos que las correspondientes ecuaciones de renovación, también convergen. La ecuación de renovación (2.2.1) para $\phi_s(u)$ converge a la ecuación de renovación (1.1.3) de $\phi_0(u)$, de (2.2.11) y (2.2.15), tenemos para $\phi_0(u)$:

$$g(y) = h * \gamma(y) \underset{D\downarrow 0}{\to} \gamma_0(y) = \frac{\lambda}{c}\int_y^\infty e^{-\rho_0(x-y)} dP(x),$$

$$g_\omega(u) = h * \gamma_\omega(u) \underset{D\downarrow 0}{\to} \gamma_{\omega,0}(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\rho_0(x-u)} \mathbf{w}(u) dx,$$

donde usamos las expresiones obtenidas en los Lemas 2.4 y 2.5.
Falta probar que $\phi_d(u) \underset{D\to 0}{\to} 0$. Por Lema 2.4, $\lim\limits_{D\to 0} g(y) = \gamma_0(y)$. Entonces por Corolario 2.2, $\phi_d(u) = \phi_d * g(u) + e^{-bu} \underset{D\downarrow 0}{\to} \phi_d * \gamma_0(u)$ para toda $u \geq 0$. Entonces aplicando transformada de Laplace, se tiene que,

$$\widetilde{\phi}_d(s) \underset{D\downarrow 0}{\to} \widetilde{\phi}_d(s)\widetilde{\gamma}_0(s),$$

para toda $s \geq 0$. Entonces $\widetilde{\phi}_d(s)[1 - \widetilde{\gamma}_0(s)] \underset{D\downarrow 0}{\to} 0$, dado que $\widetilde{\gamma}_0(s) \neq 1$, $\widetilde{\phi}_d(s) \underset{D\downarrow 0}{\to} 0$ lo cual implica que $\phi_d(s) \underset{D\downarrow 0}{\to} 0$.

2.4. Fórmula Asintótica para la función de Penalidades de Gerber y Shiu

Ahora procedemos a encontrar una fórmula asintótica para $\phi(u)$ en (2.0.4).
Para lo cual recordamos la ecuación (1.2.2):

$$\begin{aligned} \tau(\xi) &= \lambda + \delta - c\xi - D\xi^2 = -D\left(\xi + \frac{c}{2D}\right)^2 + \frac{c^2}{4D} + \lambda + \delta \\ &= \lambda\widetilde{p}(\xi). \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

la cual tiene máximo dos raíces que denotamos por $\xi_1 = \rho(\delta, D)$ que es no negativa y existe siempre, y $\xi_2 = -\kappa(\delta, D)$, que es negativa, y existe solo para $P(x)$ con cola ligera .
Diferenciamos (2.4.1) con respecto a D,

$$\lambda\widetilde{p}'(\xi)\frac{d\xi}{dD} = -c\frac{d\xi}{dD} - 2\xi\frac{d\xi}{dD} - \xi^2,$$

despejando

$$\frac{d\xi}{dD} = \frac{-\xi^2}{\lambda\widetilde{p}'(\xi) + c + 2\xi},$$

de donde al satisfacer $\rho(\delta, D)$ y $-\kappa(\delta, D)$ (2.4.1), se tiene que

$$\frac{d\rho}{dD} = \frac{-\rho^2}{\lambda\widetilde{p}'(\rho) + c + 2\rho} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\kappa}{dD} = \frac{\kappa^2}{\lambda\widetilde{p}'(-\kappa) + c - 2\kappa}.$$

Entonces , se tiene que

$$-\kappa(\delta, 0) \leq -\kappa(\delta, D) \leq 0 \leq \rho(\delta, D) \leq \rho(\delta, 0), \tag{2.4.2}$$

es decir, las raíces del proceso clásico de riesgo perturbado son menores en valor absoluto que la raíces del mismo proceso .Ahora al hacer $\delta \to 0$ se tiene que $\rho(\delta, 0)$ y $\kappa(\delta, 0)$ tienden a cero y por (2.4.2), $\rho(\delta, D)$ y $|\kappa(\delta, D)|$ decrecen a cero ; al igual que si $\lim\limits_{\delta\to 0}\rho(\delta, D) = 0$.
Entonces evaluando (1.2.1) en $\rho(\delta, D) = \rho$ y dividendo entre ρ

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\rho} &= c + D\rho - \frac{\lambda}{\rho}[1 - \widetilde{p}(\rho)] \\ &= c + D\rho - \frac{\lambda}{\rho}\int_0^\infty 1 - e^{-\rho x} dP(x) \\ &= c + D\rho - \lambda\int_0^\infty e^{-\rho x}\overline{P}(x)dx \overset{\delta\downarrow 0}{\to} c - \lambda p_1. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

donde $\overline{P}(x) = 1 - P(x)$.
Sea $\widetilde{\phi}_s(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi u}\phi_s(u)du$; entonces de (2.2.1), calculando las transformadas de Laplace,

$$\widetilde{\phi}_s(\xi) = \widetilde{\phi}_s(\xi)\widetilde{g}(\xi) + \widetilde{g}_\omega(\xi).$$

Despejando,

$$\widetilde{\phi}_s(\xi) = \frac{\widetilde{g}_\omega(\xi)}{1-\widetilde{g}(\xi)}. \tag{2.4.4}$$

Usando (2.2.10) y que $b = \frac{c}{D} + \rho$,

$$\widetilde{g}(\xi) = \frac{\lambda[\widetilde{p}(\xi) - \widetilde{p}(\rho)]}{(b+\xi)(\rho-\xi)D}. \tag{2.4.5}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(\xi) - 1 &= \frac{\lambda[\widetilde{p}(\xi) - \widetilde{p}(\rho)]}{(b+\xi)(\rho-\xi)D} - 1 \\
&= \frac{\lambda\widetilde{p}(\xi) - \lambda - \delta + c\rho + D\rho^2 - [c\rho + \rho^2 D + \xi\rho D - c\xi - \rho\xi D - \xi^2 D]}{(b+\xi)(\rho-\xi)D} \\
&= \frac{\lambda\widetilde{p}(\xi) - \lambda - \delta + c\xi + \xi^2 D}{(b+\xi)(\rho-\xi)D} \\
&= \frac{\lambda\widetilde{p}(\xi) - \tau(\xi)}{(b+\xi)(\rho-\xi)D}.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Entonces combinando (2.4.6) con (2.2.14),

$$\widetilde{\phi}_s(\xi) = \frac{\lambda[\widetilde{\omega}(\xi) - \widetilde{\omega}(\rho)]}{\tau(\xi) - \lambda\widetilde{p}(\xi)}.$$

Para encontrar una fórmula asintótica para $\phi(u)$ en (2.0.4). Es necesario obtener el coeficiente de ajuste $\kappa > 0$, tal que

$$\int_0^\infty e^{\kappa x} g(x)dx = \widetilde{g}(-\kappa) = 1. \tag{2.4.7}$$

Equivalente a obtener $\lambda\widetilde{p}(-\kappa) = \tau(-\kappa)$ por (2.4.6). Pero de (2.4.1), $-\kappa = -\kappa(\delta, D)$, es ξ_2, la única raíz negativa cuando ésta existe.

Teorema 2.7 *Supongamos que existe $-\kappa(\delta, D)$. Para $D > 0$, la fórmula asintótica para la función de Gerber-Shiu $\phi(u)$ es,*

$$\phi(u) \sim \frac{\lambda \int_0^\infty (e^{\kappa x} - e^{-\rho x}) \int_x^\infty \omega(x, y-x)dP(y)dx + \omega_0(\rho+\kappa)D}{-\lambda\widetilde{p}'(-\kappa) - c + 2\kappa D} e^{-\kappa u}, \quad u \to \infty, \tag{2.4.8}$$

donde $\widetilde{p}'(-\kappa) = \int_0^\infty x e^{\kappa x} dP(x)$.

Demostración Se ha probado que $\phi(u)$ satisface la ecuación de renovación impropia (2.0.4),

$$\phi(u) = \int_0^u \phi(u-y)g(y)dy + g_\omega(u) + e^{-bu}\omega_0$$

Multiplicando por $e^{-\kappa u}$, obtenemos una ec. de renovación propia: dado que $\int_0^\infty e^{\kappa x} g(x) = \widetilde{g}(-\kappa) = 1$,por el Teorema de Renovación (1.2) tomando $dF(x) = e^{\kappa x}g(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{u\to\infty} e^{-\kappa u}\phi(u) &= \left[\int_0^\infty e^{\kappa x}[g_\omega(x) + \omega_0 e^{-bx}]dx\right]\left[\int_0^\infty x e^{\kappa x} g(x)dx\right]^{-1} \\ &= \frac{\widetilde{g}_\omega(-\kappa) + \frac{\omega_0}{b-\kappa}}{-\widetilde{g}'(-\kappa)}, \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

donde derivando con respecto a ξ, la expresión (2.4.5), obtenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{g}'(\xi) &= \frac{\lambda\widetilde{p}'(\xi)[(b+\xi)(\rho-\xi)D] + \lambda D(\frac{c}{D} + 2\xi)[\widetilde{p}(\xi) - \widetilde{p}(\rho)]}{[(b+\xi)(\rho-\xi)D]^2} \\ &= \frac{\lambda\widetilde{p}'(\xi) + [c + 2\xi D]\widetilde{g}(\xi)}{(b+\xi)(\rho-\xi)D}. \end{aligned}$$

Usando (2.2.14) y la expresión de arriba con $\widetilde{g}(-\kappa) = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{u\to\infty} e^{-\kappa u}\phi(u) &= \left[\frac{\lambda[\widetilde{\omega}(-\kappa) - \widetilde{\omega}(\rho)]}{(b-\kappa)(\rho+\kappa)D} + \frac{\omega_0}{b-\kappa}\right]\left[\frac{-\lambda\widetilde{p}'(-\kappa) - [c - 2D\kappa]}{(b-\kappa)(\rho+\kappa)D}\right]^{-1} \\ &= \frac{\lambda[\widetilde{\omega}(-\kappa) - \widetilde{\omega}(\rho)] + \omega_0(\rho+\kappa)}{-\lambda\widetilde{p}'(-\kappa) - c + 2\kappa D}. \end{aligned}$$

Cuando $D = 0$, tenemos $\rho = \rho_0$, $\kappa = \kappa_0$ y (2.4.8) se reduce a la fórmula asintótica demostrada por Gerber-Shiu (1998).

Corolario 2.8 *Para $D > 0$, si $\omega(x, y) \equiv 1$, la fórmula asintótica para $\phi(u)$ es,*

$$\phi(u) \sim \frac{[\delta + (\omega_0 - 1)\rho\kappa D](\rho+\kappa)}{\rho\kappa[-\lambda\widetilde{p}'(-\kappa) - c + 2\kappa D]} e^{-\kappa u}, \quad u \to \infty. \tag{2.4.10}$$

Demostración Si $\omega(x, y) \equiv 1$,

$$\widetilde{\omega}(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi x}[1 - P(x)]dx = \frac{1}{\xi}[1 - \widetilde{p}(\xi)],$$

y entonces

$$\begin{aligned} \lambda\left[\widetilde{\omega}(-\kappa) - \widetilde{\omega}(\rho)\right] &= \lambda\left[-\frac{1}{\kappa}(1 - \widetilde{p}(-\kappa)) - -\frac{1}{\rho}(1 - \widetilde{\rho}(\rho))\right] \\ &= \lambda\left[\frac{\delta + c\kappa - D\kappa^2}{\kappa} + \frac{\delta - c\rho - D\kappa^2}{\rho}\right] \\ &= \lambda\left[\frac{(\delta - D\rho\kappa)(\rho+\kappa)}{\kappa\rho}\right], \end{aligned}$$

de donde obtenemos,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g}_\omega(-\kappa) &= \frac{\lambda\left[\frac{(\delta - D\rho\kappa)(\rho+\kappa)}{\kappa\rho}\right]}{(b-\kappa)(\rho+\kappa)D} \\
&= \frac{\delta - D\rho\kappa}{(b-\kappa)D\rho\kappa}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, usando (2.4.9),

$$
\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} e^{-\kappa u}\phi(u) &= \left[\frac{\delta - D\rho\kappa}{(b-\kappa)D\rho\kappa} + \frac{\omega_0}{b-\kappa}\right]\left[\frac{-\lambda\widetilde{p}'(-\kappa) - c + 2\kappa D}{(b-\kappa)(\rho+\kappa)D}\right]^{-1} \\
&= \frac{[\delta + (\omega_0 - 1)\rho\kappa D](\rho+\kappa)}{\rho\kappa[-\lambda\widetilde{p}'(-\kappa) - c + 2\kappa D]}
\end{aligned}
$$

Si $\delta \to 0$ se tiene de (2.4.3),

$$
\frac{\delta(\rho+\kappa)}{\kappa\rho} = \frac{\delta}{\kappa} + \frac{\delta}{\rho} \underset{\delta\downarrow 0}{\longrightarrow} c - \lambda p_1,
$$

y si $D = 0$ entonces por (2.4.10), obtenemos $-\kappa_0 = R$, el coeficiente de Cramér-Lundberg para el modelo de clásico de riesgo y

$$
\lim_{u\to\infty} e^{-\kappa_0 u}\phi(u) = \frac{c - \lambda p_1}{\lambda\widetilde{p}'(-\kappa_0) - c},
$$

que es la fórmula asintótica de Cramér-Lundberg para la probabilidad de ruina del modelo clásico de riesgo.$\square$

3. Probabilidades de Ruina del modelo perturbado

Como se comento en los antecedentes Dufresne y Gerber (1990), estudiaron el caso particular de la probabilidad de ruina del proceso de riesgo clásico perturbado por un movimiento Browniano, y obtuvieron una ecuación de renovación.
Para completez de la tesis, primero demostraremos sus resultados en el Teorema (3.1), para posteriormente probar que el Teorema (3.1) es caso particular del Teoremas (2.1).

3.1. Ecuación de Renovación de Dufresne-Gerber

Retornando el modelo de clásico de riesgo perturbado por un movimiento Browniano con carga de seguridad $q = \frac{c-\lambda p_1}{c}$ la cual pedimos este entre $(0, 1]$. Ahora estamos interesados en estudiar a la probabilidad de supervivencia

$$\varphi(u) = P\left[U(t) \geq 0, \forall t\ \geq 0 |\, U(0) = u\right], \tag{3.1.1}$$

y $\psi(u) = 1 - \varphi(u)$, la probabilidad de ruina. Esta se puede descomponer en

$$\psi(u) = \psi_d(u) + \psi_s(u),$$

donde $\psi_d(u)$ es la probabilidad de que llegar a la ruina por oscilación, es decir, que el capital al tiempo de ruina sea 0, y $\psi_s(u)$ es la probabilidad de que la ruina ocurra por un salto, es decir , el capital al tiempo de ruina es negativa: Tenemos que debido a que el movimiento Browniano, oscila en todo intervalo $[0, t]$, $t \geq 0$

$$\varphi(0) = \psi_s(0) = 0 \qquad\qquad \psi(0) = \psi_d(0) = 1 \tag{3.1.2}$$

Como se mencionó anteriormente ψ es un caso particular de la función de Gerber-Shiu (1.1.2), cuando $\omega_0 = 1$, $\delta = 0$ y $\omega(x, y) \equiv 1$. En este caso de (2.4.1) tenemos que $\rho(0) = 0$.

Teorema 3.1 *Sea $\varphi(u)$, definida en (3.1.1), se tiene que*

$$\varphi(x) = qH_1(x) + (1 - q)\int_0^x \varphi(z)h_1 * h_2(x - z)dz. \tag{3.1.3}$$

donde, para $x > 0$

$$h_1(x) = \zeta e^{-\zeta x}, \qquad h_2(x) = \frac{1}{p_1}[1 - P(x)],$$

y denotando las distribuciones por $H_1(x)$ y $H_2(x)$.
Es decir, es una ecuación de renovación impropia para la probabilidad de supervivencia.

Demostración .
Consideremos un tiempo $t > 0$ pequeño. Condicionado al tiempo del primer salto T_1 del proceso $S(t)$, se tiene

$$\varphi(u) = \mathbb{E}\left[\varphi(u)|T_1 > t\right] P(T_1 > t) + \mathbb{E}\left[\varphi(u)|T_1 < t\right] P(T_1 < t)$$

donde el proceso tendrá un salto con probabilidad $1 - e^{\lambda t}$ y no salta con probabilidad $e^{-\lambda t}$,

$$\varphi(u) = \mathbb{E}\left[\varphi(u)|T_1 > t\right] e^{-\lambda t} + \mathbb{E}\left[\varphi(u)|T_1 < t\right] (1 - e^{-\lambda t})$$

usando la propiedad de Markov,

$$\varphi(u) = \mathbb{E}\left[\varphi(u + ct + B(t))\right] e^{-\lambda t} + \mathbb{E}\left[\int_0^{u+ct+B(t)} \varphi(u + ct + B(t) - x) dP(x)\right] (1 - e^{-\lambda t}) \tag{3.1.4}$$

Calculemos

$$\mathbb{E}\left[\varphi(u + ct + B(t))\right].$$

Para ello denotemos nuevamente $\theta_t = u + ct + B(t)$, haciendo uso de la fórmula de Îto (A.2), ya que el proceso $Z(t) = u + ct + B(t)$ cumple con las hipótesis del teorema: $B(t)$ es una martingala y ct un proceso creciente . Además φ es una función en C^2, entonces

$$\mathbb{E}\left[\varphi(\theta_t)\right] = \varphi(u) + c\mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi'(\theta_s) ds\right] + D\mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi''(\theta_s) ds\right].$$

Sustituyendo en (3.1.4),

$$\begin{aligned}
\varphi(u) \quad &= \quad e^{\lambda t}\left\{\varphi(u) + c\mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi'(\theta_s) ds\right] + D\mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi''(\theta_s) ds\right]\right\} \\
&\quad + (1 - e^{-\lambda t})\mathbb{E}\left[\int_0^{u+ct+B(t)} \varphi(u + ct + B(t) - x) dP(x)\right],
\end{aligned}$$

donde al ser t un tiempo pequeño, podemos utilizar que $e^{-at} = 1 - at + o(t)$

$$\begin{aligned}
\varphi(u) \quad &= \quad (1 - \lambda t + o(t))\left\{\varphi(u) + c\mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi'(\theta_s) ds\right] + D\mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi''(\theta_s) ds\right]\right\} \\
&\quad + \lambda t\mathbb{E}\left[\int_0^{u+ct+B(t)} \varphi(u + ct + B(t) - x) dP(x)\right],
\end{aligned}$$

dividiendo entre t y haciendo $t \downarrow 0$,

$$\lambda\varphi(u) = c\varphi'(u) + D\varphi''(u) + \lambda \int_0^u \varphi(u-x)dP(x).$$

Integrando con respecto a u de 0 a v, usando (3.1.2),

$$\int_0^v \lambda\varphi(u)du = c\varphi(u) + D\left[\varphi'(v) - \varphi'(0)\right] + \lambda \int_0^v \int_0^u \varphi(u-x)dP(x)du.$$

Empleando que $dP(x) = -d(1-P(x))$ y haciendo el cambio de variable $y = u - x$

$$\begin{aligned}\int_0^v \int_0^u \varphi(u-x)dP(x)du &= \lambda \int_0^v \left(\lambda\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u-x)dP(x)\right) du \\ &= \lambda \int_0^v \varphi(v-y)[1-P(y)]dy.\end{aligned}$$

Entonces

$$D\varphi'(v) + c\varphi(v) = D\varphi'(0) + \lambda \int_0^v \varphi(v-y)[1-P(y)]dy. \tag{3.1.5}$$

Haciendo $v \to \infty$ en (3.1.5), utilizando que la probabilidad de supervivencia es 1, se tiene $c = D\varphi'(0) + \lambda \int_0^\infty [1-P(y)]dy = D\varphi'(0) + \lambda p_1$. De lo cual,

$$\varphi'(0) = \frac{c - \lambda p_1}{D} := q\zeta,$$

donde denotamos por $\zeta = \frac{c}{D}$ y $q = \frac{c-\lambda p_1}{c}$ la carga de seguridad .Sustituyendo en (3.1.5), obtenemos

$$\varphi'(v) + \zeta\varphi(v) = q\zeta + \frac{\lambda}{D} \int_0^v \varphi(v-y)\overline{P}(y)dy, \qquad v \geq 0. \tag{3.1.6}$$

Multiplicando ahora por $e^{\zeta v}$, tenemos

$$e^{\zeta v}\varphi'(v) + \zeta e^{\zeta v}\varphi(v) = q\zeta e^{\zeta v} + \frac{\lambda}{D} \int_0^v e^{\zeta v}\varphi(v-y)\overline{P}(y)dy$$

Integrando con respecto a v de 0 a x,

$$\int_0^x e^{\zeta v}\varphi'(v)dv + \zeta \int_0^x e^{\zeta v}\varphi(v)dv = q\zeta e^{\zeta v} + \frac{\lambda}{D} \int_0^v e^{\zeta v}\varphi(v-y)\overline{P}(y)dy.$$

Utilizando,

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{\zeta v}\varphi'(v)dv &= e^{\zeta v}\varphi(v)|_{v=0}^x - \int_0^x e^{\zeta v}\varphi(v)dv \\ &= e^{\zeta x}\varphi(x) - \zeta \int_0^x e^{\zeta v}\varphi(v)dv,\end{aligned}$$

y $q\int_0^x \zeta e^{\zeta v}dv = q(e^{\zeta x}-1)$. Obtenemos

$$\varphi(x) = q(e^{\zeta x}-1) + \frac{\lambda}{D}\int_0^x \int_0^v e^{\zeta(v-x)}\varphi(v-y)\overline{P}(y)dydv, \tag{3.1.7}$$

haciendo uso de las siguientes densidades,

$$h_1(x) = \zeta e^{-\zeta x}, \qquad x > 0$$

$$h_2(x) = \frac{1}{p_1}[1-P(x)], \qquad x > 0$$

y denotando las distribuciones por $H_1(x)$ y $H_2(x)$, vemos que (3.1.7) es de la forma,

$$\varphi(x) = qH_1(x) + (1-q)\int_0^x \varphi(z)h_1 * h_2(x-z)dz.$$

□

A partir de la cual podemos obtener la transformada de Laplace de la probabilidad de ruina $\widetilde{\psi}$.

Corolario 3.2 *Usando la ecuación de renovación impropia de φ (3.1.3), para la transformada de Laplace de ψ se tiene que,*

$$\widetilde{\psi}(s) \;=\; \frac{s^2D + \lambda p_1 s - \lambda[1-\widetilde{p}(s)]}{s\,[s(c+Ds) - \lambda[1-\widetilde{p}(s)]]} \tag{3.1.8}$$

Demostración .
A partir de la definición φ y ψ, se puede obtener la siguiente relación de las transformadas de Laplace,

$$\widetilde{\psi}(s) = \frac{1}{s} - \widetilde{\varphi}(s). \tag{3.1.9}$$

De (3.1.3) se tiene que

$$\widetilde{\varphi}(s) = q\widetilde{h}_1(s) + (1-q)\widetilde{\varphi}(s)\widetilde{h}_1(s)\widetilde{h}_2(s), \tag{3.1.10}$$

donde

$$\widetilde{h}_1(s) = \int_0^\infty e^{-xs}\zeta e^{-\zeta x}dx = \frac{\zeta}{\zeta+s} = \frac{c}{c+Ds},$$

$$\widetilde{h}_2(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\frac{1}{p_1}\overline{P}(x)dx = \frac{1}{p_1 s}[1-\widetilde{p}(x)].$$

Sustituyendo en (3.1.10), se tiene que

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(s) &= \frac{\frac{c-\lambda p_1}{c}\frac{c}{c+Ds}}{1-\frac{\lambda p_1}{c}\frac{c}{c+Ds}\frac{[1-\widetilde{p}(s)]}{p_1 s}} \\ &= \frac{c-\lambda p_1}{c+cD-\frac{\lambda}{s}[1-\widetilde{p}(s)]}\end{aligned}$$

Por tanto de (3.1.9),

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(s) &= \frac{1}{s}\frac{c-\lambda p_1}{c+cD-\frac{\lambda}{s}[1-\widetilde{p}(s)]} \\ &= \frac{1}{s}-\frac{sc-\lambda p_1 s}{s(c+Ds)-\lambda[1-\widetilde{p}(s)]} \\ &= \frac{s^2D+\lambda p_1 s-\lambda[1-\widetilde{p}(s)]}{s\left[s(c+Ds)-\lambda[1-\widetilde{p}(s)]\right]}\end{aligned}$$

□

Corolario 3.3 *El Teorema (3.1) es caso particular del teorema (2.1).*

Demostración .
Tomando ahora la Ecuación de Renovación para la función de Gerber-Shiu (2.0.4) sacando su transformada de Laplace

$$\widetilde{\phi}(s)=\widetilde{\phi}(s)\widetilde{g}(s)+\frac{\omega_0}{b+s}+\widetilde{g}_\omega(s),$$

de donde,

$$\widetilde{\phi}(s)=\frac{\frac{\omega_0}{b+s}+\widetilde{g}_\omega(s)}{1-\widetilde{g}(s)}. \tag{3.1.11}$$

Entonces sean $\omega_0=1$, $\delta=0$ y $\rho=0$,

$$\widetilde{\omega}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\overline{P}(x)dx=\frac{1}{s}[1-\widetilde{p}(s)].$$

De (2.2.14) obtenemos, acordando que $b=\frac{c}{D}+\rho=\frac{c}{D}$,

$$\begin{aligned}\widetilde{g}_\omega(s) &= \frac{\lambda[\widetilde{\omega}(s)-\widetilde{\omega}(0)]}{-s(b+s)D} \\ &= \frac{s\lambda p_1-\lambda[1-\widetilde{p}(s)]}{s^2(c+sD)},\end{aligned}$$

y, de (2.2.10),

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(s) &= \frac{\lambda[\widetilde{p}(s)-1]}{-s\left(\frac{c}{D}+s\right)D} \\ &= \frac{\lambda[1-\widetilde{p}(s)]}{s(c+sD)}.\end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo en (3.1.11)

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}(s) &= \frac{\frac{s\lambda p_1-\lambda[1-\widetilde{p}(s)]}{s^2(c+sD)}+\frac{D}{c+sD}}{1-\frac{\lambda[1-\widetilde{p}(s)]}{s(c+sD}} \\ &= \frac{s\lambda\mu-\lambda[1-\widetilde{p}(s)]+Ds^2}{s\left[s(c+sD)-\lambda[1-\widetilde{p}(s)]\right]}.\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Se obtiene que (3.1.8) y (3.1.12) son iguales, es decir, las funciones de renovación calculadas por Dufresne y Gerber y el Teorema (2.1) de este trabajo coinciden.

3.2. Cálculos explícitos para ψ_s y ψ_d en el caso de Mezcla de Exponenciales

Aquí obtenemos una aplicación de los resultados obtenidos, cuando los montos de las reclamaciones son una mezcla de exponenciales, es decir, tienen la densidad

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i\beta_i e^{-\beta_i x}, \quad x > 0,$$

donde $\sum_{i=1}^{n} A_i = 1$, con $A_i > 0$ para toda $1 \le i \le n$. Entonces

$$1 - P(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\beta_i x}, \quad x > 0, \tag{3.2.1}$$

de donde su transformada de Laplace, es

$$\begin{aligned}\widetilde{p}(\xi) &= \int_0^\infty e^{-\xi x}\sum_{i=1}^{n} A_i\beta_i e^{-\beta_i x}dx \\ &= \frac{1}{p_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{\beta_i+\xi},\end{aligned}$$

donde $p_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\beta_i}$. Sustituyendo en (3.1.8) , y descomponiendo $\tilde{\psi}(s)$ en fracciones parciales, se tienen que la probabilidad de la ruina tiene la forma

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k e^{r_k x}, \quad x \geq 0, \tag{3.2.2}$$

Ahora para ciertos coeficientes r_k y C_k, $k = 1, ..., n+1$. Empecemos reemplazando $\varphi(x)$ por $1 - \phi(x)$ en (3.1.6), con la cual se obtiene

$$D\phi'(x) + c\phi(x) = \lambda \int_0^x \phi(x-y)\overline{P}(x)dy + \lambda \int_x^\infty \overline{P}(y)dy.$$

Sustituyendo (3.2.1) y (3.2.2) y calculando las integrales se obtiene,

$$-D\sum_{k=1}^{n+1} C_k r_k e^{-r_k x} + c\sum_{k=1}^{n+1} C_k e^{-r_k x} = \lambda \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i C_k}{\beta_i - r_k}(e^{-r_k x} - e^{-\beta_i x}) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\beta_i} e^{-\beta_i x}$$

Comparando los coeficientes de $e^{-r_k x}$ de ambos lados, se tiene que $r_1, \ldots, r_{n+1}$ son las soluciones de la ecuación de grado $n+1$

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{\beta_k - r} + Dr = c.$$

Ahora comparando los coeficientes de $e^{-\beta_i x}$, se tiene que $C_1, \ldots, C_{n+1}$ deben satisfacer el sistema lineal

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_i}{\beta_i - r_k} C_k = 1 \qquad i = 1, \ldots, n., \tag{3.2.3}$$

De que $\psi(0) = 1$ se sigue que

$$C_1 + \cdots + C_{n+1} = 1. \tag{3.2.4}$$

Obteniendo con ello un sistema lineal de $n+1$ incógnitas para C_k, $k = 1, \ldots, n+1$.Podemos calcular C_k explícitamente, para ello utilizamos la función racional,

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{C_k r_k}{x - r_k}. \tag{3.2.5}$$

Tenemos de (3.2.3) y (3.2.4) que $Q(0) = -1$ y $Q(\beta_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces, $Q(x)$ se expresa como

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x - \beta_i}{\beta_i} \right) \prod_{k=1}^{n+1} \left(\frac{r_k}{x - r_k} \right).$$

De (3.2.5),

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{C_k r_k}{x - r_k} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x - \beta_i}{\beta_i} \right) \prod \left(\frac{r_k}{x - r_k} \right),$$

y multiplicando por r_h y evaluando en $x = r_h$, se obtiene que

$$C_h = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{r_h - \beta_i}{\beta_i} \right) \prod_{k=1, k \neq h}^{n+1} \left(\frac{r_k}{r_h - r_k} \right) \qquad h = 1, \ldots, n+1. \tag{3.2.6}$$

3.2.1. Resultados numéricos

De (3.2.6) hacemos un estudio comparativo de las probabilidad de ruina realizando cambios en los parámetros. Las distribuciones que utilizamos, son una mezcla de dos exponenciales ,

$$1 - P(x) = A_1 e^{-\beta_1 x} + A_2 e^{-\beta_2 x}.$$

La primera tabla presenta el modelo de riesgo clásico con los siguientes parámetros, Para obtener

Parámetros			
u	4	D	2
c	2	β_1	6
β_2	8	λ	3

Cuadro 3.1.: Parámetros iniciales

los valores de la tabla (3.2) sea realizó un programa en R . Varíamos los valores de A_i, $i = 1, 2$ para ver el efecto de distribución de las reclamaciones en la probabilidades de ruina.

Notemos que a mayor desviación en la reclamaciones la probabilidad de ruina por salto es mayor que la probabilidad por difusión.

Tomando ahora los mismos parámetros pero modificando la desviación del movimiento Browniano, se puede observar en la tabla (3.3) como la probabilidad de ruina por difusión empieza siendo muy pequeña, pero crece con el aumento de D, hasta superar a la probabilidad de ruina por salto.

Para ilustrar ahora el comportamiento de las probabilidades de ruina, conforme el capital inicial varia, se presenta la siguiente gráfica.

La cual muestra que el efecto de las reclamaciones supera al movimiento Browniano, pero para un capital inicial cercano al cero la ruina por difusión es mayor que la ruina por salto.

$Var(X_i)$	A_1	$\psi(u)$	$\psi_d(u)$	$\psi_s(u)$
0.011111	0.2	0.044631	0.043317	0.956683
0.010156	0.3	0.046005	0.044558	0.955442
0.010069	0.4	0.047415	0.045828	0.954172
0.010851	0.5	0.048861	0.047128	0.952872
0.0125	0.6	0.050344	0.04846	0.95154
0.015017	0.7	0.051866	0.049823	0.950177
0.018403	0.8	0.053426	0.051218	0.948782
0.022656	0.9	0.055026	0.052645	0.947355

Cuadro 3.2.: Probabilidades de ruina

D	$\psi(u)$	$\psi_d(u)$	$\psi_s(u)$
0.5	0.000011308058	0.000009857053	0.000001451005
1.5	0.01525746	0.01472254	0.00053492
2	0.04214871	0.04106926	0.00107945
3	0.11886314	0.11688657	0.00197657
10	0.52395338	0.52143414	0.00251924
12	0.58330082	0.58096979	0.00233103
20	0.72329536	0.72157014	0.00172521

Cuadro 3.3.: Probabilidades de ruina variando D

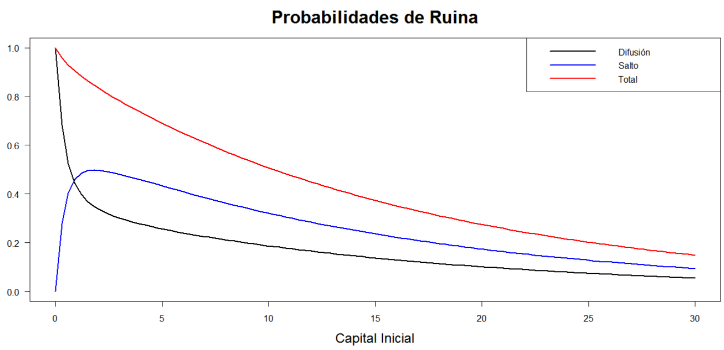

Figura 3.1.: $\psi_d(u) < \psi_s(u)$ a partir de $u > .3$

A. Fórmula de Itô

Aquí daremos algunas definiciones básicas y presentaremos un caso particular de la fórmula de de Itô que se empleo durante este trabajo. Para más información consultar libro ().
Pero antes de introducir el teorema de Itô, es necesario presentar unas definiciones que serán de utilidad.Para lo cual comenzamos con un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definición A.1 *Una sucesión* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *de sub-*σ*álgebras de* $\mathcal{F}$ *es una filtración, si es una sucesión creciente, es decir,*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{t_1} \subset \ldots \subset \mathcal{F}_{t_{n-1}} \subset \mathcal{F}_{t_n} \subset \ldots \subset \mathcal{F}.$$

para toda sucesión $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$.

Definición A.2 *Una sucesión* $\{X_t, t \geq 0\}$ *es adaptada a* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *si* X_t *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para todo* $t \geq 0$.

Definición A.3 *Una sucesión de* $\{X_t, \mathcal{F}_t, t \geq o\}$ *donde* X_t *son v.a integrables y* $\mathcal{F}_t$ *es una filtración, es una martingala si* X_t *es adaptada a* $\mathcal{F}_t$ *y se cumple que*

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s \qquad c.s \quad \forall s \leq t$$

o submartingala si

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s \qquad c.s \quad \forall s \leq t$$

Teorema A.1 *Toda submartingala continua* $\{X_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *puede descomponerse de manera única en la suma de una martingala continua* $\{M_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *y un proceso creciente continua* $\{A_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$,

$$X_t = M_t + A_t.$$

Aquí por un proceso creciente nos referimos a que sus trayectorias son no decrecientes con $A_0 = 0$.

Definición A.4 *Definimos el conjunto de martingalas continuas cuadráticas integrables como* $\mathcal{M}_2$*, es decir,*

$$\mathcal{M}_2 := \{X = (X_t, \mathcal{F}_t) : X \text{ es una martingala continua y } \mathbb{E}|X_t|^2 < \infty\}$$

Para toda $M \in \mathcal{M}_2$, usando la desigualdad de Jensen, es fácil verificar que M^2 es una submartingala, y por lo tanto, por el teorema de descomposición de Doob-Meyer existe un proceso continuo no-decreciente, denotado por $\langle M \rangle$, tal que

$$M^2 - \langle M \rangle$$

es una $\mathcal{F}_t$-martingala. El proceso $\langle M \rangle$ es llamado el proceso de variación cuadrática de M.

Teorema A.2 ***Itô.*** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ [1] y sea $\{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ una semimartingala continua, de la forma $X_t = X_0 + M_t + B_t$, con $M_t \in \mathcal{M}_2$ y B_t de variación finita adaptado, entonces*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dM_s + \int_0^t f'(X_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle M \rangle_s, \qquad \text{(A.0.1)}$$

la cual se puede expresar simbólicamente como,

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t)dM_t + f'(X_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle M \rangle_t \\ &= f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle M \rangle_t, \qquad 0 \leq t \leq \infty. \end{aligned} \qquad \text{(A.0.2)}$$

[1] $f \in \mathcal{C}^2$ si su primera y segunda derivadas existen y estas son continuas

B. Movimiento Browniano

El movimiento Browniano, a veces llamado el Proceso de Wiener, fue planteado originalmente por el botánico inglés Robert Brown como un modelo para el movimiento de una pequeña partícula inmersa en un liquido y por tanto sujeta a colisión molecular.

Definición B.1 *El proceso estocástico* $\mathbf{B} = \{B(t), t \geq 0\}$ *es un movimiento Browniano estándar, si cumple:*

1. $\mathbf{B}$ *tiene incrementos independientes*
2. *Para* $0 \leq s < t$,
$$\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(s) \sim N(0, t-s)$$
3. *Con probabilidad 1, las trayectorias de* $\mathbf{B}$ *son continuas,*
$$P[\mathbf{B} \in \mathcal{C}[0, \infty]] = 1$$
4. $B(0) = 0$

El movimiento Browniano se puede obtener por medio de aproximaciones continuas de caminatas aleatorias donde el tamaño de los saltos es pequeño y los tiempos de salto es acelerado.

Teorema B.1 *Sea* $\{X_n, n \geq 0\}$ *variables aleatorias i.i.d. con* $E(X_n) = 0$ *y* $Var(X_n) = 1$. *Definamos la caminata aleatoria por* $S_0 = 0$, *y, para* $n \geq 1$, *con* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, *así como el proceso continuo,*

$$B_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}}, \qquad t \geq 0 \tag{B.0.1}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t, *es decir, el mayor entero menor o igual a* t. *Entonces se tiene que*

$$B_n \overset{d}{\Rightarrow} \mathbf{B} \tag{B.0.2}$$

entendiendo que es una convergencia de distribuciones finito dimensionales, es decir, para cualquier k *y* $0 \leq t_1 \leq \cdots t_k$ *y* $x_1, ..., x_n$ *números reales se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} P[B_n(t_1) \leq x_i, i = 1, ..., k] = P[B(t_i) \leq x_i, i = 1, ..., k].$$

Demostración .

Para verificar esta convergencia, hacemos uso del Teorema de Límite Central. Primero notamos que para cualquier $t > 0$ se tiene que

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{[nt]}}\sqrt{\frac{[nt]}{n}}.$$

Debido que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

por el Teorema de limite central, donde $N(0,1)$, es una variable aleatoria normal, se tiene que para todo t fijo,

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \overset{d}{\Rightarrow} tN(0,1) \overset{d}{=} \mathbf{B}(t)$$

También, para $t > s$, se obtiene que

$$\begin{aligned} B_n(t) - B_n(s) &= \frac{\sum_{j=[ns]+1}^{[nt]} X_j}{\sqrt{n}} \\ &\overset{d}{=} \frac{S_{[nt]-[ns]}}{\sqrt{n}} \\ &\overset{d}{\to} (t-s)N(0,1) \overset{d}{=} B(t) - B(s) \end{aligned}$$

Dado que las variables

$$(B_n(t_1), B_n(t_2) - B_n(t_1), \cdots, B_n(t_k) - B_n(t_{k-1}))$$

son independientes al estar compuestas de sumas de X´s de bloques disjuntos, se tiene la convergencia conjunta:

$$\begin{aligned} & P[B_n(t_1) \leq x_1, B_n(t_2) - B_n(t_1) \leq x_2, \ldots, B_n(t_k) - B_n(t_{k-1}) \leq x_k] \\ = & P[B_n(t_1) \leq x_1] P[B_n(t_2) - B_n(t_1) \leq x_2] \cdots P[B_n(t_k) - B_n(t_{k-1}) \leq x_k] \\ \underset{n\to\infty}{\to} & P[B(t_1) \leq x_1] P[B(t_2) - B(t_1) \leq x_2] \cdots P[B(t_k) - B(t_{k-1}) \leq x_k] \end{aligned}$$

Por lo tanto ,

$$\begin{aligned} & (B_n(t_1), B_n(t_2) - B_n(t_1), \ldots, B_n(t_k) - B_n(t_{k-1})) \\ \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} & (B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_k) - B(t_{k-1})) \end{aligned}$$

en $\mathbb{R}^k$. Aplicando el mapeo

$$(b_1, b_2, \dots, b_k) \mapsto (b_1, b_1 + b_2, \dots, \mapsto b_1 + \cdots + b_k)$$

para $\mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^k$ nos da la convergencia

$$\begin{aligned} & (B_n(t_1), B_n(t_2), \dots, B_n(t_k)) \\ \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\Rightarrow}} & (B(t_1), B(t_2), \dots, B(t_k)) \end{aligned}$$

□

Bibliografía

[1] Tsai, C.C.L., Willmot G. E. (2002) . A generalized defective renewal equation for the surplus process pertubed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics, 30, 51-66.

[2] Gerber H.U. (1970) . An extension of the renewal equation and its application in the collective theory of risk. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 205-210.

[3] Gerber, H.U., Landry, B. (1998). On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option. Insurance: Mathematics and Economics 22, 263-276.

[4] Gerber, H.U., Shiu, E.S.W, (1998). On the time value of ruin. North American Actuarial Journal 2(1), 48-78.

[5] Sarkar J.,Sen A.,(2005). Weak convergence approach to compound Poisson risk processes perturbed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics 36, 421-432.

[6] Resnick, Sidney I. (2005). Adventures in Stochastic Processes, 4th ed. Birrkhäuser Boston.

[7] Karatzas Ioannis, Shreve Steven E. 1991. Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd ed. Springer-Verlag.

[8] Rolski Tomasz, Hanspeter Schmidli, Volker Schmidt, Jozef Teugels 1999.

[9] R Development Core Team (2010). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing. http://www.R-project.org/

[10] Dufresne F., Gerber H.U (1991). Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics, 10, 51-59.

[11] Billingsley Patrick (1999). Convergence of Probability Measures, 2nd ed. New York: Wiley, Wiley series in probability and statistics., Probability and statistics.